VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta stavební

Pružnost a plasticita II

3. ročník bakalářského studia

prof. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.
Katedra stavební mechaniky

Základní rovnice teorie pružnosti

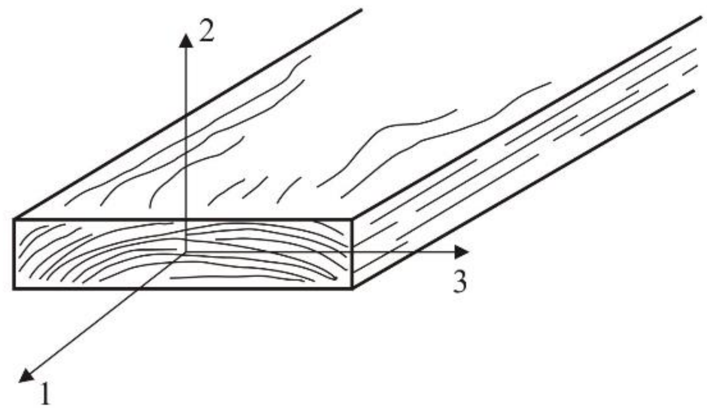
Základní předpoklady teorie pružnosti

Látka tělesa je

- **homogenní**, může být přitom

  a) **izotropní**

  b) **anizotropní** (**ortotropie**)



- **dokonale pružná** a to

  a) **lineárně**

  b) **nelineárně** (zatím se nebude uvažovat)

- deformace tělesa působením vnějších vlivů jsou malé – geometricky lineární teorie pružnosti
- počáteční napjatost je nulová, nepůsobí-li na těleso vnější síly.

Lineární pružnost

Podmínky rovnováhy lze formulovat na:

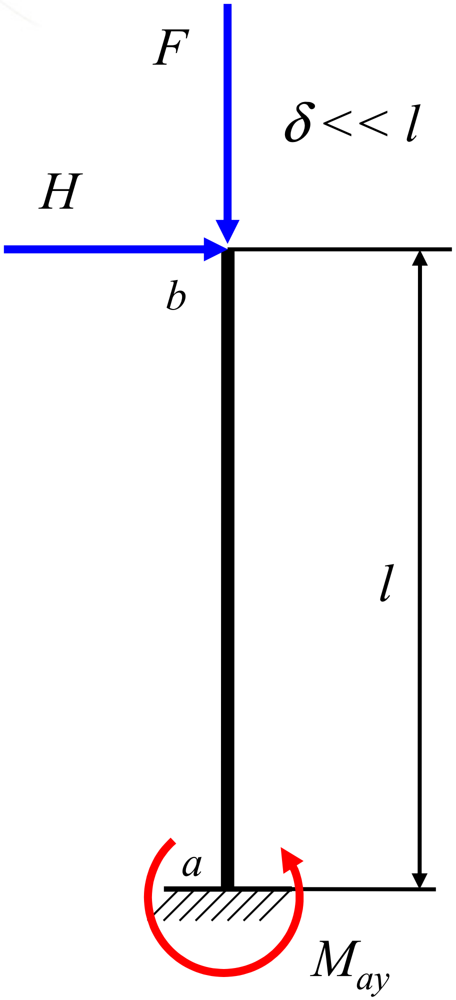
- nedeformovaném tělese - teorie prvního řádu,
  (důsledek předpokladu malých deformací - deformace tělesa mají zanedbatelný vliv na podmínky rovnováhy)
- deformovaném tělese - teorie druhého řádu.
  (nejedná se již o lineární pružnost)

Teorie malých deformací:

Změny tvaru konstrukce jsou vzhledem k rozměrům konstrukce malé. Možnost řady zjednodušení při matematickém řešení úloh pružnosti, které obvykle vedou k lineárním závislostem.

Předpoklad malých deformací a lineární závislosti mezi napětím a přetvořením (geometrická a fyzikální linearita) umožňuje využít **princip superpozice**.

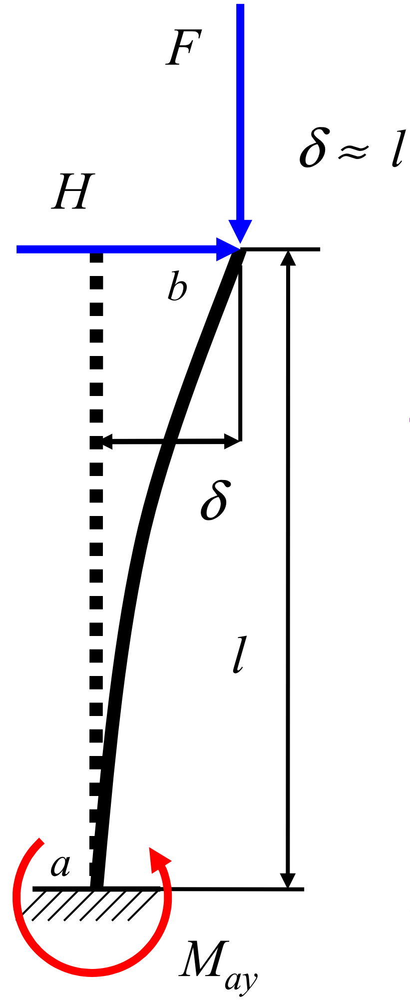
Teorie malých deformací



Teorie malých deformací

$M_{ay} = H.l$

Výpočet podle teorie I. řádu



Teorie konečných (velkých) deformací

$M_{ay} = H.l + F.\delta$

Výpočet podle teorie II. řádu geometrická nelinearita

Princip superpozice

- Princip superpozice (skládání účinků) je založen na linearitě všech matematických závislostí.
- Výsledný stav, tj. výsledné zatížení a reakce, vnitřní síly, napětí, přemístění (deformace) je **součtem** účinků jednotlivých zatěžovacích stavů. Nezáleží na pořadí v jakém jednotlivé zatěžovací stavy na těleso či konstrukci působí.

Klasifikace nosných konstrukcí

Prut je trojrozměrné těleso, jehož jeden rozměr (délka) je řádově větší než zbývající dva rozměry.

Mohou mít proměnlivou délku, průřez, přímé i zakřivené.

Plošný konstrukční prvek je trojrozměrné těleso, jehož dva rozměry jsou řádově větší než zbývající rozměr (tloušťka). Patří mezi ně desky, stěny s rovinnou střednicovou plochou a skořepiny se zakřivenou střednicovou plochou.

Těleso je konstrukční prvek, jehož všechny tři rozměry jsou řádově srovnatelné.

Vnější síly a vnitřní síly

Vnější síly:

- objemové (působí v elementech objemu):

  vlastní tíha, odstředivé síly atd.

- povrchové (působí jako zatížení na ploše):

  spojité zatížení na ploše a na čáře (přímce) a bodové síly (singulární síly).

Objemové a plošné zatížení je reálné, bodové zatížení a zatížení na čáře je abstraktní, idealizuje zatížení plošné.

Vnitřní síly vznikají vlivem vnějšího zatížení, jsou jím indukovány.

Vnitřní síly

- Prutové prvky:

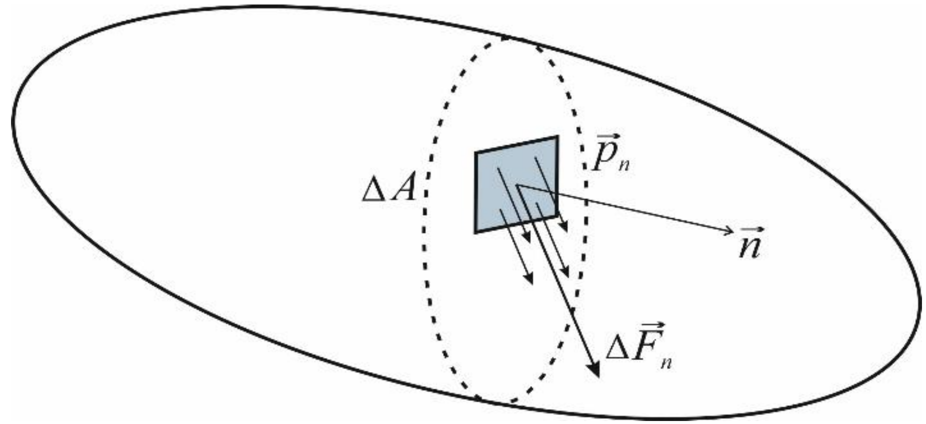
o složkách vnitřních sil se předpokládá, že působí v těžišti. Jsou výslednicí elementárních sil (napětí) působících v určitém řezu a směru.

(Tato problematika byla náplní předmětu Pružnost a plasticita, kde se při jejich určení vycházelo ze znalostí složek vnitřních sil)

- Plošné prvky a tělesa:

je nutno zabývat se rozložením elementárních sil.

Napětí



Poměr elementární síly a velikosti plošky je poměrné napětí na této plošce:

$$\vec{p}_n = \frac{\Delta\vec{F}_n}{\Delta A}$$

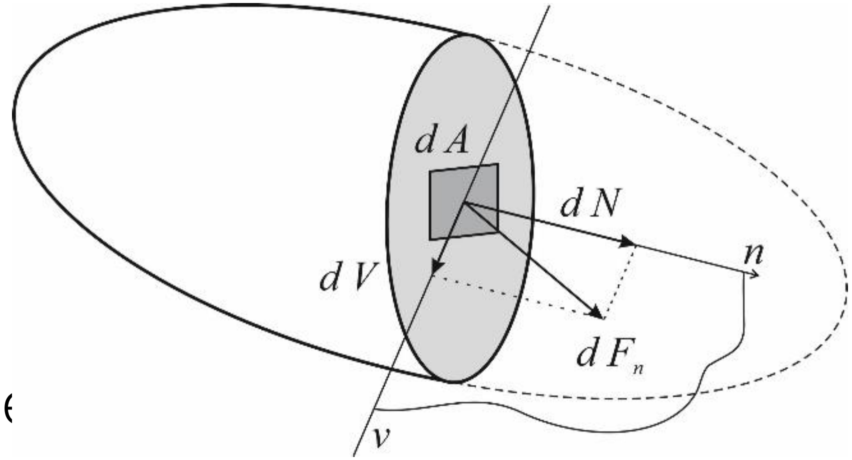
Směr napětí je shodný se směrem síly působící na danou plošku

Zmenšuje-li se velikost plošky ΔA k nule, lze získat napětí p_n v bodě:

$$\vec{p}_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\vec{F}_n}{\Delta A_n} = \frac{d\vec{F}_n}{dA_n}$$

Základní jednotkou napětí je **Pa** [N/m^2]

Napětí, pokračování



Při rozložení síly $\mathrm{d}F_n$ do směru normály n a stopy v plošky $\mathrm{d}A$ je

$$\sigma_n = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}A} \qquad \tau_{nv} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}A}$$

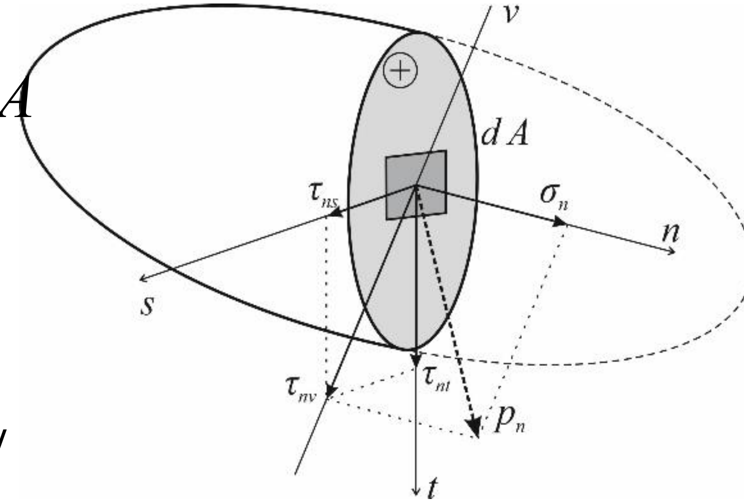
Platí přitom: $$p_n = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_{nv}^2}$$

σ_n je normálové napětí, působí ve směru normály n

τ_{nv} je smykové napětí, působí v rovině plošky $\mathrm{d}A$ ve směru stopy v síly $\mathrm{d}F_n$

Napětí, pokračování

Smykové napětí τ_{nv} lze na plošce dA rozložit do směrů os t a s :

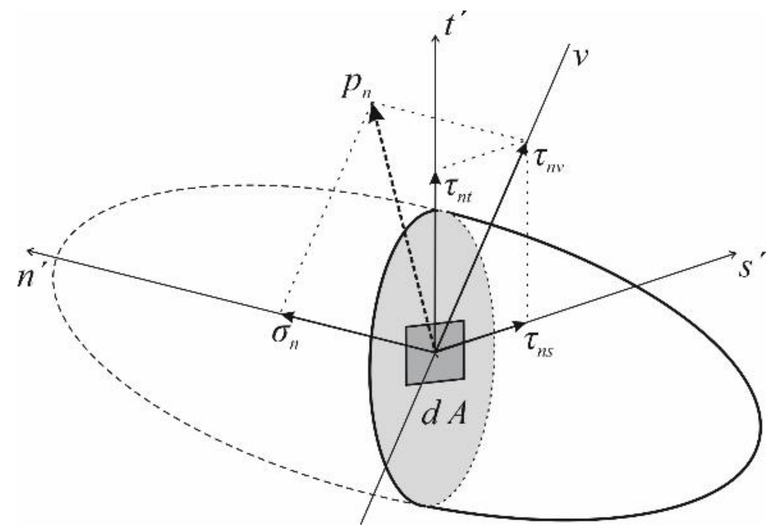


Opět platí: $$\tau_{nv} = \sqrt{\tau_{ns}^2 + \tau_{nt}^2}$$

Bodem tělesa lze proložit libovolný počet řezů.

Každé plošce odpovídá jiný vektor napětí p_n .

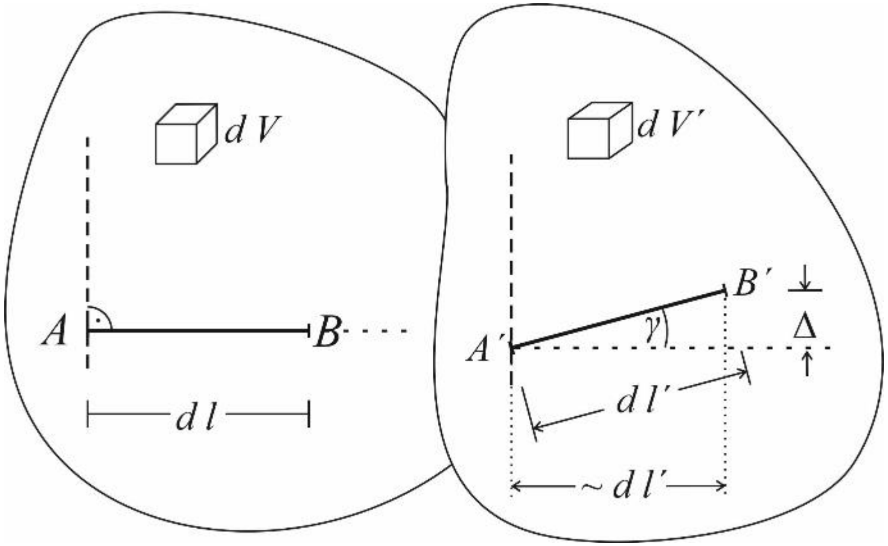
Množina vektorů napětí p_n , odpovídající všem orientovaným ploškám v daném bodě, charakterizuje napěťový stav v tomto bodě.



