VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta stavební

Pružnost a plasticita II

3. ročník bakalářského studia

prof. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.
Katedra stavební mechaniky

2

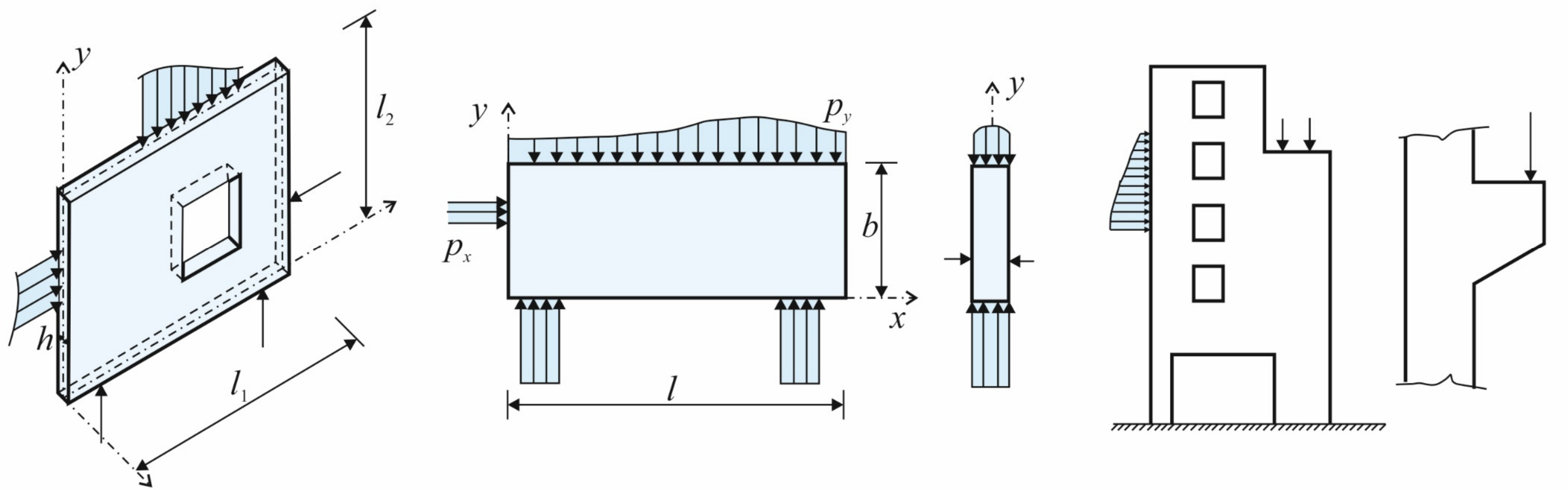
Rovinný problém, stěnová rovnice

Rovinné úlohy

Řešené úlohy teorie pružnosti se podstatně zjednoduší, pokud v tělese budou všechna nenulová(é)

- napětí – **rovinný stav napjatosti**
- deformace – **rovinný stav deformace**

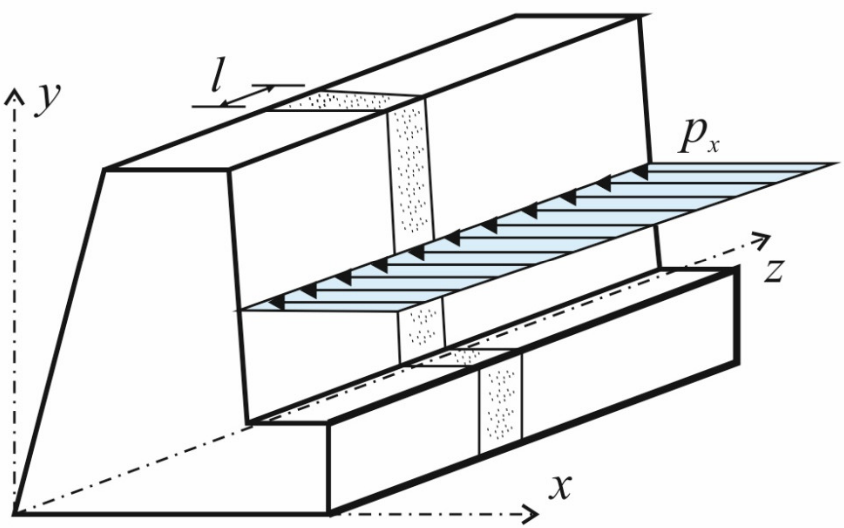
rovnoběžná(é) s jednou rovinou.



