VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta stavební

Pružnost a plasticita II

3. ročník bakalářského studia

prof. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.
Katedra stavební mechaniky

3

Řešení nosných stěn metodou sítí

Řešení stěn metodou sítí, metoda sítí (metoda konečných diferencí)

Stěnová rovnice: $$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0$$

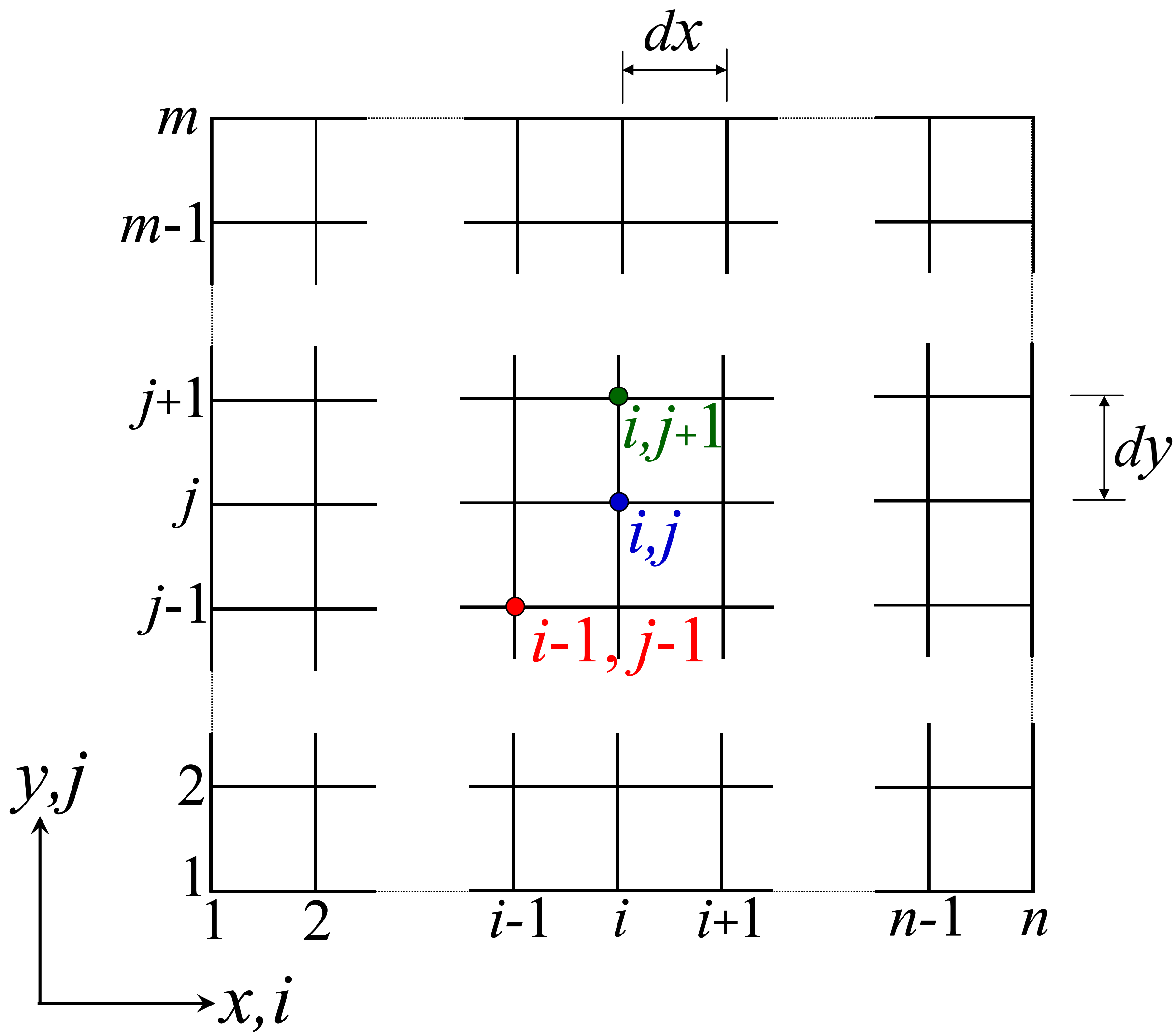
Řešení **metodou sítí** (**metodou konečných diferencí**) spočívá v nahrazení parciálních derivací diferenčními vztahy a v převedení řešení diferenciální rovnice na řešení lineárních rovnic při splnění okrajových podmínek.