Pojem deformace

Hledisko fyzikální:

deformace pružné a nepružné



Hledisko geometrické:

posunutí a pootočení

Změna délky:

$$\Delta \mathrm{d}l = \mathrm{d}l' - \mathrm{d}l$$

Poměrná délková změna:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathrm{d}l}{\mathrm{d}l}$$

Změna úhlů, pootočení:

$$\frac{\Delta}{\mathrm{d}l + \Delta \mathrm{d}l} \cong \frac{\Delta}{\mathrm{d}l} \cong \tan\gamma \cong \gamma$$

Deformace, pokračování

Změna objemu: $$\Delta \mathrm{d}V = \mathrm{d}V' - \mathrm{d}V$$

Poměrná objemová změna: $$\omega = \frac{\Delta \mathrm{d}V}{\mathrm{d}V}$$

Původní objem: $$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$$

Změněný objem:
$$\mathrm{d}V' = (\mathrm{d}x + \Delta \mathrm{d}x) \cdot (\mathrm{d}y + \Delta \mathrm{d}y) \cdot (\mathrm{d}z + \Delta \mathrm{d}z)$$
$$\mathrm{d}V' = (1 + \varepsilon_x) \cdot (1 + \varepsilon_y) \cdot (1 + \varepsilon_z) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$$

Poměrná objemová změna:

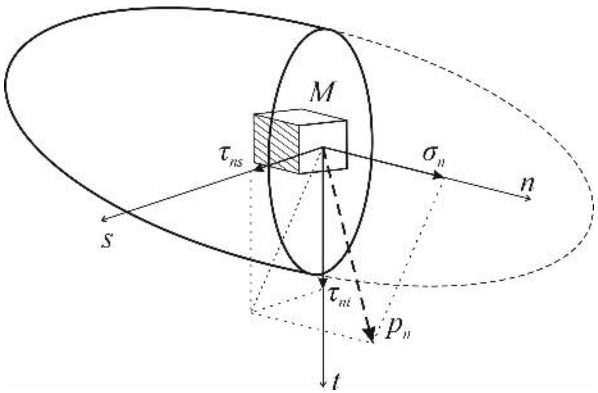
$$\omega = \frac{\mathrm{d}V' - \mathrm{d}V}{\mathrm{d}V} = \frac{(1 + \varepsilon_x) \cdot (1 + \varepsilon_y) \cdot (1 + \varepsilon_z) \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z}{\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z}$$

$$\omega = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$$

Pro malé deformace jsou poměrné deformace řádově menší k jedničcce a lze psát:

$$\omega = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Analýza napjatosti v okolí bodu tělesa



Vektor p_n je vždy vázán na orientovanou plošku určenou normálou n. Má tři složky: σ_n, τ_{ns}, τ_{nt}

Vektorový zápis p_n :

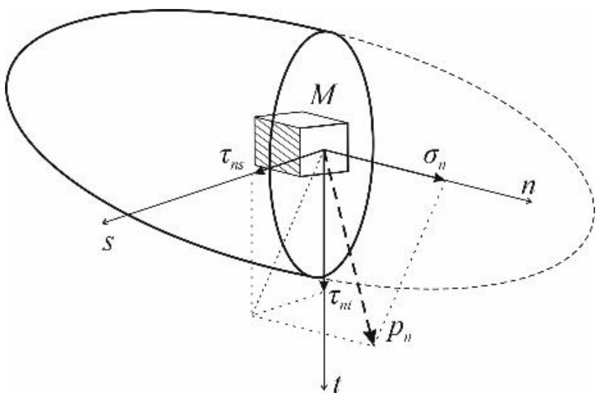
$$\vec{p}_n = \sigma_n \cdot \vec{e}_1 + \tau_{ns} \cdot \vec{e}_2 + \tau_{nt} \cdot \vec{e}_3$$

e_1, e_2, e_3 jsou jednotkové vektory ve směrech n, s, t

Pro určení napětí v daném bodě M v libovolné plošce je nutné znát tři složky napětí ve třech vzájemně kolmých ploškách např. s normálami n, s, t.

Složek napětí v bodě je tedy 9.

Analýza napjatosti v okolí bodu tělesa, pokračování



Zápis 9 složek napětí v maticovém tvaru se nazývá **tenzor napětí**:

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}$$

Označování indexů:

U normálových napětí se zpravidla užívá jeden index, má směr normály k příslušné plošce a současně směr napětí.

U smykových napětí má **první index** směr normály k příslušné plošce, **druhý index** směr smykového napětí.

Analýza napjatosti v okolí bodu tělesa, vzájemnost smykových napětí

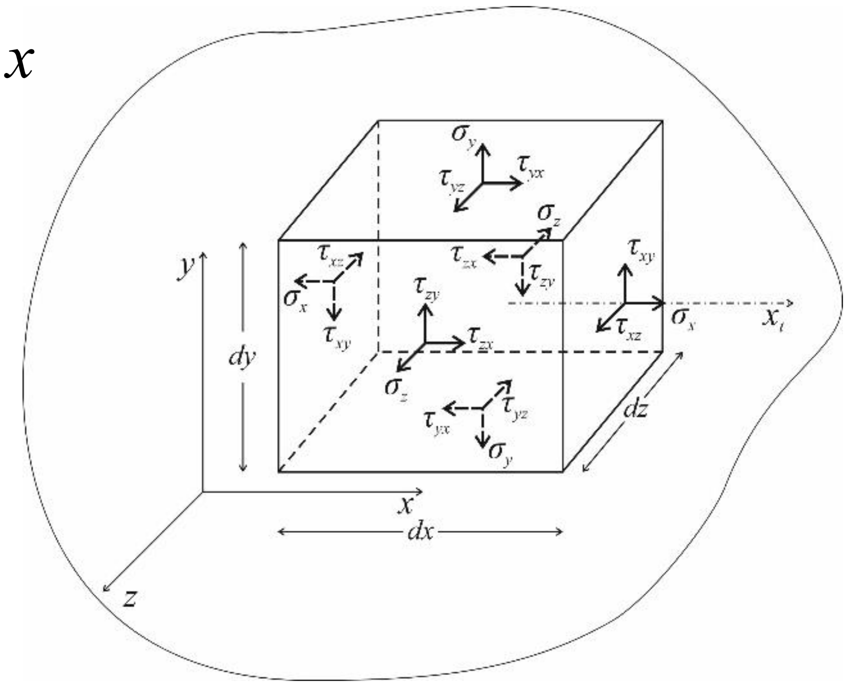
Z momentové podmínky k ose x procházející těžištěm elementu vyplývá:

$$M_{xt} = 0 \Rightarrow$$

$$2\left(\tau_{yz} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z\right)\frac{\mathrm{d}y}{2} - 2\left(\tau_{zy} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y\right)\frac{\mathrm{d}z}{2} = 0$$

po úpravě $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

obdobně $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$

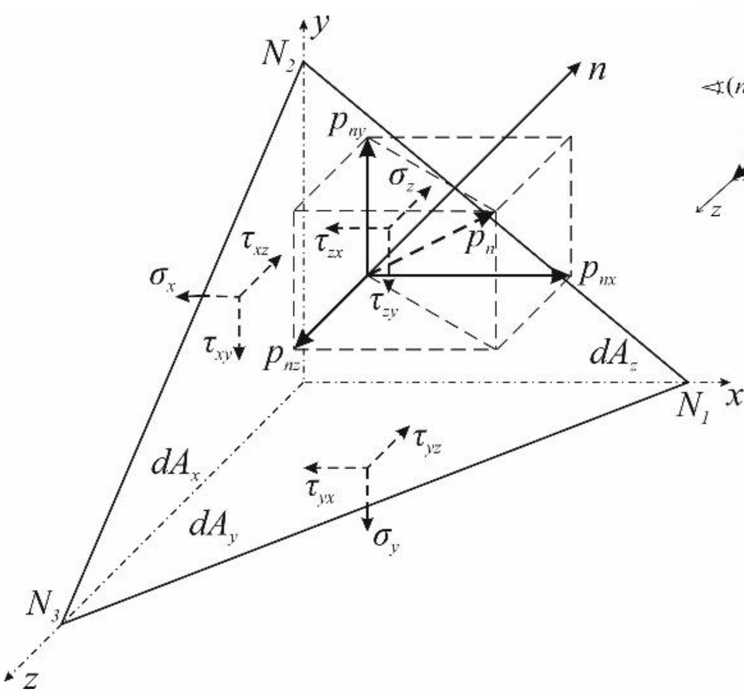


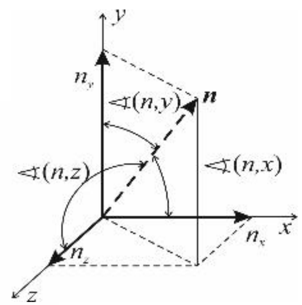
Vzájemnost smykových napětí protínajících se v jednom bodě na ortogonálních ploškách - vzhledem k těmto rovnostem lze napětí v bodě charakterizovat také vektorem napětí:

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx},\}^T$$

Transformace složek tenzoru napětí

Při znalosti napětí v bodě, tj. ve třech vzájemně ortogonálních ploškách $\mathrm{d}A_x$, $\mathrm{d}A_y$, $\mathrm{d}A_z$ lze určit napětí na libovolně orientované plošce $\mathrm{d}A$. Orientace této plošky je dána normálou $\boldsymbol{n}$. Transformační vztahy vyplývají z rovnováhy sil působících na čtyřstěnu $ON_1N_2N_3$.

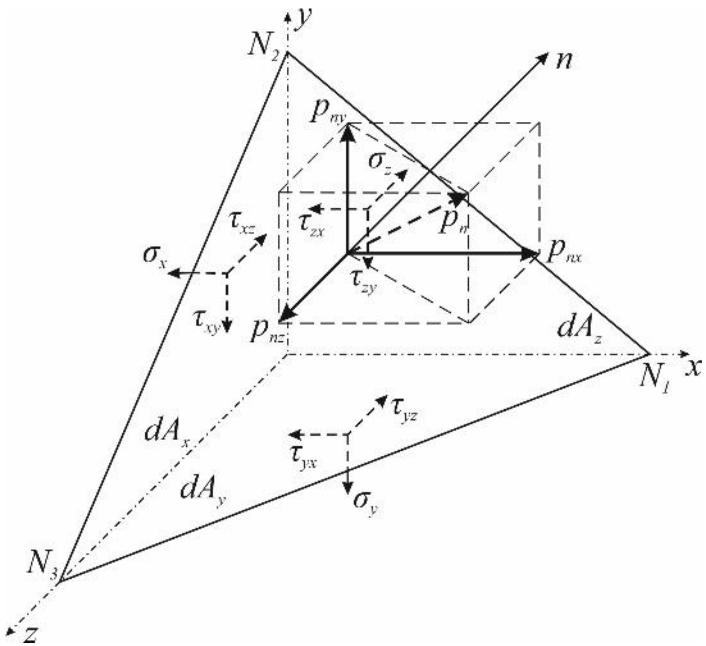


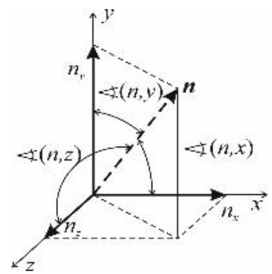


$$n_x = \cos(n,x)\,\mathrm{d}A_x = \mathrm{d}A \cdot n_x$$
$$n_y = \cos(n,y)\,\mathrm{d}A_y = \mathrm{d}A \cdot n_y$$
$$n_z = \cos(n,z)\,\mathrm{d}A_z = \mathrm{d}A \cdot n_z$$
$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

n_x, n_y, n_z jsou směrové kosiny úhlů, které svírá normála $\boldsymbol{n}$ s osami x, y, z.

Transformace složek tenzoru napětí





Podmínka rovnováhy sil na čtyřstěnu:

$$\sum F_x = 0 : p_{nx}\mathrm{d}A - \sigma_x \mathrm{d}A \cdot n_x - \tau_{yx}\mathrm{d}A \cdot n_y - \tau_{zx}\mathrm{d}A \cdot n_z = 0$$

$$\sum F_y = 0 : p_{ny}\mathrm{d}A - \tau_{xy} \mathrm{d}A \cdot n_x - \sigma_{y}\mathrm{d}A \cdot n_y - \tau_{zy}\mathrm{d}A \cdot n_z = 0$$

$$\sum F_z = 0 : p_{nz}\mathrm{d}A - \tau_{xz} \mathrm{d}A \cdot n_x - \tau_{yz}\mathrm{d}A \cdot n_y - \sigma_{z}\mathrm{d}A \cdot n_z = 0$$

Po úpravě:

$$p_{nx} = \sigma_x \cdot n_x + \tau_{yx} \cdot n_y + \tau_{zx} \cdot n_z$$

$$p_{ny} = \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{zy} \cdot n_z$$

$$p_{nz} = \tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z$$

Platí: $p_n = \sqrt{p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2}$

V maticovém tvaru lze zapsat: $\{p_n\} = [\sigma]^T \{n\}$ $\quad n = \{n_x, n_y, n_z\}^T$

$[\sigma]^T$ je transponovaná matice tenzoru napětí

Transformace složek tenzoru napětí, rozpis maticového zápisu

Platí-li:

$$p_{nx} = \sigma_x \cdot n_x + \tau_{yx} \cdot n_y + \tau_{zx} \cdot n_z$$
$$p_{ny} = \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{zy} \cdot n_z$$
$$p_{nz} = \tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z$$

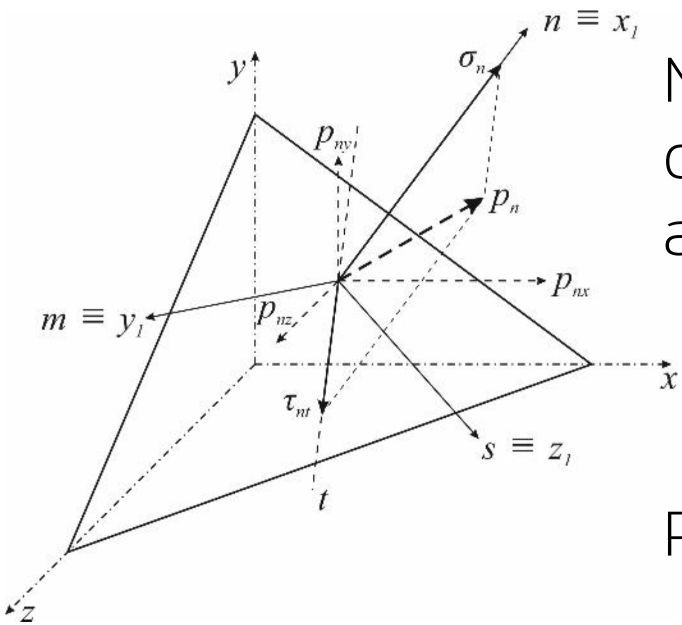
lze také zapsat:

$$\begin{Bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \Rightarrow \{p_n\} = [\sigma]^T \{n\}$$

kde

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad n = \{n_x, n_y, n_z\}^T$$