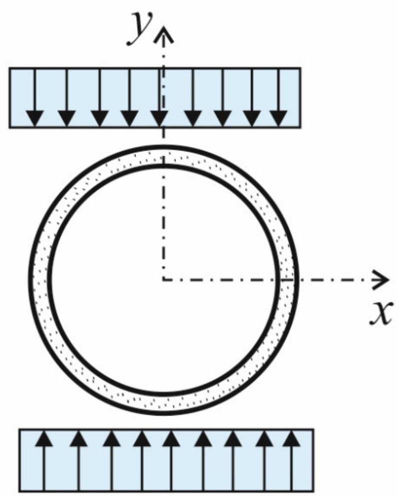
Příklady rovinného stavu napjatosti

Rovinné úlohy

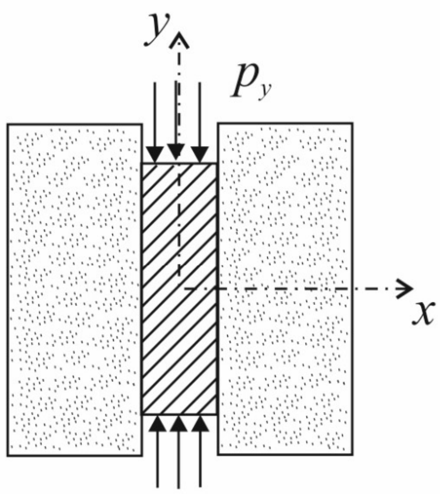
Příklady rovinného stavu deformace



Opěrná zeď



Potrubí,
tunel v zemním tělese



Pružné těleso
mezi dokonale
tuhými tělesy

Základní rovnice matematické teorie pružnosti v rovině, rovinná napjatost

Pro střednicí v rovině xy platí:

$$\sigma_x \neq 0 \qquad \sigma_y \neq 0 \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} \neq 0$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

Rovnice rovnováhy se pak redukují:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \boxed{\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \boxed{\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}} + Y = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}} + \boxed{\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}} + \boxed{\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}} + Z = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

Základní rovnice matematické teorie pružnosti v rovině, rovinná napjatost

Fyzikální rovnice (Hookův zákon) se upravují:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \\ \tau_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right) \qquad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(-\mu\sigma_x - \mu\sigma_y\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Při rovinné napjatosti je deformace prostorová $\varepsilon_z \neq 0$

Základní rovnice matematické teorie pružnosti v rovině, rovinná napjatost, pokračování:

Fyzikální rovnice lze maticově zapsat ve tvaru:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{vmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\mu) \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

zkráceně:

$$\varepsilon = C \cdot \sigma \qquad \sigma = D \cdot \varepsilon$$

C matice poddajnosti

D matice tuhosti

ε vektor deformace

σ vektor napětí

Základní rovnice matematické teorie pružnosti v rovině, rovinná deformace

Napětí jako funkce složek deformace

Pro střednici v rovině xy je: $\varepsilon_x \neq 0 \quad \varepsilon_y \neq 0 \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} \neq 0$

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$$

Fyzikální rovnice (Hookův zákon) se upravují:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{2G}{1-2\mu} \cdot \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \\ \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Základní rovnice matematické teorie pružnosti v rovině, rovinná deformace

Napětí jako funkce složek deformace

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{2G}{1-2\mu} \cdot \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \\ \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\varepsilon_x(1-\mu)+\varepsilon_y\mu\right) \qquad \sigma_y = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\varepsilon_x\mu+\varepsilon_y(1-\mu)\right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G\gamma_{xy} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$$

Z rovnice $\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(-\mu\sigma_x - \mu\sigma_y + \sigma_z\right) = 0$ vyplývá $\sigma_z = \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$

Při rovinné deformaci je napěťový stav prostorový $\sigma_z \neq 0$

Základní rovnice matematické teorie pružnosti v rovině, rovinná deformace,

Deformace jako funkce složek napětí

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0\\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0\\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu)\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

Neboť $\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_x)$:

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[(1-\mu^2)\sigma_x-\mu(1+\mu)\sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[(1-\mu^2)\sigma_y-\mu(1+\mu)\sigma_x\right]$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}=\frac{2(1+\mu)\tau_{xy}}{E}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{1}{E}\begin{vmatrix}(1-\mu^2) & -\mu(1+\mu) & 0\\ -\mu(1+\mu) & (1-\mu^2) & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\mu)\end{vmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{vmatrix}1-\mu & \mu & 0\\ \mu & 1-\mu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\mu)\end{vmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}$$