Výsledkem řešení lineárních rovnic jsou hodnoty **Airyho funkce** Φ v konečném počtu bodů sítě. Následně lze určit složky napětí, příp. hlavní napětí, jejich směry atd.

Zvolená síť může být pravoúhlá (čtvercová nebo obdélníková), trojúhelníková, ale také radiální.

Při řešení nosných stěn se zpravidla využívá **síť pravoúhlá**.

Řešení stěn metodou sítí, vytvoření sítě



Řešení stěn metodou sítí, diferenční vztahy

$$\frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial x} = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial y} = \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{\partial^3 \Phi_{i,j}}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \Phi_{i,j}}{\partial x^2}\right) = \frac{\dfrac{\partial^2 \Phi_{i+1,j}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 \Phi_{i-1,j}}{\partial x^2}}{2\Delta x} = \frac{\Phi_{i+2,j} - 2\Phi_{i+1,j} + 2\Phi_{i-1,j} - \Phi_{i-2,j}}{2\Delta x^3}$$

Řešení stěn metodou sítí, diferenční vztahy

$$\frac{\partial^4\Phi_{i,j}}{\partial x^4}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2\Phi_{i,j}}{\partial x^2}\right)=\frac{\frac{\partial^2\Phi_{i+1,j}}{\partial x^2}-\frac{2\partial^2\Phi_{i,j}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_{i-1,j}}{\partial x^2}}{\Delta x^2}=$$

$$=\frac{\Phi_{i+2,j}-4\Phi_{i+1,j}+6\Phi_{i,j}-4\Phi_{i-1,j}+\Phi_{i-2,j}}{\Delta x^4}$$

$$\frac{\partial^4\Phi_{i,j}}{\partial y^4}=\frac{\Phi_{i,j+2}-4\Phi_{i,j+1}+6\Phi_{i,j}-4\Phi_{i,j-1}+\Phi_{i,j-2}}{\Delta y^4}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{i,j}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi_{i,j}}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi_{i,j+1}-\Phi_{i,j-1}}{2\Delta y}\right)=\frac{\Phi_{i+1,j+1}+\Phi_{i-1,j-1}-\Phi_{i+1,j-1}-\Phi_{i-1,j+1}}{4\Delta x\Delta y}$$

$$\frac{\partial^4\Phi_{i,j}}{\partial x^2\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2\Phi_{i,j}}{\partial y^2}\right)=$$

$$=\frac{\Phi_{i+1,j+1}-2\Phi_{i+1,j}+\Phi_{i+1,j-1}-2\left(\Phi_{i,j+1}-2\Phi_{i,j}+\Phi_{i,j-1}\right)+\Phi_{i-1,j+1}-2\Phi_{i-1,j}+\Phi_{i-1,j-1}}{\Delta x^2\Delta y^2}$$

Řešení stěn metodou sítí, diferenční vztahy

Stěnová rovnice: $$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=0$$

Stěnová rovnice po dosazení diferenčních vztahů:

$$\begin{aligned}&\Phi_{i,j}\left(8+6\alpha^2+6\beta^2\right)-\\&4\cdot\left(\Phi_{i+1,j}\left(1+\beta^2\right)+\Phi_{i-1,j}\left(1+\beta^2\right)+\Phi_{i,j+1}\left(1+\alpha^2\right)+\Phi_{i,j-1}\left(1+\alpha^2\right)\right)+\\&2\cdot\left(\Phi_{i+1,j+1}+\Phi_{i+1,j-1}+\Phi_{i-1,j+1}+\Phi_{i-1,j-1}\right)+\\&\alpha^2\left(\Phi_{i,j+2}+\Phi_{i,j-2}\right)+\beta^2\left(\Phi_{i+2,j}+\Phi_{i-2,j}\right)=0\end{aligned}$$

kde:

$$\alpha^2=\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2$$

$$\beta^2=\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

pro $\Delta x=\Delta y$ platí :

$$\begin{aligned}&20\cdot\Phi_{i,j}\text{-}8\cdot\left(\Phi_{i+1,j}+\Phi_{i-1,j}+\Phi_{i,j+1}+\Phi_{i,j-1}\right)+\\&2\cdot\left(\Phi_{i+1,j+1}+\Phi_{i-1,j-1}+\Phi_{i-1,j+1}+\Phi_{i-1,j-1}\right)+\Phi_{i+2,j}+\Phi_{i-2,j}+\Phi_{i,j+2}+\Phi_{i,j-2}=0\end{aligned}$$

Řešení stěn metodou sítí, diferenční vztahy

Pro $\Delta x \neq \Delta y$ platí : $\alpha^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2$ $\beta^2 = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$

	i-2	i-1	i	i+1	i+2
j+2	0	0	α^2	0	0
j+1	0	2	$4(-1-\alpha^2)$	2	0
j	β^2	$4(-1-\beta^2)$	$8+6\alpha^2+6\beta^2$	$4(-1-\beta^2)$	β^2
j-1	0	2	$4(-1-\alpha^2)$	2	0
j-2	0	0	α^2	0	0

Řešení stěn metodou sítí, diferenční vztahy

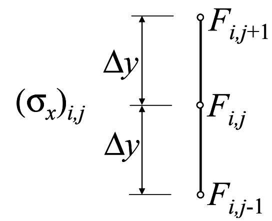
Pro $\Delta x = \Delta y$ platí : $\alpha^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 = 1$ $\beta^2 = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 1$

	i-2	i-1	i	i+1	i+2
j+2	0	0	1	0	0
j+1	0	2	-8	2	0
j	1	-8	20	-8	1
j-1	0	2	-8	2	0
j-2	0	0	1	0	0

Výpočet složek napětí

Po určení hodnot Airyho funkce napětí v bodech sítě i, j lze z diferenčních vztahů stanovit také **složky napětí** [N/m^2] :

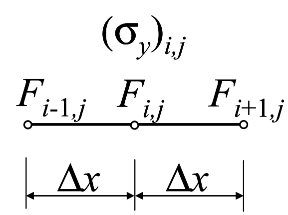
$$\sigma_{x_{i,j}} = \frac{1}{t}\frac{\partial^2 \Phi_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{t\Delta y^2}$$



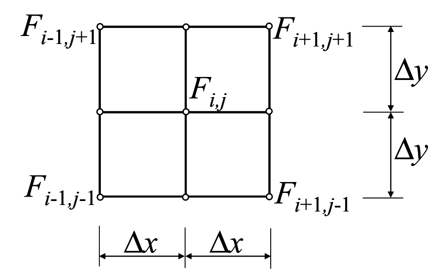
Pozn:

$$\Phi_{i,j} = F_{i,j}$$

$$\sigma_{y_{i,j}} = \frac{1}{t}\frac{\partial^2 \Phi_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{t\Delta x^2}$$



$$\tau_{xy_{i,j}} = -\frac{1}{t}\frac{\partial^2 \Phi_{i,j}}{\partial x \partial y} = -\frac{\Phi_{i+1,j+1} + \Phi_{i-1,j-1} - \Phi_{i+1,j-1} - \Phi_{i-1,j+1}}{4t\Delta x \Delta y}$$



kde t je tloušťka nosné stěny

Výpočet poměrných deformací v nosné stěně

Fyzikální rovnice izotropního materiálu při rovinné napjatosti:

$$\varepsilon = C \cdot \sigma \qquad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

tedy

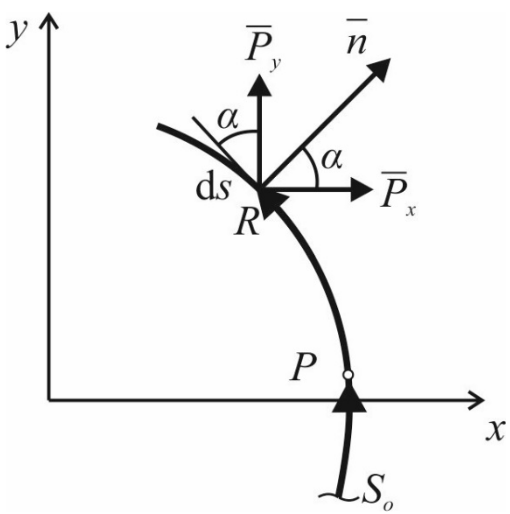
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\sigma_x\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Okrajové podmínky