Transformace složek tenzoru napětí, pokračování



Normálová složka $\boldsymbol{\sigma}_n$ vektoru p_n je dána součtem průmětů složek p_{nx}, p_{ny} a p_{nz} do směru normály $\boldsymbol{n}$

$$\sigma_n = p_{nx} \cdot n_x + p_{ny} \cdot n_y + p_{nz} \cdot n_z$$

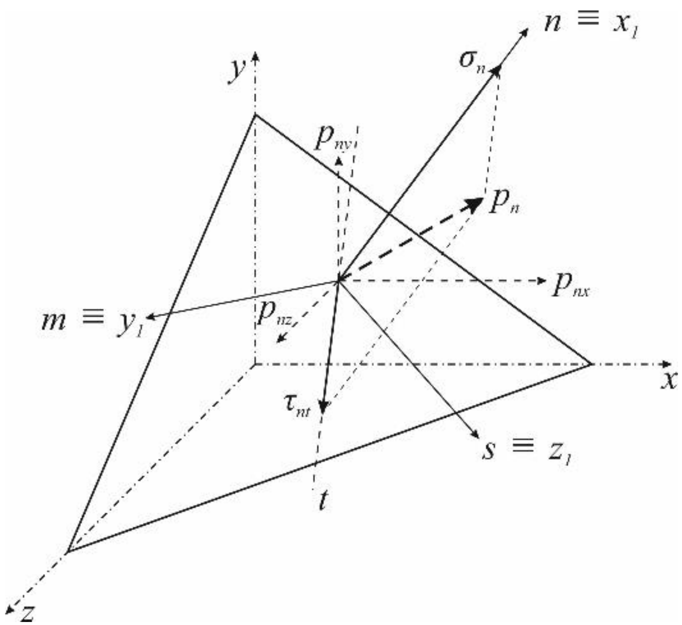
Po dosazení za p_{nx}, p_{ny} a p_{nz} a úpravě:

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot n_x^2 + \sigma_y \cdot n_y^2 + \sigma_z \cdot n_z^2 + 2\left(\tau_{xy} \cdot n_x \cdot n_y + \tau_{yz} \cdot n_y \cdot n_z + \tau_{xz} \cdot n_z \cdot n_x\right)$$

$$\tau_{nt} = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2}$$

Směr výsledného smykového napětí τ_{nt} je dán přímkou t, která je průsečnicí roviny plošky $\mathrm{d}A$ s rovinou danou normálou n a vektorem p_n.

Transformace složek tenzoru napětí, pokračování



Na obr. je osa x_1 pootočeného souřadného systému x_1, y_1, z_1 totožná s normálou $\boldsymbol{n}$. Složky smykového napětí $\tau_{nt}=\tau_{x_1 t}$, do směru $m=y_1$ a do směru $\sigma=z_1$ jsou:

$$\tau_{nm} \equiv \tau_{x_1 y_1} = p_{nx} \cdot m_x + p_{ny} \cdot m_y + p_{nz} \cdot m_z$$

$$\tau_{ns} \equiv \tau_{x_1 z_1} = p_{nx} \cdot s_x + p_{ny} \cdot s_y + p_{nz} \cdot s_z$$

kde $\{m\}=\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \cos(m,x) \\ \cos(m,y) \\ \cos(m,z) \end{Bmatrix}$ $\{s\}=\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \cos(s,x) \\ \cos(s,y) \\ \cos(s,z) \end{Bmatrix}$

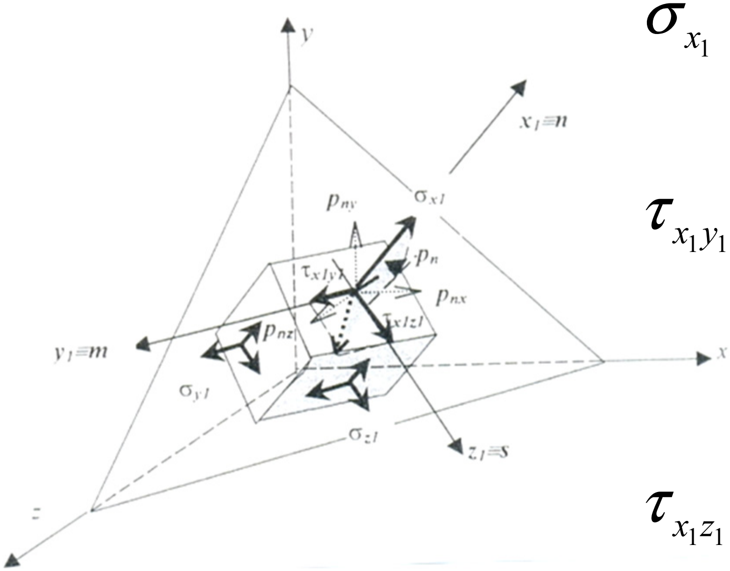
Po dosazení za p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} je:

$$\tau_{nm} = \sigma_x \cdot n_x \cdot m_x + \sigma_y \cdot n_y \cdot m_y + \sigma_z \cdot n_z \cdot m_z + \tau_{xy}(n_x \cdot m_y + m_x \cdot n_y) + \tau_{yz}(n_y \cdot m_z + m_y \cdot n_z) + \tau_{zy}(n_z \cdot m_x + m_z \cdot n_x)$$

$$\tau_{ns} = \sigma_x \cdot n_x \cdot s_x + \sigma_y \cdot n_y \cdot s_y + \sigma_z \cdot n_z \cdot s_z + \tau_{xy}(n_x \cdot s_y + s_x \cdot n_y) + \tau_{yz}(n_y \cdot s_z + s_y \cdot n_z) + \tau_{zy}(n_z \cdot s_x + s_z \cdot n_x)$$

Transformace složek tenzoru napětí

Níže uvedené rovnice umožňují získat tři složky tenzoru napětí na plošce s normálou $n = x_1$ v souřadnicovém systému x_1, y_1, z_1.



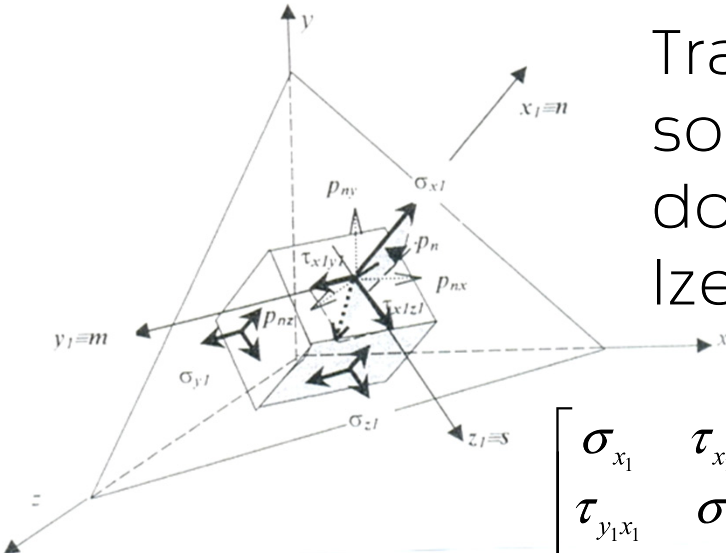
$$\sigma_{x_1} \equiv \sigma_n = \sigma_x \cdot n_x^2 + \sigma_y \cdot n_y^2 + \sigma_z \cdot n_z^2 + 2\left(\tau_{xy} \cdot n_x \cdot n_y + \tau_{yz} \cdot n_y \cdot n_z + \tau_{zx} \cdot n_z \cdot n_x\right)$$

$$\tau_{x_1 y_1} \equiv \tau_{nm} = \sigma_x \cdot n_x \cdot m_x + \sigma_y \cdot n_y \cdot m_y + \sigma_z \cdot n_z \cdot m_z + \tau_{xy}\left(n_x \cdot m_y + m_x \cdot n_y\right) + \tau_{yz}\left(n_y \cdot m_z + m_y \cdot n_z\right) + \tau_{zy}\left(n_z \cdot m_x + m_z \cdot n_x\right)$$

$$\tau_{x_1 z_1} \equiv \tau_{ns} = \sigma_x \cdot n_x \cdot s_x + \sigma_y \cdot n_y \cdot s_y + \sigma_z \cdot n_z \cdot s_z + \tau_{xy}\left(n_x \cdot s_y + s_x \cdot n_y\right) + \tau_{yz}\left(n_y \cdot s_z + s_y \cdot n_z\right) + \tau_{zy}\left(n_z \cdot s_x + s_z \cdot n_x\right)$$

Obdobně lze získat složky tenzoru napětí na ploškách s normálami $y_1 = m$, $z_1 = s$.

Transformace složek tenzoru napětí, maticový zápis



Transformaci devíti složek napětí ze souřadnicového systému x, y, z do souřadnicového systému x_1, y_1, z_1, lze maticově zapsat:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x_1} & \tau_{x_1y_1} & \tau_{x_1z_1} \\ \tau_{y_1x_1} & \sigma_{y_1} & \tau_{y_1z_1} \\ \tau_{z_1x_1} & \tau_{z_1y_1} & \sigma_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ m_x & m_y & m_z \\ s_x & s_y & s_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & m_x & s_x \\ n_y & m_y & s_y \\ n_z & m_z & s_z \end{bmatrix}$$

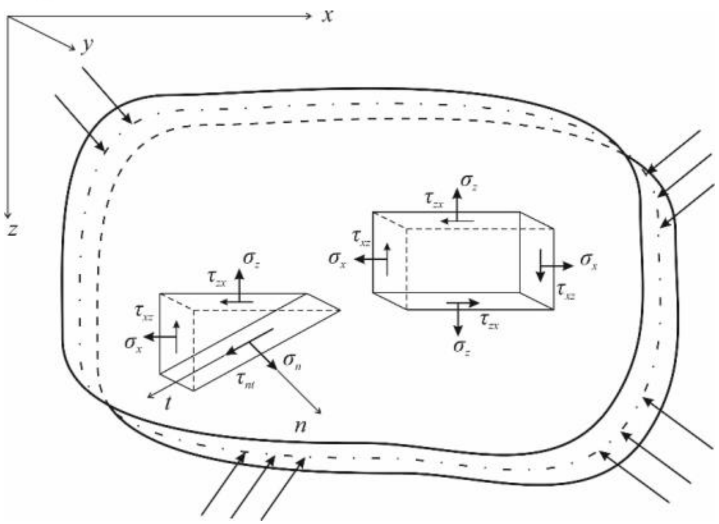
Maticový zápis lze zkráceně symbolicky zapsat:

$$[\sigma_1] = [L] \cdot [\sigma] \cdot [L]^T$$

$[\sigma_1]$ a $[\sigma]$ jsou matice tenzoru napětí v souřadném systému x_1, y_1, z_1 a x, y, z

$[L]$ je matice pootočení

Rovinný stav napjatosti tělesa



Je-li v libovolném bodě tělesa ploška, ve které jsou složky napětí nulové, pak lze hovořit o **rovinné napjatosti**.

Nenulové složky napětí jsou pak s touto ploškou rovnoběžné.
Na obr. jsou nulová napětí v rovině s normálou y, tj. v rovině xz.

Složky napětí $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{zx}$ jsou s touto rovinou rovnoběžné.

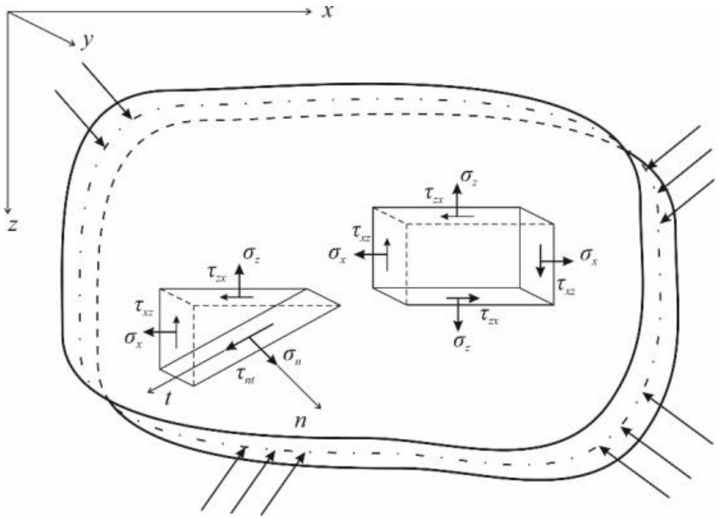
Maticově lze tenzor napjatosti vyjádřit:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Napětí při rovinné napjatosti lze vyjádřit také vektorově:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}\}^T$$

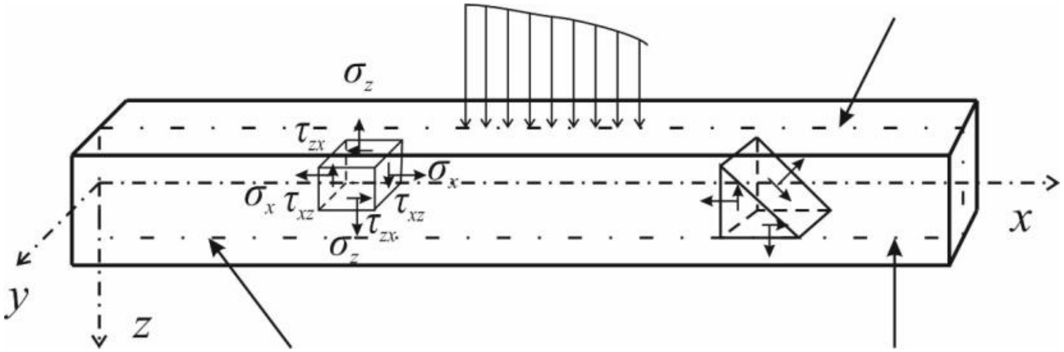
Rovinný stav napjatosti tělesa



Tenzor napjatosti:

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & 0 & \tau_{xz}\\ 0 & 0 & 0\\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z\end{bmatrix}$$

S rovinnou napjatosti se lze setkat např. u nosných stěn nebo u nosníků.

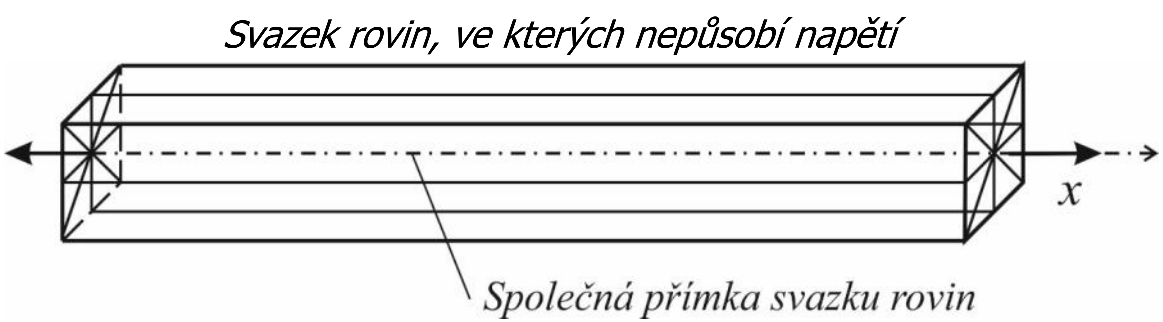


Přímkový stav napjatosti tělesa

Pokud lze libovolným bodem tělesa proložit svazek rovin, ve kterých jsou složky napětí nulové, pak se hovoří o **přímkové napjatosti**.