Zkrácené lze napsat:

$$\varepsilon=C\cdot\sigma \qquad \sigma=D\cdot\varepsilon$$

D matice tuhosti

C matice poddajnosti

Základní rovnice matematické teorie pružnosti v rovině, shrnutí

Rovinné úlohy lze dělit na:

- Rovinné úlohy **napjatosti**
- Rovinné úlohy **deformace**

V těchto úlohách se řeší

- Dvě **rovnice rovnováhy**
- Tři **geometrické rovnice**
- Tři **fyzikální rovnice**

Neznámé nezávislé funkce proměnných x, y:

- Tři složky **napětí**
- Tři složky **poměrných deformací**
- Dvě složky **posunutí**

Základní rovnice matematické teorie pružnosti v rovině, shrnutí

- U **rovinné napjatosti** je **prostorový stav deformace**. Dvě složky poměrné úhlové deformace jsou nulové a třetí poměrnou délkovou deformaci lze vyjádřit jako funkci nenulových normálových napětí nebo jako funkci zbývajících poměrných délkových deformací.
- U **rovinné deformace** je **prostorový stav napjatosti**. Dvě smyková napětí jsou nulová a třetí normálové napětí lze vyjádřit jako funkci nenulových normálových napětí nebo jako funkci zbývajících poměrných délkových deformací.
- **Rovnice rovnováhy** a **rovnice kompatibility** jsou u obou typů rovinných úloh **identické**.
- **Fyzikální rovnice** se poněkud liší, i když je lze i pro normálová napětí a deformace formálně shodně zapsat.
- Vztahy mezi **poměrnou úhlovou deformací** a **smykovým napětím** jsou **identické**.

Řešení nosných stěn, odvození stěnové rovnice

Rovnice kompatibility pro rovinnou napjatost:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Hookův zákon

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}$$

$$\frac{\partial^2(\sigma_x - \mu\sigma_y)}{E\partial y^2} + \frac{\partial^2(\sigma_y - \mu\sigma_x)}{E\partial^2 x} = \frac{2(1+\mu)\partial^2 \tau_{xy}}{E\partial x \partial y}$$

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial^2 x} - \mu\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}\right) = \frac{2(1+\mu)}{E}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Řešení nosných stěn, odvození stěnové rovnice

Soustava 3 rovnic pro funkce σ_x, σ_y a τ_{xy} :

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial^2 x}-\mu\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}\right)=\frac{2(1+\mu)}{E}\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}$$

Rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0$$

Předpoklad:
X, Y = konst.

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\cdot\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=0$$

$$\Delta\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=0 \qquad \Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

tzv. **Lévyho podmínka** – podmínka kompatibility v rovině zapsaná prostřednictvím napětí (s využitím **Laplaceova operátoru** 2. řádu)

Řešení nosných stěn, odvození stěnové rovnice, pokračování

Soustava 3 rovnic pro funkce σ_x, σ_y a τ_{xy} :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

Pro nulové objemové síly X, Y a izotropní materiál rovnicím rovnováhy vyhovuje funkce $\Phi(x,y)$ – **Airyho funkce napětí**, pro kterou platí:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

George Biddell Airy
(1801-1892)

Řešení nosných stěn, odvození stěnové rovnice, pokračování

Po dosazení složek napětí do Lévyho podmínky lze získat tzv. **stěnovou rovnici:**

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\cdot\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=0$$

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \qquad \sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=0$$

Pomocí Laplaceova operátoru: $\Delta\Delta\Phi(x,y)=0$

Stěnová rovnice

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \qquad \Delta\Delta\Phi(x, y) = 0$$

Stěnová rovnice, nazývaná také **biharmonická**, je:

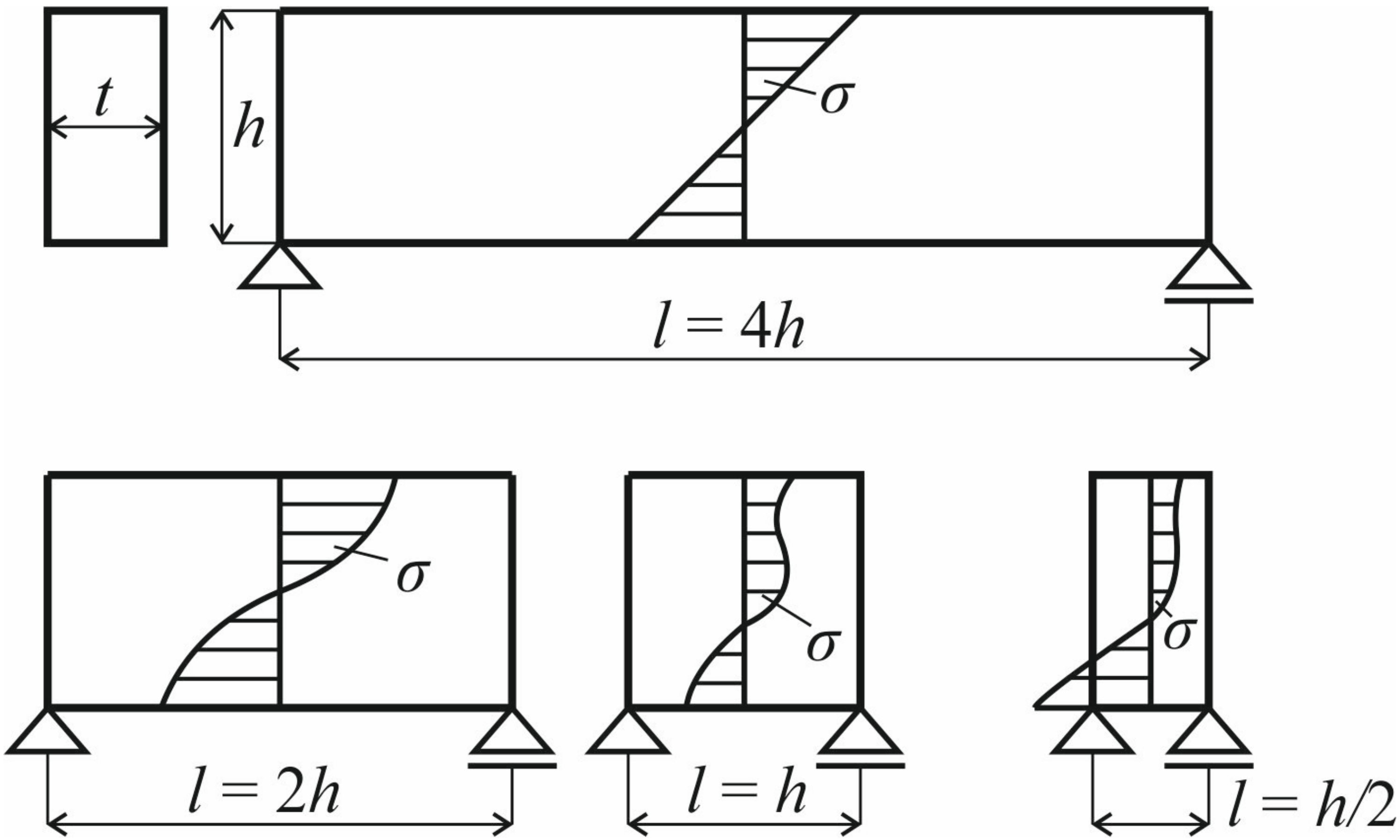
- parciální diferenciální rovnicí 4. řádu,
- lineární,
- homogenní (pravá strana je nulová).

Pro každou rovnici stěny lze odvodit stav napětí stěny odpovídající **podmínkám rovnováhy** a **spojitosti** (Airy, 1862) při respektování **okrajových podmínek**.

Platí za předpokladu nulových nebo konstantních objemových sil, pro homogenní a izotropní materiál.