V libovolném bodě na okraji stěny musí být splněny dvě okrajové podmínky



$$\overline{p}_x = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{yx} \sin\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \qquad \sin\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

$$\overline{p}_y = \tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_y \sin\alpha$$

$$\overline{p}_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$$

$$\overline{p}_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)$$

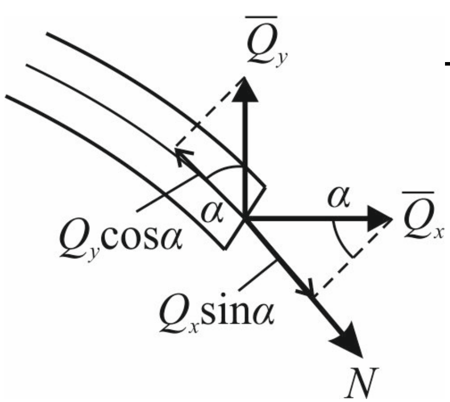
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\int_{S_0}^{S} \overline{p}_y \mathrm{d}s = -\overline{Q}_y \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \int_{S_0}^{S} \overline{p}_x \mathrm{d}s = \overline{Q}_x$$

Integrál $\int_{S_o}^{S} \overline{p}_y \mathrm{d}s$ označený Q_y představuje součet y-ových složek povrchového zatížení v úseku $S_o S$ okraje stěny, obdobně je tomu u Q_x

Okrajové podmínky, analogie náhradního rámu

S využitím odvozeného lze formulovat analogii náhradního (fiktivního) rámu:

1. **Derivace funkce napětí ve směru vnější normály k okraji stěny je rovna normálové síle na fiktivním rámu**, jehož střednice má stejný tvar a přenáší stejné zatížení jako okraj stěny. **Kladná normálová síla představuje tah.**



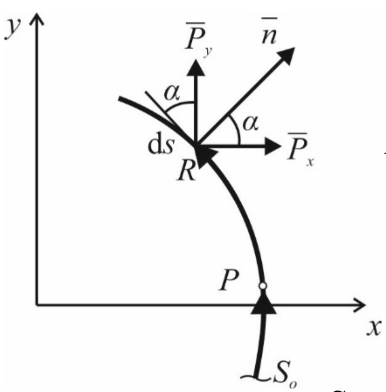
$$-\overline{Q}_y = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad \overline{Q}_x = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\sin\alpha = -\overline{Q}_y\cos\alpha + \overline{Q}_x\sin\alpha = N$$

Okrajové podmínky, analogie náhradního rámu

2. **Funkce napětí v hraničním bodě nosné stěny je rovna ohybovému momentu v průřezu fiktivního rámu.** Kladný ohybový moment způsobuje tah ve vnitřních vláknech rámu.

Ohybový moment v bodě se souřadnicemi $[x,y]$ je:



$$M=\int_{S_0}^{S}\left[\overline{p}_x(y-\eta)-\overline{p}_y(x-\xi)\right]\mathrm{d}s=y(s)\overline{Q}_x x(s)-\int_{S_0}^{S}\left(\overline{p}_x\eta-\overline{p}_y\xi\right)\mathrm{d}s$$