Jediná nenulové složka napětí je v přímce, ve které se svazek rovin protíná. Je-li touto přímkou osa x, lze maticově tenzor napjatosti vyjádřit:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



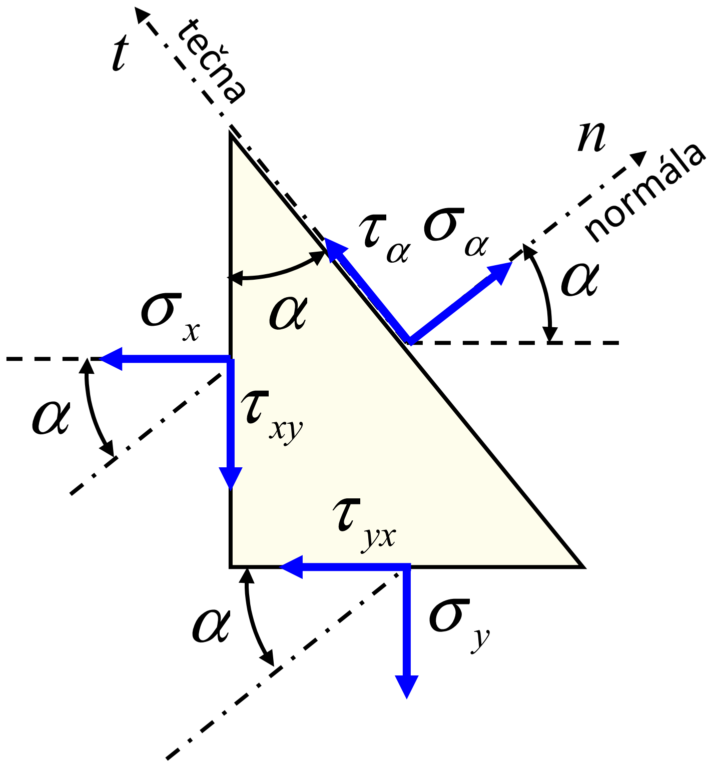
Vektorově lze napsat:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x\}$$

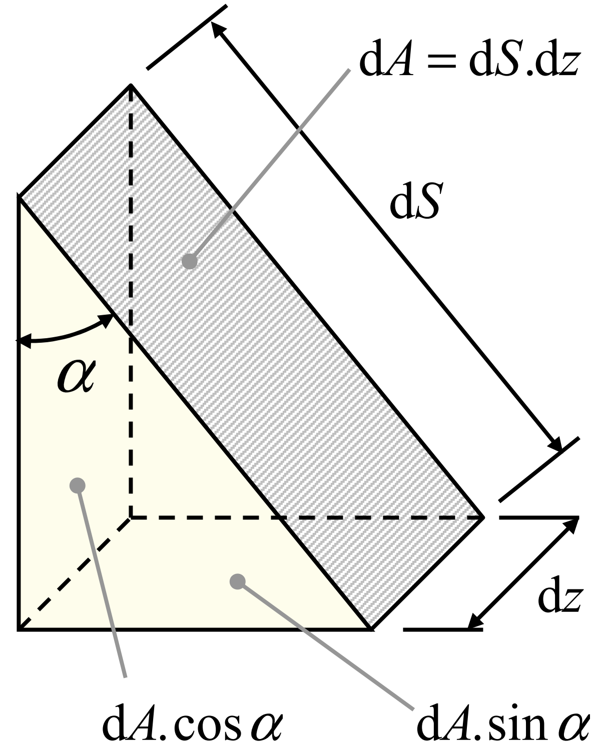
S přímkovou napjatostí se lze setkat např. u lan nebo u táhel.

Stav napjatosti v šikmém řezu

Složky napětí v šikmém řezu



Plochy stěn elementárního kvádru



Podmínky rovnováhy na kvádru: $R_x = 0$ $R_y = 0$

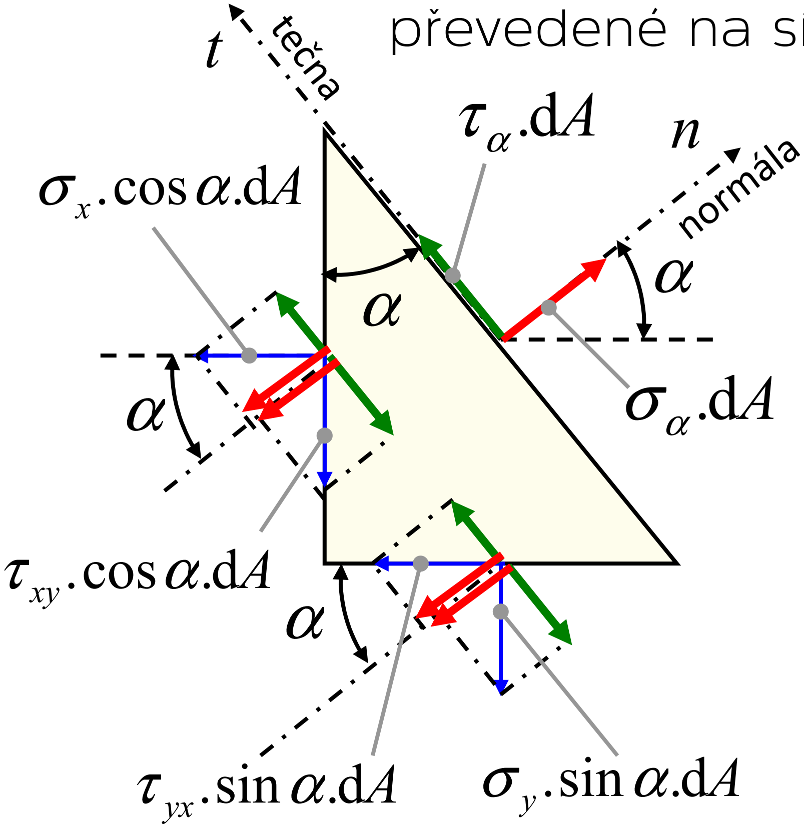
nebo

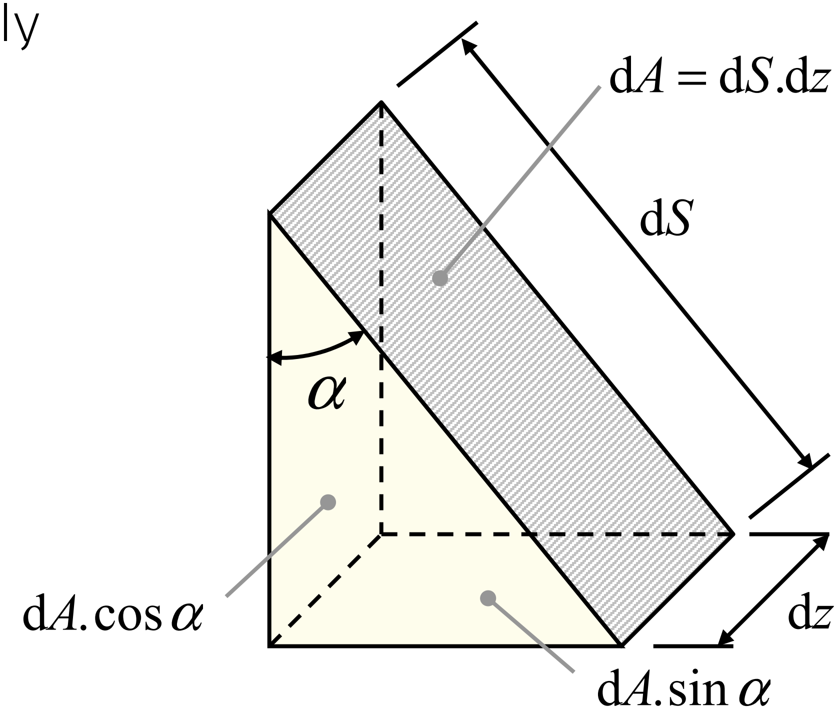
Pokud jsou známy σ_x σ_y $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ $\leftarrow$ $R_n = 0$ $R_t = 0$

Stav napjatosti v šikmém řezu

Složky napětí v šikmém řezu převedené na síly

Plochy stěn elementárního kvádru





$$-2.\tau_{xy}.\cos\alpha.\sin\alpha.\mathrm{d}A = -\tau_{xy}.\sin 2\alpha.\mathrm{d}A$$

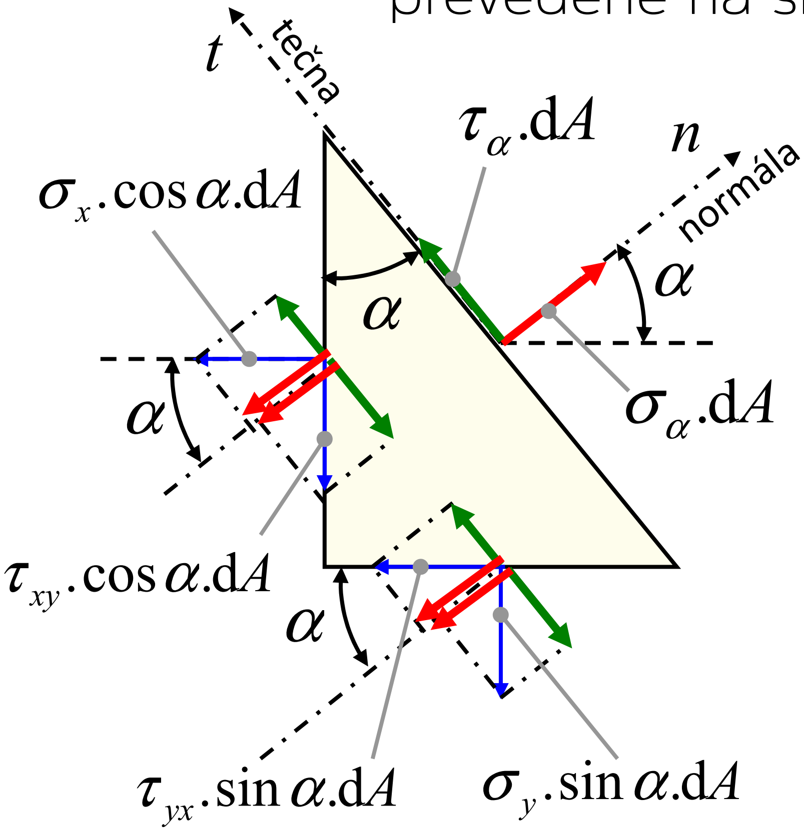
$$R_n = 0$$

$$\sigma_\alpha.\mathrm{d}A - \sigma_x.\cos\alpha.\mathrm{d}A.\cos\alpha -$$
$$-\sigma_y.\sin\alpha.\mathrm{d}A.\sin\alpha - \tau_{xy}.\cos\alpha.\mathrm{d}A.\sin\alpha - \tau_{yx}.\sin\alpha.\mathrm{d}A.\cos\alpha = 0$$

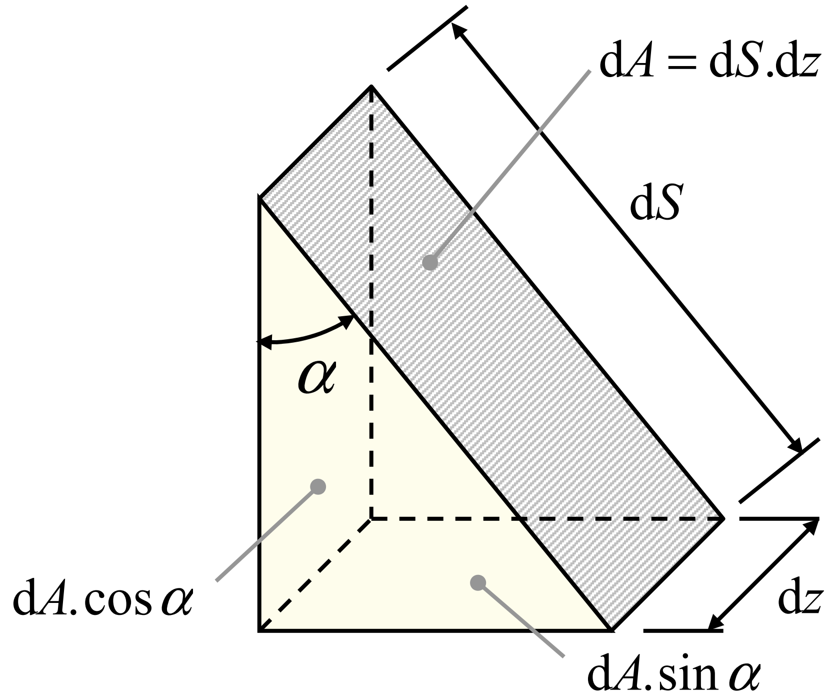
$$\sigma_\alpha.dA - \sigma_x.\cos\alpha.dA.\cos\alpha - \sigma_y.\sin\alpha.dA.\sin\alpha - \tau_{xy}.\sin 2\alpha.dA = 0$$

Stav napjatosti v šikmém řezu

Složky napětí v šikmém řezu převedené na síly



Plochy stěn elementárního kvádru



$$-\tau_{xy}.\cos 2\alpha.\mathrm{d}A$$

$$R_t=0$$

$$\tau_\alpha.\mathrm{d}A+\sigma_x.\cos\alpha.\mathrm{d}A.\sin\alpha-$$
$$-\sigma_y.\sin\alpha.\mathrm{d}A.\cos\alpha-\tau_{xy}.\cos\alpha.\mathrm{d}A.\cos\alpha+\tau_{yx}.\sin\alpha.\mathrm{d}A.\sin\alpha=0$$

$$\tau_\alpha.\mathrm{d}A+\sigma_x.\cos\alpha.\mathrm{d}A.\sin\alpha-\sigma_y.\sin\alpha.\mathrm{d}A.\cos\alpha-\tau_{xy}.\cos 2\alpha.\mathrm{d}A=0$$

Složky napětí v šikmém řezu při rovinné napjatost

$$R_n = 0$$

$$\sigma_\alpha.\mathrm{d}A - \sigma_x.\cos\alpha.\mathrm{d}A.\cos\alpha - \sigma_y.\sin\alpha.\mathrm{d}A.\sin\alpha - \tau_{xy}.\sin 2\alpha.\mathrm{d}A = 0$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_x.\cos^2\alpha + \sigma_y.\sin^2\alpha + \tau_{xy}.\sin 2\alpha$$

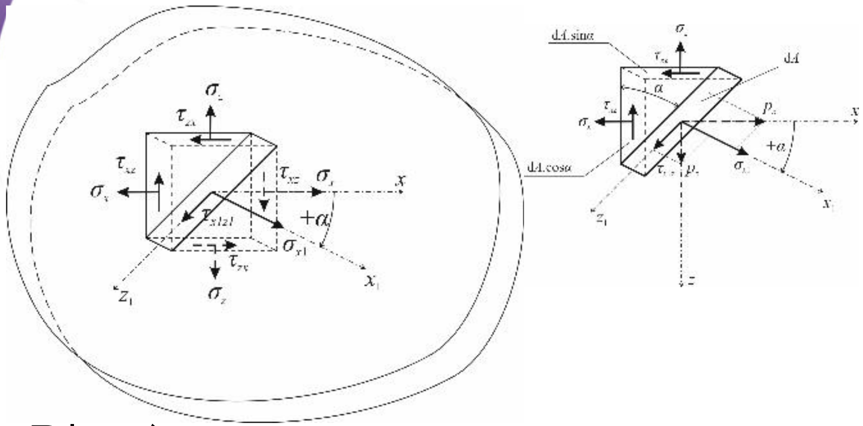
$$R_t = 0$$

$$\tau_\alpha.\mathrm{d}A + \sigma_x.\cos\alpha.\mathrm{d}A.\sin\alpha - \sigma_y.\sin\alpha.\mathrm{d}A.\cos\alpha - \tau_{xy}.\cos 2\alpha.\mathrm{d}A = 0$$

$$\tau_\alpha = -\sigma_x.\cos\alpha.\sin\alpha + \sigma_y.\sin\alpha.\cos\alpha + \tau_{xy}.\cos 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = -\frac{1}{2}.(\sigma_x - \sigma_y).\sin 2\alpha + \tau_{xy}.\cos 2\alpha$$

Transformační vztahy pro rovinný stav napjatosti



Při transformaci je důležité si uvědomit orientaci úhlu α (od osy x k ose x_1 pravotočivě).