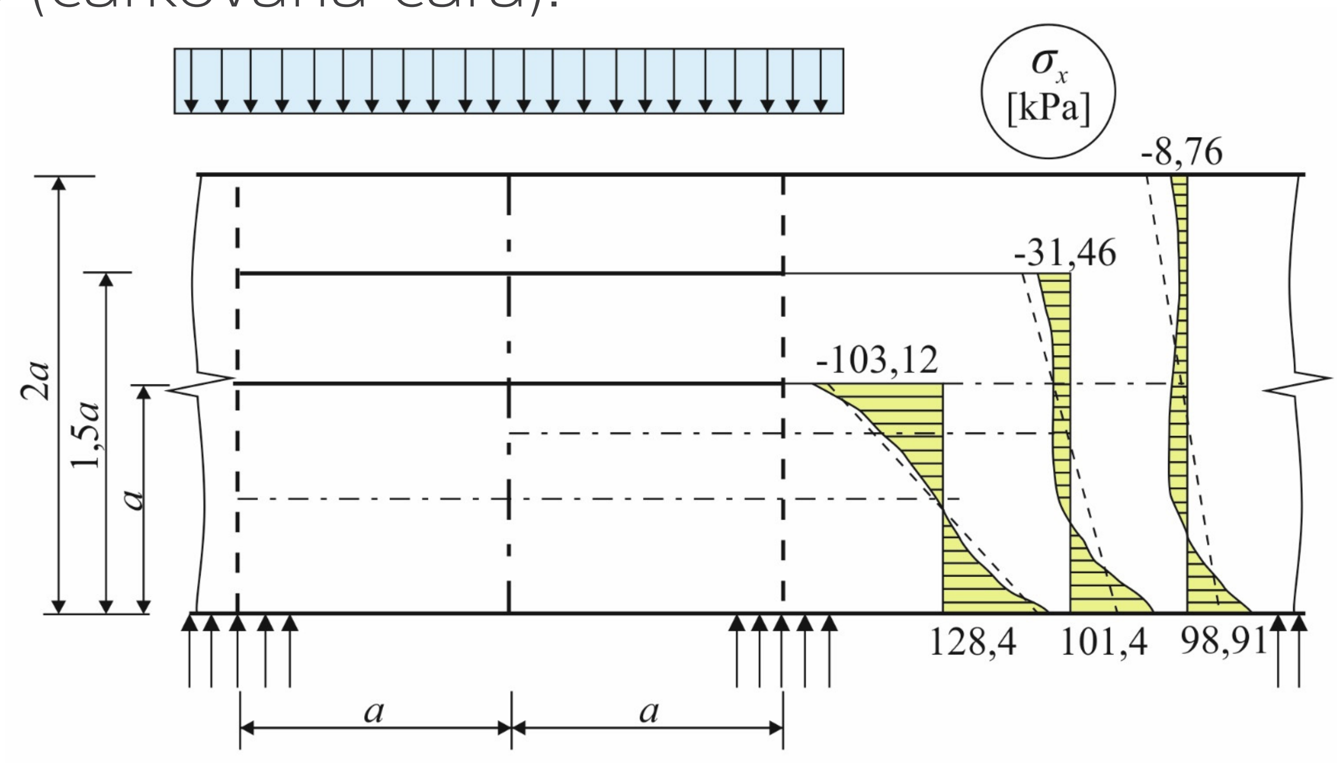
V rovnici nevystupuje žádná materiálová konstanta, což je podkladem pro experimentální analyzování stěn na modelech.

Nízký a vysoký stěnový nosník



Vliv výšky stěny na její napjatost

Na obr. jsou porovnány výsledky řešení stěny pro různé poměry délky a výšky stěny. Jsou zde také výsledky výpočtu pro nosníky předpokládající platnost Bernouli-Navierovy hypotézy o zachování rovinnosti průřezu nosníku (čárkovaná čára).



Řešení pro $a = 3$ m, $t = 1$, $q = 100$ kN/m

Nosné stěny, metody řešení

Metody pro řešení stěn:

- **Inverzní metoda**
- **Metoda sítí**
- **Fourierova metoda**

Variační metody:

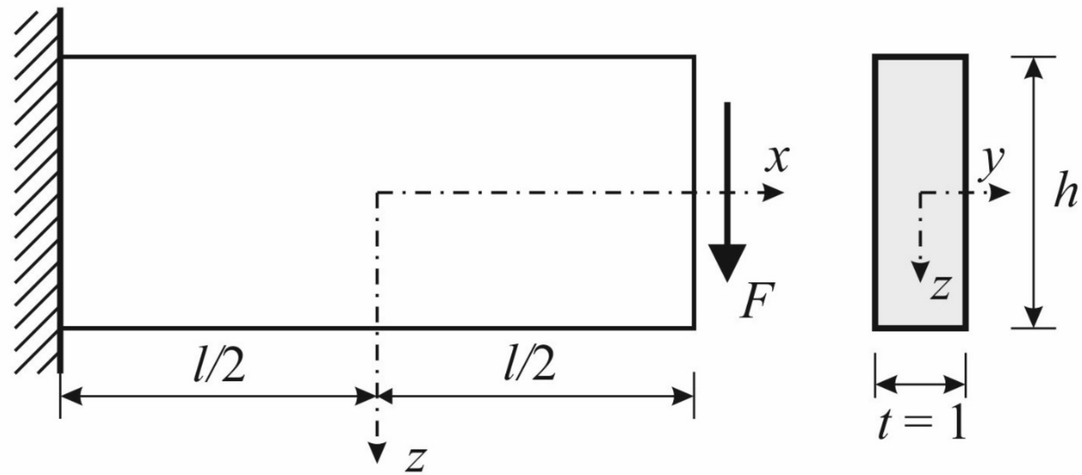
- **Energetické metody**
  (např. **Ritzova metoda**)
- **Metoda konečných prvků**

Existují i další metody.