$$x(s)\le\xi\le x(s_0)\qquad\qquad y(s)\le\eta\le y(s_0)$$

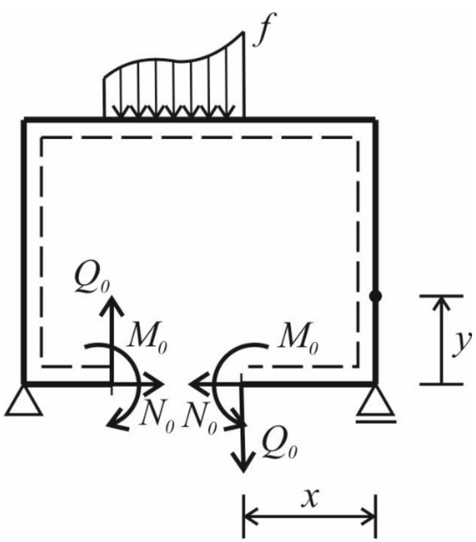
Protože $\displaystyle\int_{S_0}^{S}\left(\overline{p}_x\eta-\overline{p}_y\xi\right)\mathrm{d}s=\left[y(s)\overline{Q}_x-x(s)\overline{Q}_y\right]-\int_{S_0}^{S}\left(\overline{Q}_\xi\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}s}-\overline{Q}_\eta\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s$

Po dosazení $\displaystyle M=\int_{S_0}^{S}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta+\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi\right)=\int_{S_0}^{S}\mathrm{d}\Phi=\Phi$

Okrajové podmínky, analogie náhradního rámu

Podle analogie náhradního rámu se statické okrajové podmínky redukují na určení Airyho funkce napětí a její derivace ve směru vnější normály k okraji stěny.

Výpočet normálových sil a ohybových momentů na fiktivním rámu je úlohou staticky neurčitou. Vytvoří-li se z rámu konstrukce staticky určitá se zavedenými staticky neurčitými silami M_0, N_0 a Q_0, pak jejich přírůstek k Airyho funkci napětí bude lineární funkcí proměnných x,y:

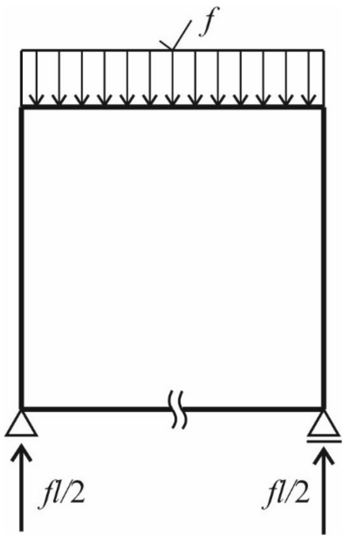


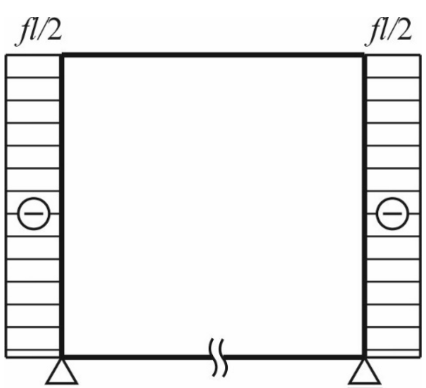
$$\Phi_0 = M_0 + Q_0 x - N_0 y$$

Složky napětí jsou dány druhými parciálními derivacemi Φ_0 podle x a y. Ty budou nulové stejně jako jejich příspěvek k napjatosti stěny.

Fiktivní rám lze považovat za konstrukci staticky určitou.

Aplikace analogie náhradního rámu





Zatížení nosné stěny odpovídá fiktivnímu rámu na obrázku vlevo.

Ve sloupech fiktivního rámu jsou normálové síly.

Derivace Airyho funkce napětí ve směru vnější normály k okraji stěny je rovna normálové síle na fiktivním rámu.

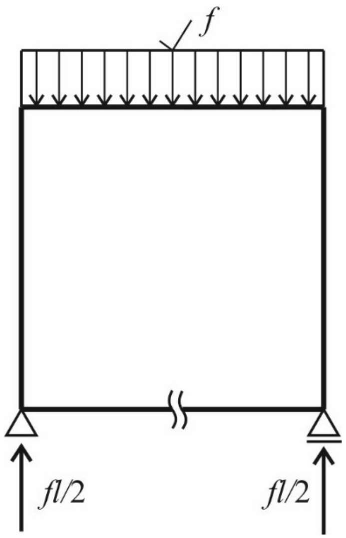
V daném případě platí:

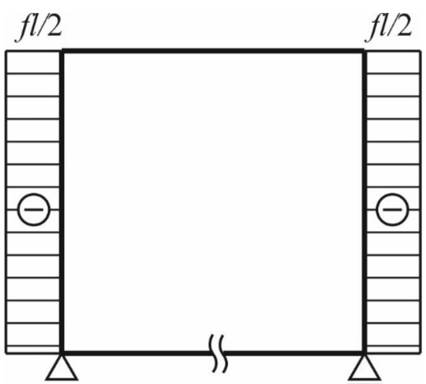
$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = N$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2\Delta x} = N \Rightarrow \Phi_{i+1,j} = \Phi_{i-1,j} + 2\Delta x N$$

Pozor na směr normály k fiktivnímu rámu !

Aplikace analogie náhradního rámu





Zatížení stěny odpovídá fiktivnímu rámu na obrázku vlevo.

V příčlích fiktivního rámu nejsou normálové síly.

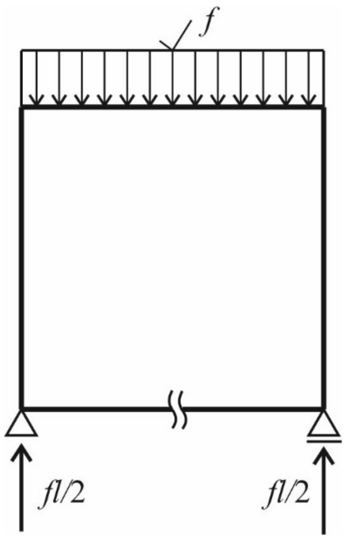
Derivace funkce napětí ve směru vnější normály k okraji stěny je rovna normálové síle na fiktivním rámu.

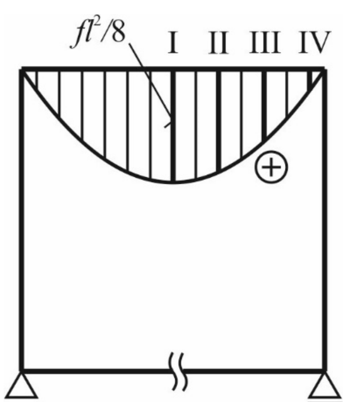
V tomto případě platí:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j-1}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow \Phi_{i,j+1} = \Phi_{i,j-1}$$

Aplikace analogie náhradního rámu





Zatížení stěny odpovídá fiktivnímu rámu na obrázku vlevo.

Zatížení vyvolává ohybový moment v příčli náhradního rámu.

Funkce napětí v hraničním bodě stěny je rovna ohybovému momentu v průřezu fiktivního rámu.

V daném případě platí $\mathbf{\Phi}=M$.

V hraničních bodech, kde je $M=\mathbf{0}$, je také $\mathbf{\Phi}=\mathbf{0}$.

Postup výpočty stěny metodou sítí

1. Nakreslit výpočetní model stěny.
2. Určit hodnoty Airyho funkce napětí na obryse stěny podle analogie náhradního rámu, $M = \Phi$.
3. Určit normálové síly fiktivního rámu nosné stěny, který je derivací funkce napětí Φ ve směru vnější normály k hranici stěny a hodnotu Airyho funkce napětí vně obrysu nosné stěny.
4. Sestavit matici levých stran a vektor pravých stran pro výpočet hodnot Airyho funkce napětí v jednotlivých bodech sítě.
5. Řešit soustavu lineárních rovnic. Jejich počet odpovídá počtu uzlů sítě. Výsledkem jsou **hodnoty Airyho funkce napětí Φ** v uzlech sítě.

Postup výpočty stěny metodou sítí

6. Hodnoty Airyho funkce napětí Φ v jednotlivých bodech sítě jsou podkladem pro výpočet složek napětí. V případě, že při výpočtu hodnot M a N se předpokládala jednotková tloušťka nosné stěny a ta je jiná, zahrnout do výpočtu napětí.
7. Provést kontrolu vypočtených složek napětí, zejména na okrajích stěny.
8. Vypočet hodnot **hlavních normálových napětí**.
9. Vypočet směrů hlavních normálových napětí.
10. Vypočet **maximálních smykových napětí** a jejich směrů.