Vyjde-li se z rovnice $[\sigma_1]=[L]\cdot[\sigma]\cdot[L]^T$ je nutno vyjádřit matici $[\mathrm{L}]$.

Platí:

$$n_x=\cos(x_1x)=\cos\alpha$$

$$n_y=\cos(x_1y)=\cos 90^\circ=0^\circ$$

$$n_z=\cos(x_1z)=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$$

$$m_x=\cos(yx)=m_z=\cos(yz)=\cos(90^\circ)=0$$

$$s_x=\cos(z_1x)=\cos(270^\circ-\alpha)=\text{-}\sin\alpha$$

$$s_y=\cos(z_1y)=\cos 90^\circ=0$$

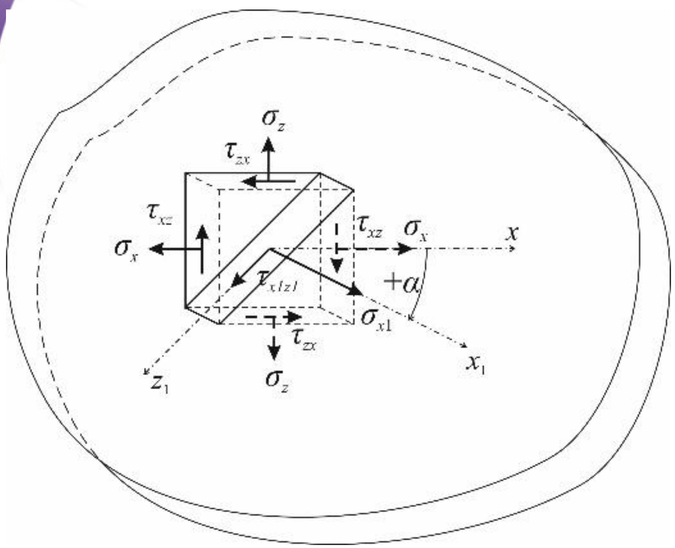
$$s_z=\cos(z_1z)=\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$$

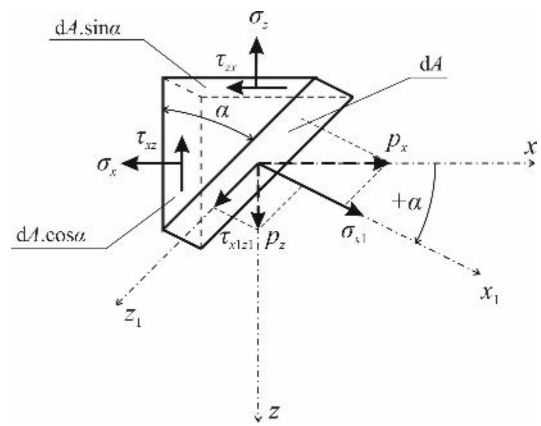
$$m_y=\cos(yy)=\cos 0^\circ=1$$

Po úpravě:

$$[L]=\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ m_x & m_y & m_z \\ s_x & s_y & s_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Transformační vztahy pro rovinný stav napjatosti





$$[\sigma_1] = [L] \cdot [\sigma] \cdot [L]^T$$

$$[L] = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ m_x & m_y & m_z \\ s_x & s_y & s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Pro rovinnou napjatost lze zjednodušit:

$$[\sigma_1] = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1} & \tau_{z_1 x_1} \\ \tau_{x_1 z_1} & \sigma_{z_1} \end{bmatrix} \qquad [L] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Transformační vztahy pro rovinný stav napjatosti

Vyjde-li se z rovnice: $[\sigma_1]=[L]\cdot[\sigma]\cdot[L]^T$

$$[\sigma_1]=\begin{bmatrix}\sigma_{x_1} & \tau_{z_1x_1}\\ \tau_{x_1z_1} & \sigma_{z_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{zx}\\ \tau_{xz} & \sigma_z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{x_1} & \tau_{z_1x_1}\\ \tau_{x_1z_1} & \sigma_{z_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & s\\ -s & c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}(\sigma_x c+\tau_{zx}s) & (-\sigma_x s+\tau_{zx}c)\\ (\tau_{xz}c+\sigma_z s) & (-\tau_{xz}s+\sigma_z c)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{x_1} & \tau_{z_1x_1}\\ \tau_{x_1z_1} & \sigma_{z_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\sigma_x c^2+\tau_{zx}sc+\tau_{xz}sc+\sigma_z s^2) & (-\sigma_x sc+\tau_{zx}c^2-\tau_{xz}s^2+\sigma_z sc)\\ (-\sigma_x sc-\tau_{zx}s^2+\tau_{xz}c^2+\sigma_z s^2) & (\sigma_x s^2-\tau_{zx}sc-\tau_{xz}sc+\sigma_z c^2)\end{bmatrix}$$

kde $s=\sin\alpha$ a $c=\cos\alpha$

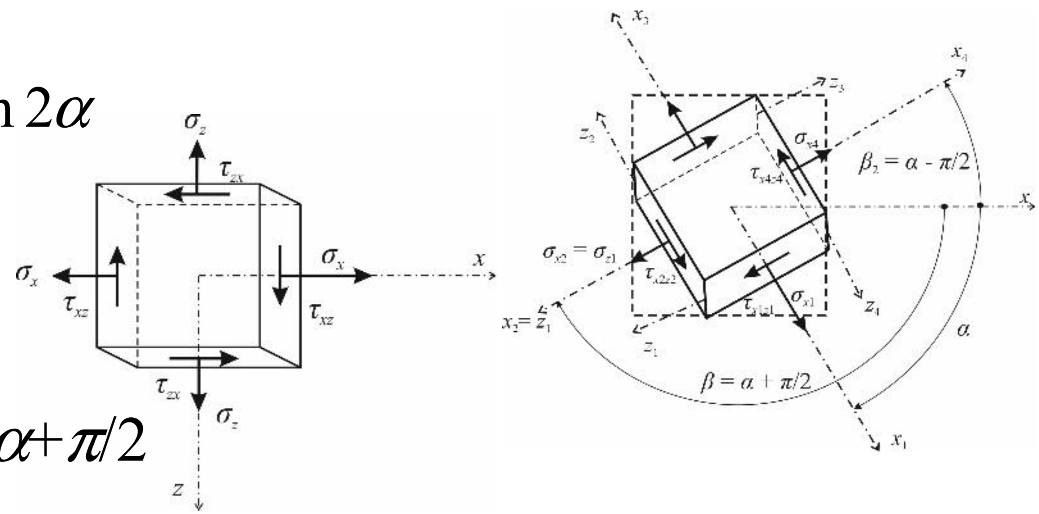
Po úpravě:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x_1} & \tau_{z_1x_1} \\ \tau_{x_1z_1} & \sigma_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\sigma_x c^2 + \tau_{zx} sc + \tau_{xz} sc + \sigma_z s^2\right) & \left(-\sigma_x sc + \tau_{zx} c^2 - \tau_{xz} s^2 + \sigma_z sc\right) \\ \left(-\sigma_x sc - \tau_{zx} s^2 + \tau_{xz} c^2 + \sigma_z sc\right) & \left(\sigma_x s^2 - \tau_{zx} sc - \tau_{xz} sc + \sigma_z c^2\right) \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_z \sin^2\alpha + \tau_{zx} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{x_1z_1} = \tau_{z_1x_1} = \tau_{xz} \cos 2\alpha - \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_{z_1} = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_z \cos^2\alpha - \tau_{xz} \sin 2\alpha$$



σ_{z_1} lze odvodit ze vzorce
pro σ_{x_1} je-li pootočení $\beta = \alpha + \pi/2$

Věta o 1. invariantu tenzoru napětí

Sečtou-li se normálová napětí:

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_z \sin^2\alpha + \tau_{zx} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_{z_1} = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_z \cos^2\alpha - \tau_{xz} \sin 2\alpha$$

pak platí:

$$\sigma_{x_1} + \sigma_{z_1} = \sigma_x + \sigma_z$$

Součet normálových napětí v okolí bodu
na libovolných dvou ortogonálních ploškách je
konstantní.

Hlavní normálová napětí

Je-li znám tenzor nebo vektor napětí v souřadném systému x, y , pak je často nutné určit směry a hodnoty extrémních normálových napětí.

Lze vyjít ze vzorce: $\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_z \sin^2\alpha + \tau_{xz} \sin 2\alpha$

Platí: $$\frac{\mathrm{d}\sigma_{x_1}}{\mathrm{d}\alpha} = 2\sigma_x \cos\alpha(-\sin\alpha) + 2\sigma_z \sin\alpha\cos\alpha + 2\tau_{xz}\cos 2\alpha = 0$$

$$\tau_{x_1 z_1} = \tau_{xz}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)\sin 2\alpha = 0 \qquad \tau_{xz}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)\sin 2\alpha = 0$$

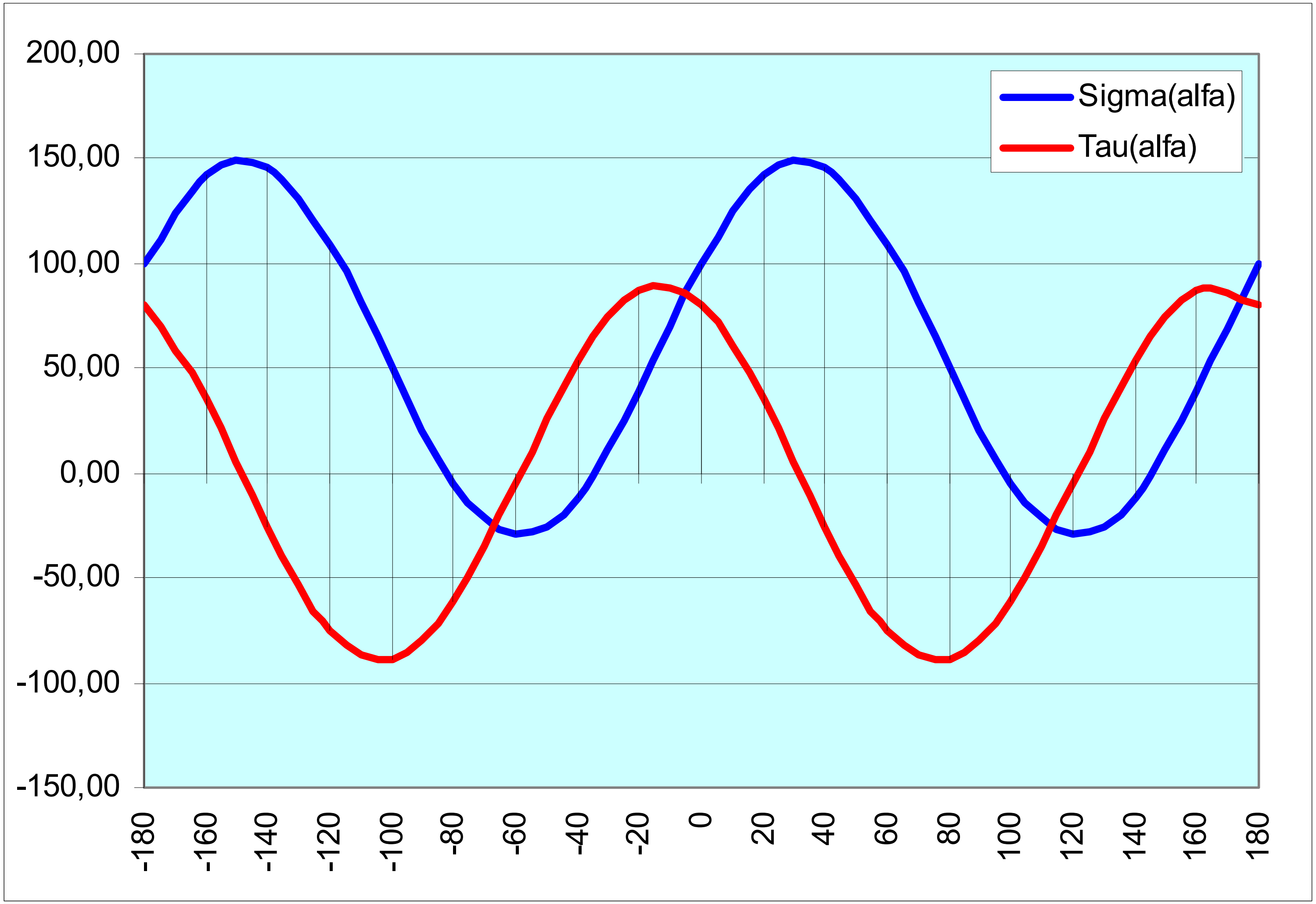
Největší normálové napětí je v rovině, v níž je smykové napětí nulové - **hlavní rovina** s příslušným **hlavním normálovým napětím**.