Všechny tyto metody jsou přibližné s výjimkou inverzní metody, jejíž použití je velmi omezené.

Nosné stěny, řešení inverzní metodou

Zadání: Řešte stěnu podepřenou jako konzolu a zatíženou bodovou silou



Airyho funkci napětí zvolte ve tvaru:

$$\Phi = axz + bz^3 + cxz^3$$

Φ musí vyhovovat stěnové rovnici:

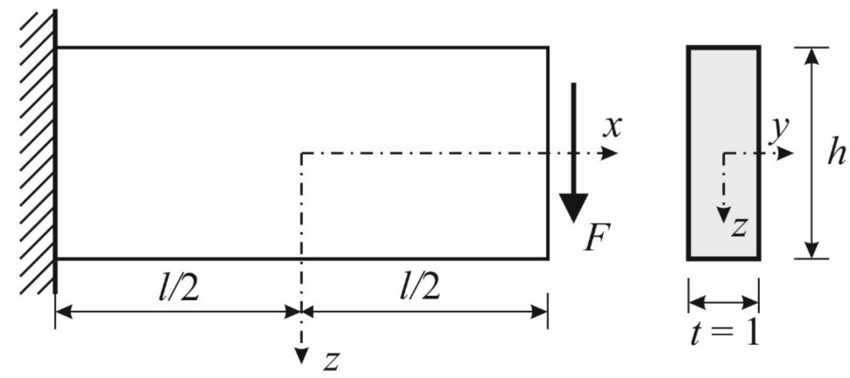
$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} = 0$$

což je splněno:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial z^2} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} = 0$$

Nosné stěny, řešení inverzní metodou, okrajové podmínky

Složky napětí pro funkci:



$$\Phi = axz + bz^3 + cxz^3$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 6bz + 6cxz \qquad \sigma_z = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}(az + cz^3) = -a - 3cz^2$$

Okrajové podmínky:

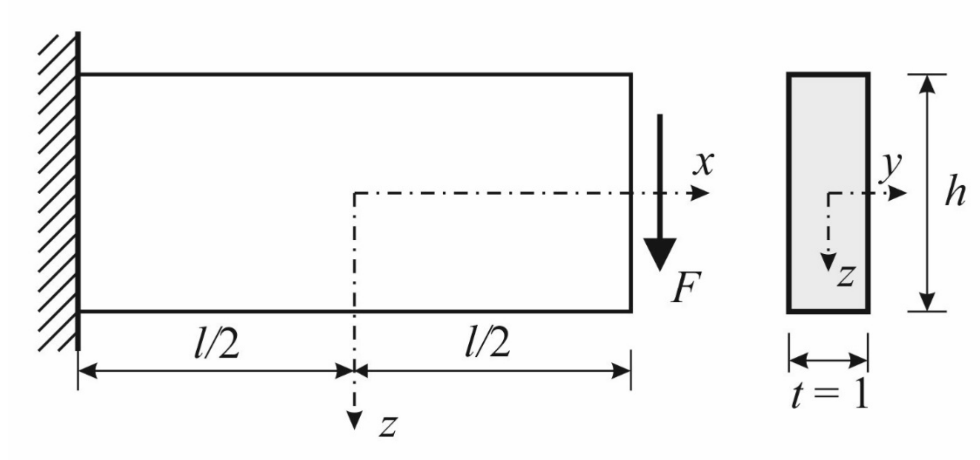
1. pro $z = \pm\frac{h}{2}$ $\quad \boxed{\tau_{xz} = -a - 3cz^2 = 0} \rightarrow \boxed{a = -3cz^2 = -\frac{3ch^2}{4}}$

2. pro $x = \frac{l}{2}$ $\quad \boxed{\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \mathrm{d}z = F}$

$$\boxed{\int_{-h/2}^{h/2} \left(-a\text{-}3cz^2\right)\mathrm{d}z = \left[-az - cz^3\right]_{-h/2}^{h/2} = -ah - c\frac{h^3}{4} = \frac{3ch^2}{4}h - c\frac{h^3}{4} = \frac{1}{2}ch^3 = F} \rightarrow \boxed{c = \frac{2F}{h^3}}$$

3. pro $x = \frac{l}{2}$ $\quad \boxed{\sigma_x = 6bz + 6cxz = 0} \rightarrow \boxed{b = -\frac{cl}{2} = -\frac{Fl}{h^3}} \rightarrow \boxed{a = -\frac{3F}{2h}}$

Nosné stěny, řešení inverzní metodou, funkce napětí



$$a = -\frac{3F}{2h} \qquad b = -\frac{Fl}{h^3} \qquad c = \frac{2F}{h^3}$$

Po vložení hodnot do Airyho funkce:

$$\Phi = axz + bz^3 + cxz^3 = F\left(-\frac{3}{2h}xz - \frac{l}{h^3}z^3 + \frac{2}{h^3}xz^3\right)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{12F}{h^3}z\left(-\frac{l}{2}+x\right) = \frac{F(-l/2+x)}{h^3/12}z = \frac{M_y(x)}{I_y}z \qquad \sigma_z = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} = \frac{3}{2}\frac{F}{h}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right) = \frac{V_z\cdot\bar{S}_y(z)}{I_y} \qquad \tau_{xz}(z=0) = \frac{3}{2}\frac{F}{h} \qquad \tau_{xz}\left(z=\pm\frac{h}{2}\right) = 0$$

Tyto vztahy odvozeny v PP - výpočet normálových a smykových napětí (Grashofův vzorec) pro obdélníkový průřez a jednotkovou šířku konzoly.

Inverzní metoda řešení

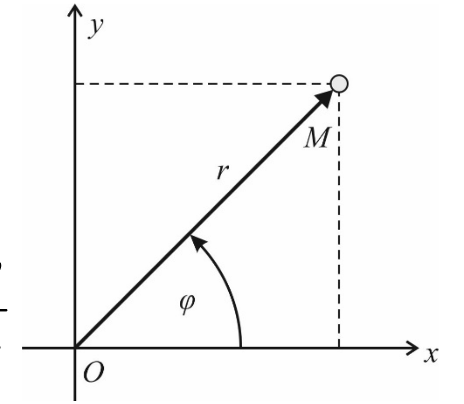
Podstatou inverzní metody řešení nosných stěn je:

- analýza zadané biharmonické (Airyho) funkce napětí (zjištění, zda-li zadaná funkce je skutečně biharmonická, tj. že splňuje stěnovou rovnici),
- hledání odpovídajících okrajových podmínek (silových, deformačních případně smíšených),
- analýza stavu napětí v dané stěně.

Řešení inverzní metodou vychází z předem známého tvaru Airyho funkce napětí, ke které se hledá odpovídající nosná stěna s příslušnými okrajovými podmínkami – z této skutečnosti vychází i název **inverzní metoda**.

Rovinný problém v polárních souřadnicích

V polárních souřadnicích se používají proměnné r a φ. Vztah mezi nimi a souřadnicemi x, y vyplývá z obr.:



$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad y = r \cdot \sin\varphi \qquad x^2 + y^2 = r^2 \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

Fyzikální rovnice v polárních souřadnicích lze získat z rovnic pro rovinnou napjatost nebo pro rovinnou deformaci přepsáním indexů:

Rovinná napjatost:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \mu\sigma_\varphi\right)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}\left(\sigma_\varphi - \mu\sigma_r\right)$$

Rovinná deformace:

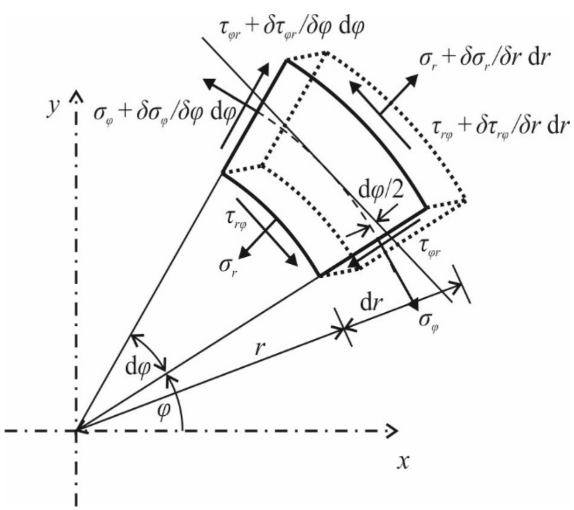
$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\left(1-\mu^2\right)\sigma_r - \mu(1+\mu)\sigma_\varphi\right]$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}\left[\left(1-\mu^2\right)\sigma_\varphi - \mu(1+\mu)\sigma_r\right]$$

$$\gamma_{r\varphi} = \gamma_{\varphi r} = \tau_{r\varphi}\frac{1}{G} = \tau_{r\varphi}\frac{2(1+\mu)}{E}$$