Úhel potočení α_e roviny xz do hlavní roviny neurčuje jednoznačně směr maximálního a minimálního napětí:

$$\tan 2\alpha_e = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z}$$

Stav napjatosti v šikmém řezu

$\sigma_x = 100\mathrm{MPa}$ $\sigma_y = 20\mathrm{MPa}$ $\tau_{xy} = 80\mathrm{MPa}$ $\alpha = -180^\circ \div 180^\circ$



Příklad: grafy normálových a smykových napětí na šikmém řezu

Hlavní napětí

Mění-li se α, nabývá σ_α i τ_α při určitém úhlu α extrémní hodnotu.

$$\sigma_\alpha = \sigma_x.\cos^2\alpha + \sigma_y.\sin^2\alpha + \tau_{xy}.\sin 2\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_x.2.\cos\alpha.(-\sin\alpha) + \sigma_y.2.\sin\alpha.\cos\alpha + \tau_{xy}.2.\cos 2\alpha = 0$$

$$-(\sigma_x - \sigma_y).\sin 2\alpha + 2.\tau_{xy}.\cos 2\alpha = 0$$

Hlavní roviny

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \tan 2\alpha = \frac{2.\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}.\arctan\left(\frac{2.\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 \pm 90^\circ$$

Velikost hlavních napětí

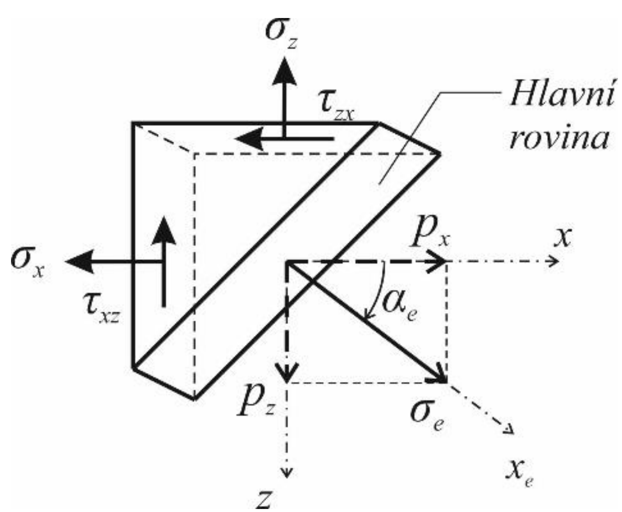
$$\sigma_{1,2} = \sigma_\alpha(\alpha_{1,2}) = \frac{1}{2}.(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}.\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4.\tau_{xy}^2}$$

$$\tau_\alpha(\alpha_{1,2}) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_{\max.\min}(\alpha_{1,2} \pm 45^\circ) = \pm\frac{1}{2}.(\sigma_1 - \sigma_2)$$

Extrémní smyková napětí jsou v rovinách odkloněných o 45° od hlavních rovin

Hlavní normálová napětí



$\boldsymbol{\sigma_e}$ hlavní normálové napětí

Z rovnic rovnováhy ve směru x a z vyplývá:

$$p_x = \sigma_e \cos\alpha_e = \sigma_x \cos\alpha_e + \tau_{zx} \sin\alpha_e$$

$$p_z = \sigma_e \sin\alpha_e = \sigma_z \sin\alpha_e + \tau_{xz} \cos\alpha_e$$

Řešení těchto dvou rovnic vede ke kvadratické rovnici s řešením:

$$\sigma_e = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}$$

Hlavním napětím přiřazujeme zpravidla indexy $\boldsymbol{\sigma_1 > \sigma_2}$

Směry $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_2}$ hlavních napětí $\boldsymbol{\sigma_1}$ a $\boldsymbol{\sigma_2}$ lze jednoznačně určit ze vztahů:

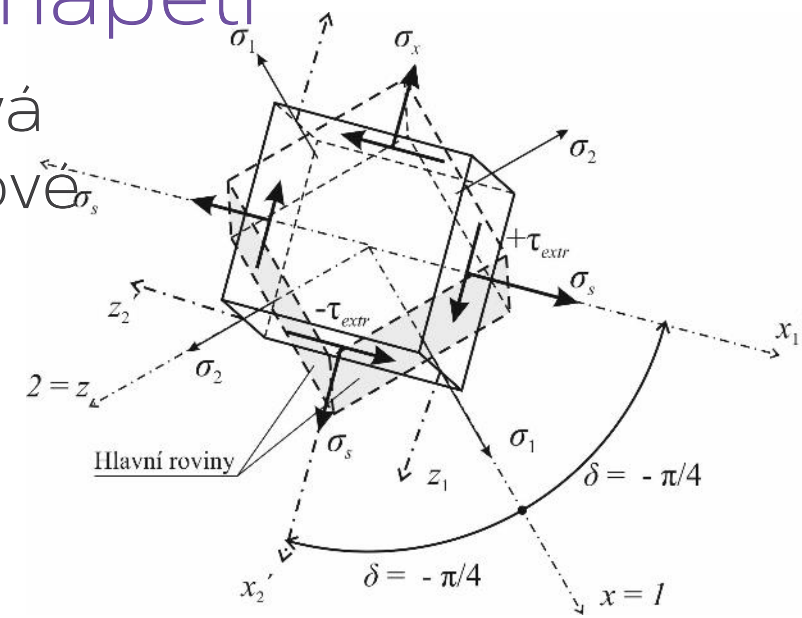
$$\tan\alpha_1 = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_1 - \sigma_z} \qquad \tan\alpha_2 = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_2 - \sigma_z}$$

Maximální smyková napětí

Pokud jsou maximální normálová napětí σ_1, σ_2 známy, lze normálové napětí $\sigma_{x'}$ a smykové napětí $\tau_{x'z'}$ vyjádřit:

$$\sigma_{x'} = \sigma_1 \cos^2 \delta + \sigma_2 \sin^2 \delta$$

$$\tau_{x'z'} = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\delta$$



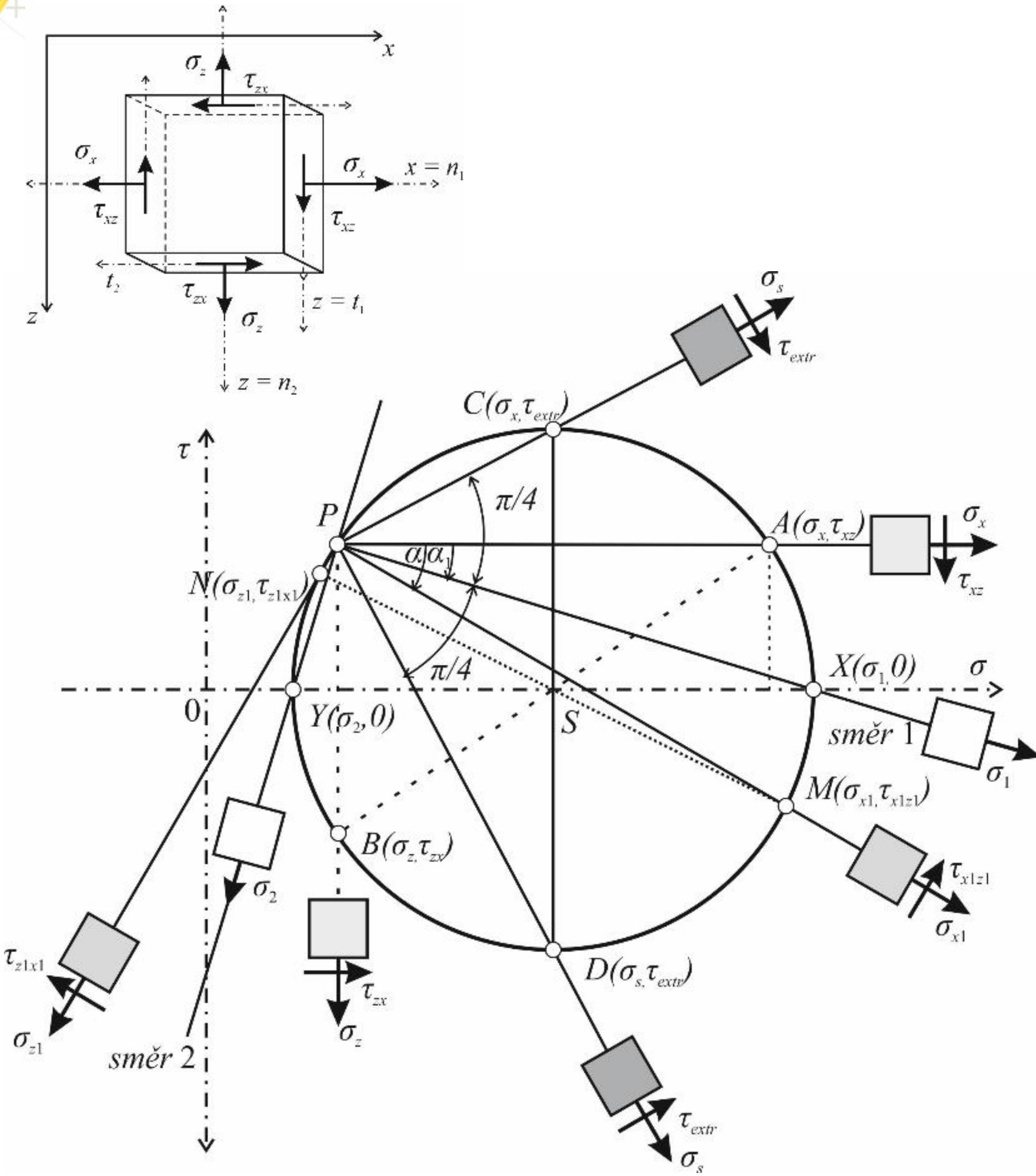
Maximální (extrémní) smyková napětí budou na plochách hlavních smyků při hodnotách δ vyplývajících z rovnice:

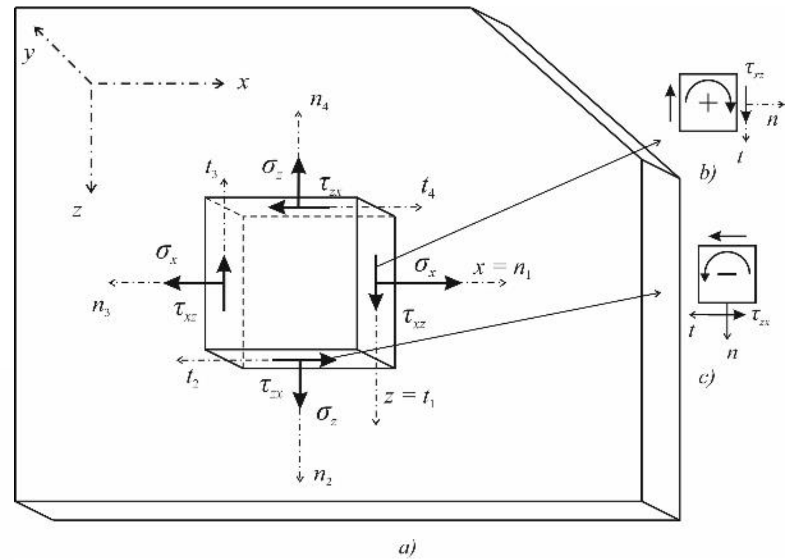
$$\frac{d\tau_{x'z'}}{d\delta} = 0 \;\Rightarrow -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)2\cos 2\delta = 0 \rightarrow \cos 2\delta = 0 \Rightarrow \delta = -\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}$$

Na těchto plochách budou působit maximální smyková napětí τ_{extr} a normálové napětí σ_s:

$$\tau_{extr} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \qquad \sigma_s = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Mohrova kružnice

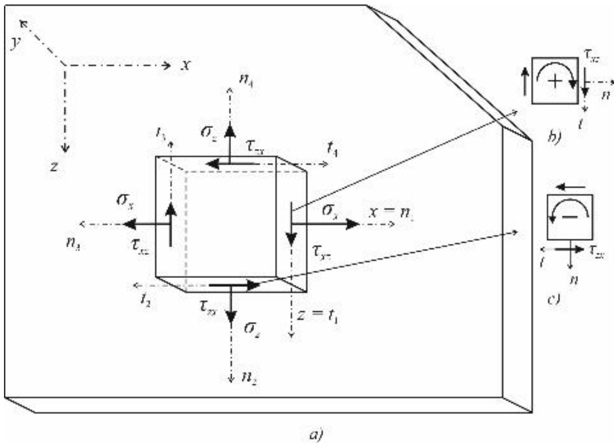




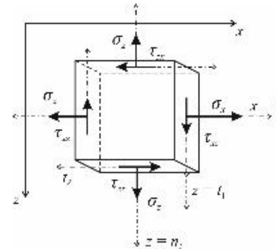
$$\tan \alpha_1 = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_1 - \sigma_z}$$

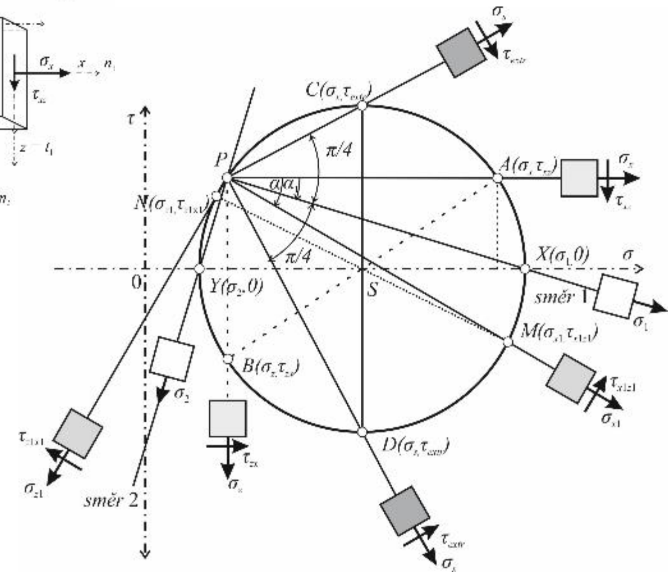
$$\tan \alpha_2 = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_2 - \sigma_z}$$

Mohrova kružnice



Orientace podle směru otáčení



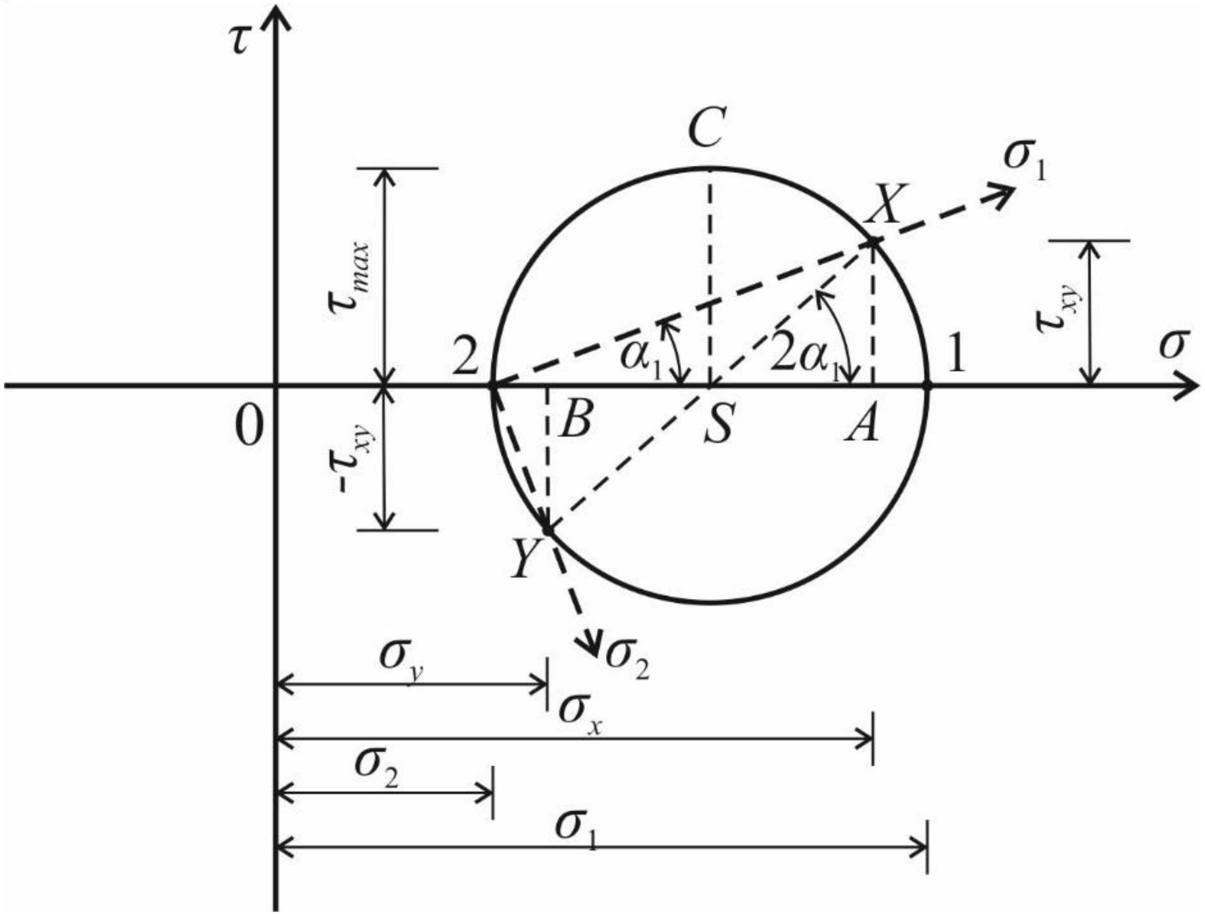


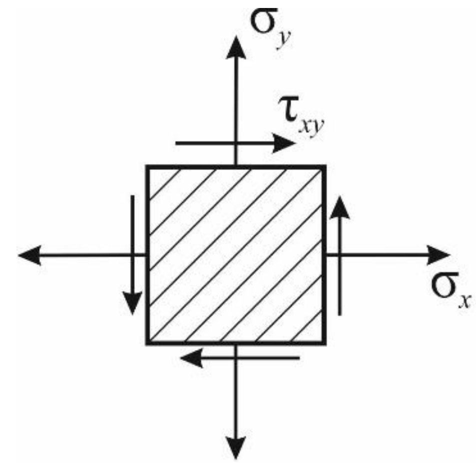
1. Souřadný systém zvolit tak, že osa σ odpovídá x, osa τ pak ose z
2. Vynést bod A (σ_x, τ_{xz}) - τ_{xz} má stejnou orientaci jako t_1, je proto kladné (nahoru).
3. Vynést bod B (σ_z, τ_{zx}) - τ_{zx} má opačnou orientaci jako t_1, je proto záporné (dolů).

   Poznámka: pro orientaci je rozhodující směr otáčení! Pozor na volbu os xz případně xy.
4. Střed kružnice S je průsečík spojnice AB s osou σ, poloměr odpovídá úsečce AS a BS,

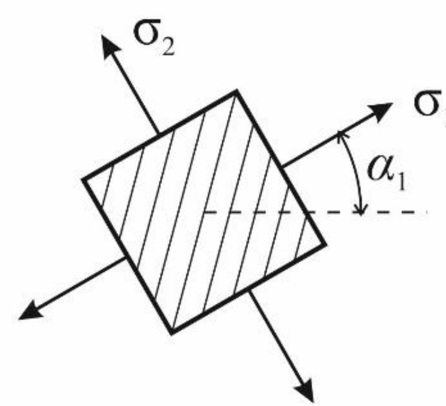
   maximální napětí je v bodě X(σ_1, 0) kružnice, minimální v bodě Y(σ_2, 0) kružnice. Extrémní hodnoty smykových napětí určují body C a D.
5. Pól Mohrovy kružnice P je průsečík kružnice a rovnoběžky s osou x (σ) vedenou bodem A, respektive průsečík kružnice s přímkou rovnoběžnou s osou z (τ) vedenou bodem B.
6. Spojnice PX určuje směr hlavního napětí σ_1, spojnice PY směr hlavního napětí σ_2.
7. V případě určení napětí na plošce s normálou x_1 pootočenou od x o α, nutno vést rovnoběžky s osami x_1 a z_1 z pólu P – body M a N.

Mohrova kružnice pro jinou orientaci os





daná napětí

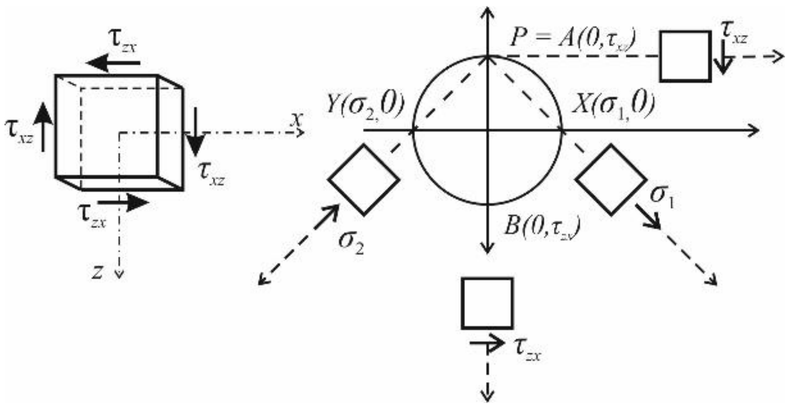


hlavní napětí

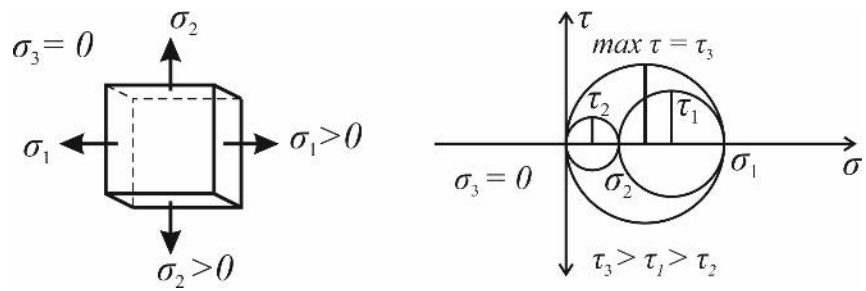
- směr osy x odpovídá σ
- směr osy y odpovídá τ

Speciální případy rovinné napjatosti

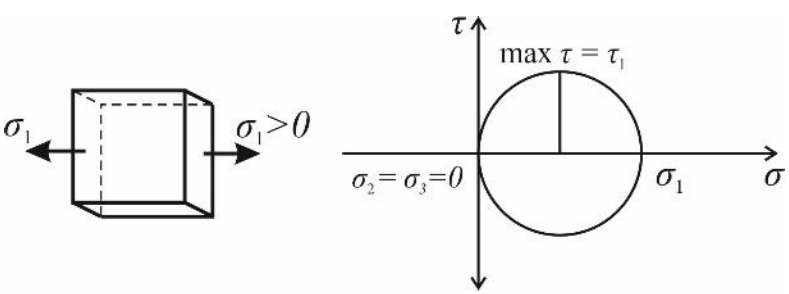
Čistý smyk

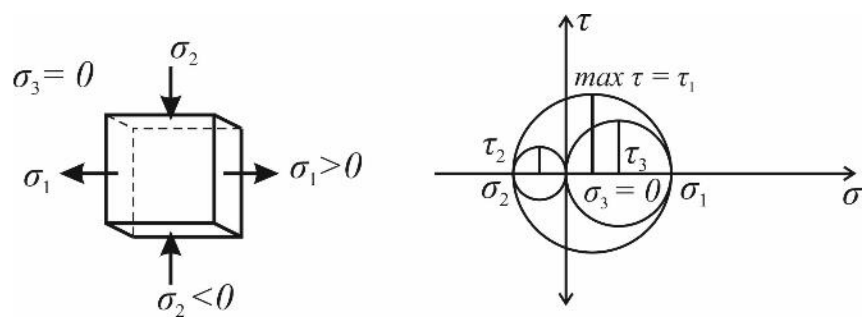


Příklady rovinné napjatosti $\boldsymbol{\sigma_3=0}$ s maximálními smykovými napětími