Podmínky rovnováhy v polárních souřadnicích

Plošný element má jednotkovou tloušťku.
Podmínky rovnováhy lze sestavit ve směru průvodiče r a kolmo na něj, tj. ve směru φ



$$\sum F_r = 0: \quad -\sigma_\varphi \mathrm{d}r + \left(\sigma_\varphi + \frac{\sigma_\varphi}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r - \tau_{r\varphi}\cdot r\cdot \mathrm{d}\varphi + \left(\tau_{r\varphi} + \frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi\right)\cdot (r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\varphi + \tau_{\varphi r} r \frac{\mathrm{d}\varphi}{2} + \left(\tau_{\varphi r} + \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} = 0$$

$$\sum F_\varphi = 0: \quad -\sigma_\varphi \mathrm{d}r + \left(\sigma_\varphi + \frac{\sigma_\varphi}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r - \tau_{r\varphi}\cdot r\cdot \mathrm{d}\varphi + \left(\tau_{r\varphi} + \frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi\right)\cdot (r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\varphi + \tau_{\varphi r} r \frac{\mathrm{d}\varphi}{2} + \left(\tau_{\varphi r} + \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} = 0$$

Předpokládá se: $\sin\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{2} \qquad \cos\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} = 1$

Po úpravě jsou podmínky rovnováhy:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\varphi r}}{\partial\varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + R = 0 \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{2\tau_{\varphi r}}{r} = 0$$

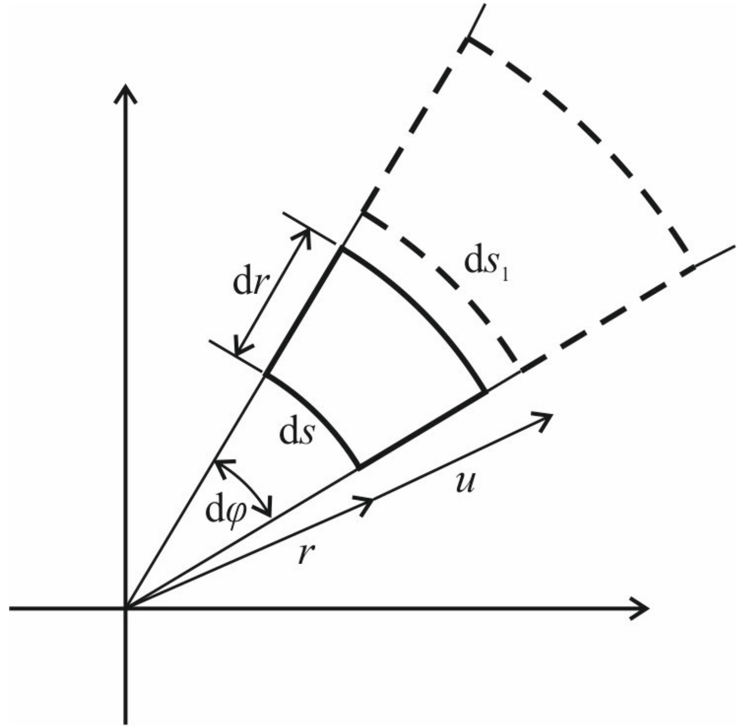
Základní rovnice pružnosti pro rotačně symetrické úlohy

Geometrické rovnice jsou:

$$\varepsilon_r = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\mathrm{d}s_1 - \mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} = \frac{(r+u)\mathrm{d}\varphi - r\mathrm{d}\varphi}{r\mathrm{d}\varphi} = \frac{u}{r}$$

$$\gamma_{\mathrm{r}\varphi} = 0$$



Rovnice rovnováhy se zjednoduší na:

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + R = 0} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0}$$

Stěnová rovnice v polárních souřadnicích

Tuto rovnici lze odvodit ze stěnové rovnice v pravoúhlých souřadnicích x,y transformací do polárních souřadnic φ, r.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)=0$$

Složky napětí jsou:

$$\sigma_r=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad \sigma_\varphi=\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \qquad \tau_{r\varphi}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \phi}{r\partial \varphi}\right)$$

Odvození je uvedeno např. v publikaci:
Dický, Mistríková, Sumec: *Pružnosť a plasticita v stavebníctve 2*. STU v Bratislavě, ISBN 80-227-2515-3, 2006.

Saint-Venantův princip lokálního účinku

Jean Claude Saint-Venant
(1797-1886)

Saint-Venantův princip lokálního účinku:

V bodech tuhého tělesa, dostatečně vzdálených od působišť vnějších sil, napětí velmi málo závisí na detailním způsobu realizace těchto zatížení.

Rovnovážná soustava ovlivní stav napjatosti jen v blízkém okolí, ve vzdálenějších bodech má zanedbatelné účinky.

Usnadňuje řešení napjatosti těles.