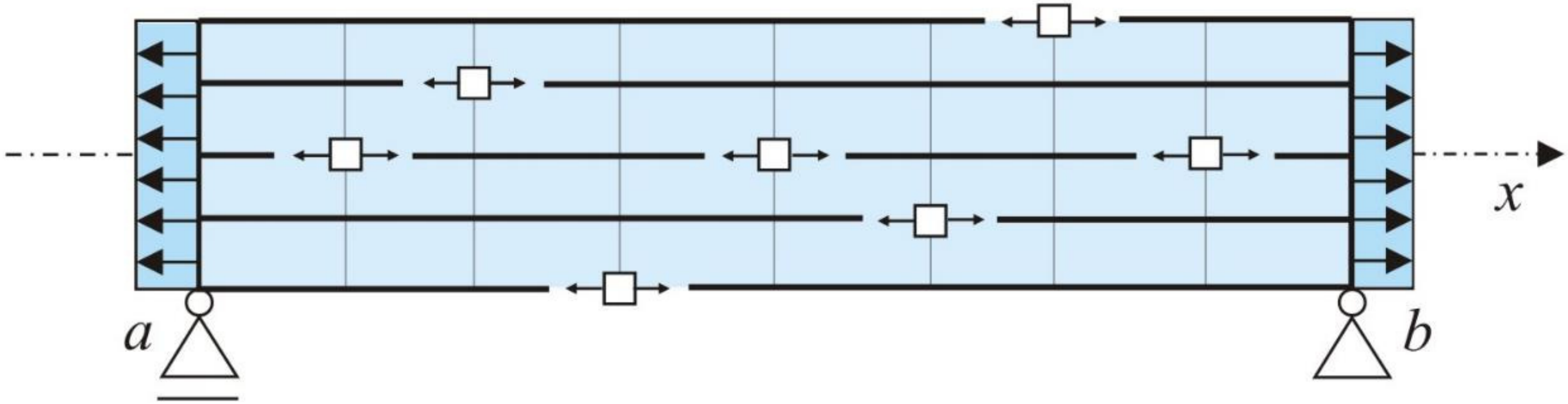
Přímková napjatost



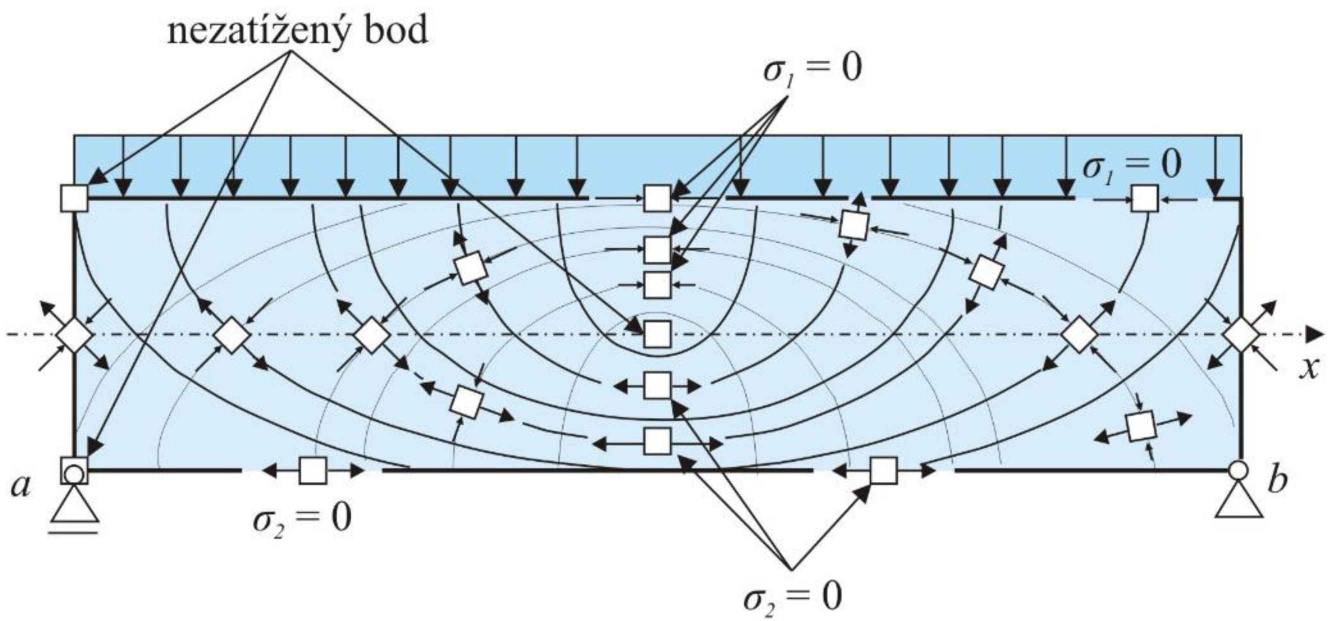


Trajektorie hlavních napětí

Tažený prut

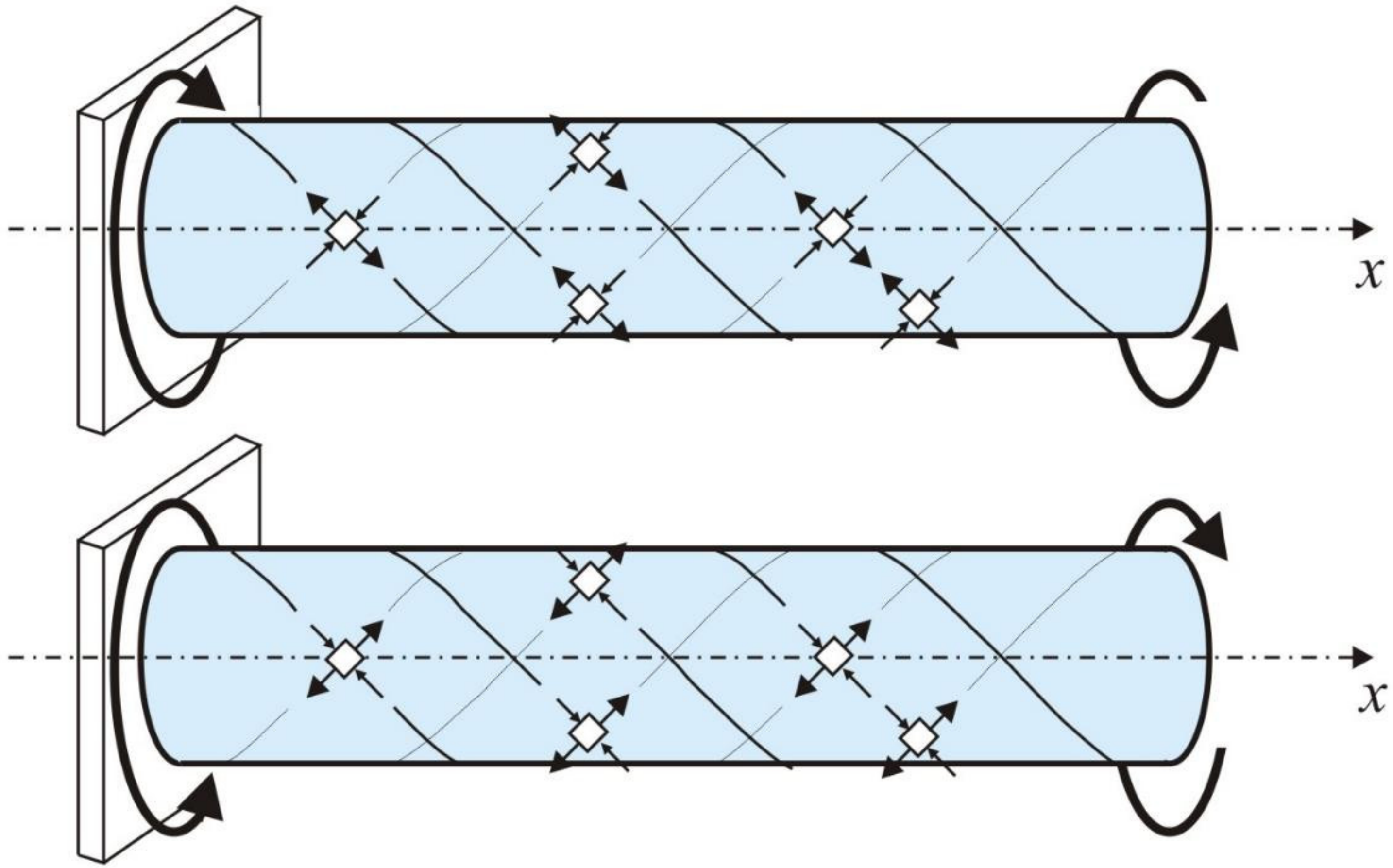


Ohýbaný nosník

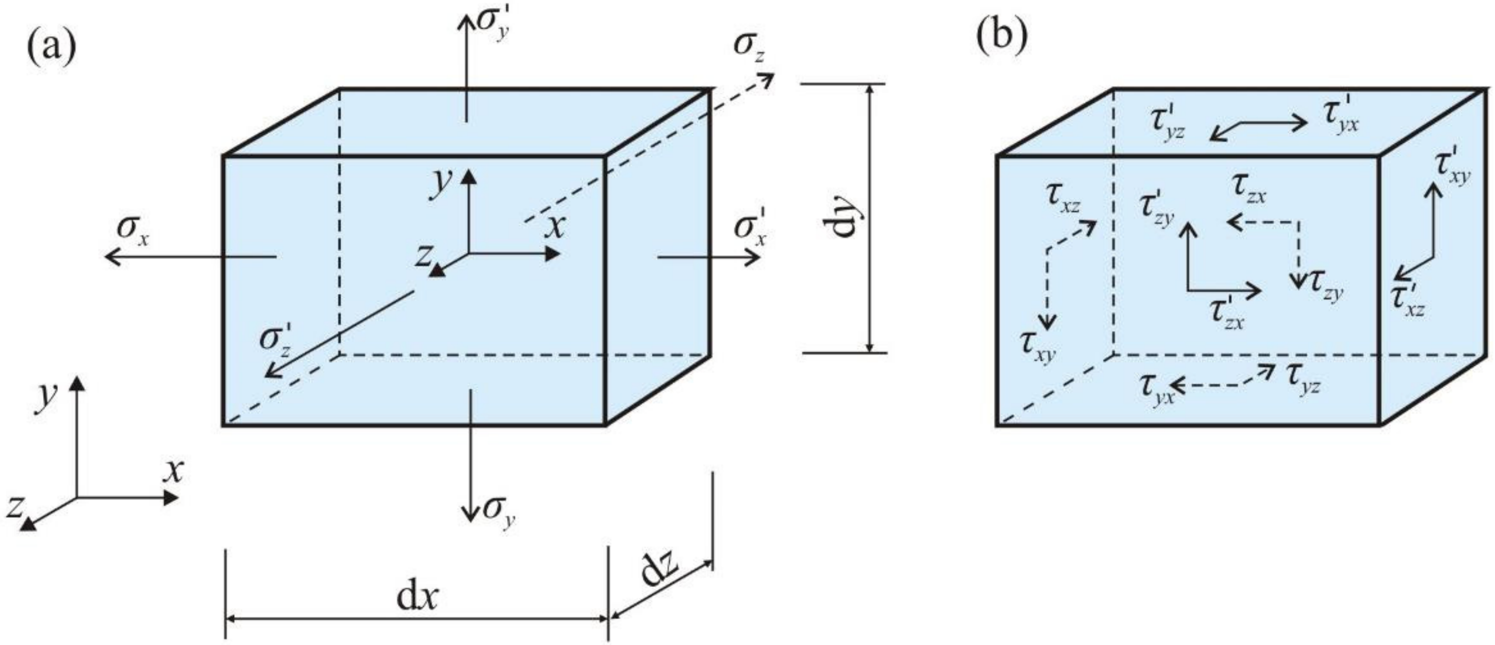


Trajektorie hlavních napětí

Kroucený prut
oba směry M_x



Diferenciální rovnice rovnováhy



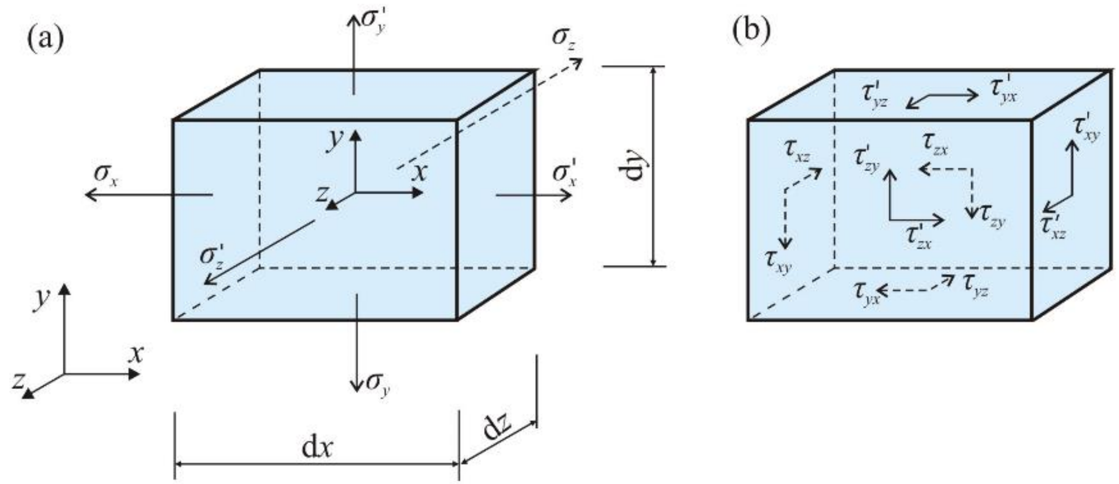
Složky napětí na posunutých ploškách lze zapsat:

$$\sigma'_x(x+\mathrm{d}x, y, z) = \sigma_x(x,y,z) + \frac{\partial\sigma_x(x,y,z)}{\partial x}\mathrm{d}x$$

nebo zkráceně $\sigma_x' = \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x$ a dále

$$\tau_{xy}' = \tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x \qquad \tau_{xz}' = \tau_{xz} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\mathrm{d}x$$

Diferenciální rovnice rovnováhy, pokračování



Ve směru osy x platí podmínka rovnováhy:

$\Sigma F_x = 0$:

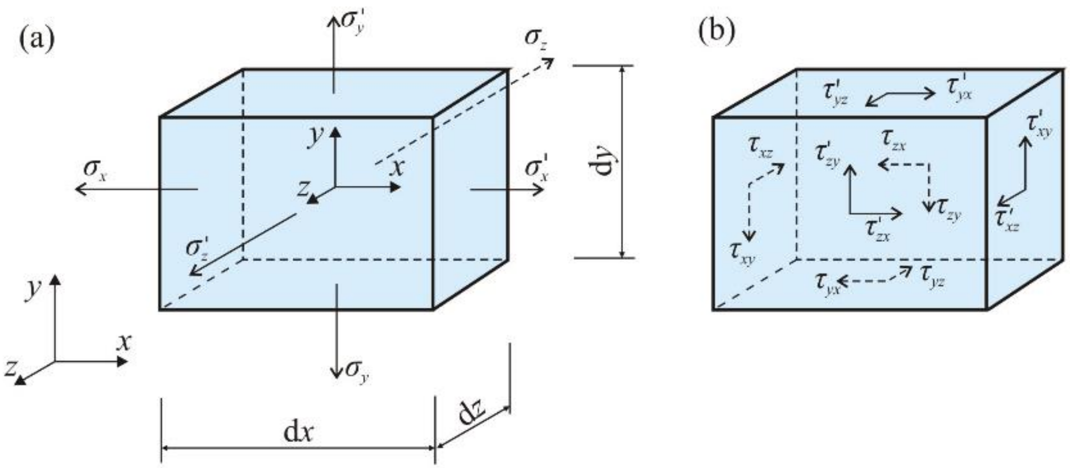
$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\cdot \mathrm{d}x\right)\cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z - \sigma_x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}\cdot \mathrm{d}y\right)\cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z -$$

$$\tau_{yx}\cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}\cdot \mathrm{d}z\right)\cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y - \tau_{zx}\cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y + X \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z = 0$$

Po úpravě:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

Diferenciální rovnice rovnováhy, pokračování



Po rozepsání rovnic rovnováhy ve směru os x, y a z lze odvodit **Cauchyho rovnice rovnováhy**:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

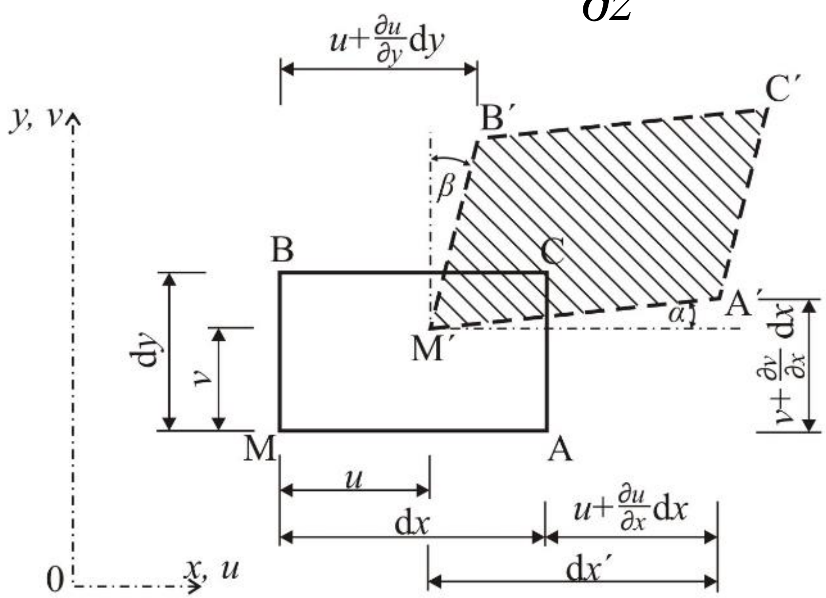
Geometrické rovnice

V prostoru:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$



V rovině:

$$\varepsilon_x = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} \mathrm{d}x - v}{\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}x} + \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{d}y - u}{\mathrm{d}y + \frac{\partial v}{\partial y} \mathrm{d}x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Geometrické rovnice, rovnice kompatibility (spojitosti)

Obdobně lze odvodit:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial^2 y} \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial^2 x} \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Po úpravě:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Rovnice kompatibility popisují vzájemnou závislost složek deformací, zachování spojitosti tělesa i po vzniku deformací

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial z \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}$$

a dále

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}$$

Fyzikální rovnice (konstituční vztahy)

Vztahy mezi napětím a poměrnými deformacemi závisí na fyzikálních vlastnostech látek. Pro lineárně pružný materiál je lze vyjádřit v maticové formě:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} \\ d_{61} & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

Zkráceně lze zapsat:

$$\boldsymbol{\sigma} = D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

D matice tuhosti

$\boldsymbol{\varepsilon}$ vektor deformace

$\boldsymbol{\sigma}$ vektor napětí

d_{ij} konstanty vyjadřující velikost napětí při jednotkové poměrné deformaci

Matice D je symetrická, $d_{ij}=d_{ji}$.

Fyzikální rovnice (konstituční vztahy)

Inverzním vztahem k rovnici $\sigma = D \cdot \varepsilon$

je $\varepsilon = D^{-1} \cdot \sigma = C \cdot \sigma$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

C matice poddajnosti

ε je vektor deformace

σ vektor napětí

c_{ij} koeficienty deformace, vyjadřující poměrnou deformaci při jednotkovém napětí

Matice C je symetrická, platí $c_{ij}=c_{ji}$.

Fyzikální rovnice, **anizotropní látka**

Maticový zápis fyzikálních rovnic:

$$\sigma = D \cdot \varepsilon \qquad \varepsilon = D^{-1} \cdot \sigma = C \cdot \sigma$$

Tenzorový zápis fyzikálních rovnic:

$$\sigma_{ij} = d_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \qquad \varepsilon_{ij} = c_{ijkl} \cdot \sigma_{kl}$$

V **anizotropní látce** jsou fyzikální vlastnosti v každém směru různé.

Počet nezávislých konstant nebo koeficientů je maximálně 21.

Fyzikální rovnice, **izotropní látka**

Rozšířený Hookův zákon $\varepsilon = D^{-1} \cdot \sigma = C \cdot \sigma$

V **izotropní látce** jsou fyzikální vlastnosti ve všech směrech stejné

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

Počet **nezávislých konstant** je **2**.

E je modul pružnosti $[\mathrm{Pa}]$ resp. $[\mathrm{MPa}]$, $[\mathrm{GPa}]$

μ je Poissonův součinitel příčné deformace $\langle 0,\ 0{,}5 \rangle$

Fyzikální rovnice, **izotropní látka**, pokračování

Po rozepsání

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

lze získat

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \qquad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] \qquad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \qquad \gamma_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Fyzikální rovnice, **izotropní** látka, Hookův zákon

Fyzikální rovnice $\sigma = D \cdot \varepsilon$

V **izotropní látce** jsou fyzikální vlastnosti ve všech směrech stejné

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)\cdot(1-2\mu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

Počet **nezávislých konstant** je **2**.

Fyzikální rovnice, **izotropní** látka, Hookův zákon

Po rozepsání

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)\cdot(1-2\mu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

lze získat

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\mu)\cdot(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_x + \mu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] \qquad \tau_{xy} = \frac{2\cdot E}{(1+\mu)}\gamma_{xy} = G\cdot\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\mu)\cdot(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_y + \mu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)\right] \qquad \tau_{yz} = \frac{2\cdot E}{(1+\mu)}\gamma_{xy} = G\cdot\gamma_{yz}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)\cdot(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_z + \mu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right] \qquad \tau_{zx} = \frac{2\cdot E}{(1+\mu)}\gamma_{xy} = G\cdot\gamma_{zx}$$

Fyzikální rovnice, **ortotropní látka**

V **ortotropní látce** jsou fyzikální vlastnosti ve třech vzájemně kolmých směrech odlišné. Hovoří se o **ortotropní anizotropii**.

Jestliže se směry os x, y, a z ztotožní se směry roviny pružné symetrie, počet nezávislých konstant nebo koeficientů je roven 9.

Musí platit: $\frac{\mu_{yx}}{E_x} = \frac{\mu_{xy}}{E_y} \quad \frac{\mu_{yz}}{E_z} = \frac{\mu_{zy}}{E_y} \quad \frac{\mu_{zx}}{E_x} = \frac{\mu_{xz}}{E_z}$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\mu_{xy}}{E_y} & -\frac{\mu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\mu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{zx}}{E_x} & -\frac{\mu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

E_x, E_y, E_z moduly pružnosti ve směru os x, y, z

μ_{xy} Poissonův součinitel daný poměrem příčné deformace ve směru osy x k podélné deformaci ve směru osy y

G_{xy}, G_{yz}, G_{zx} moduly pružnosti ve smyku s indexy označujícími rovinu smyku

Základní systém rovnice teorie pružnosti

Obsahuje 15 neznámých funkcí:

- 6 složek napětí (σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx})
- 6 složek deformace (ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx})
- 3 složky posunutí (u, v, w)

Těchto 15 neznámých lze určit ze:

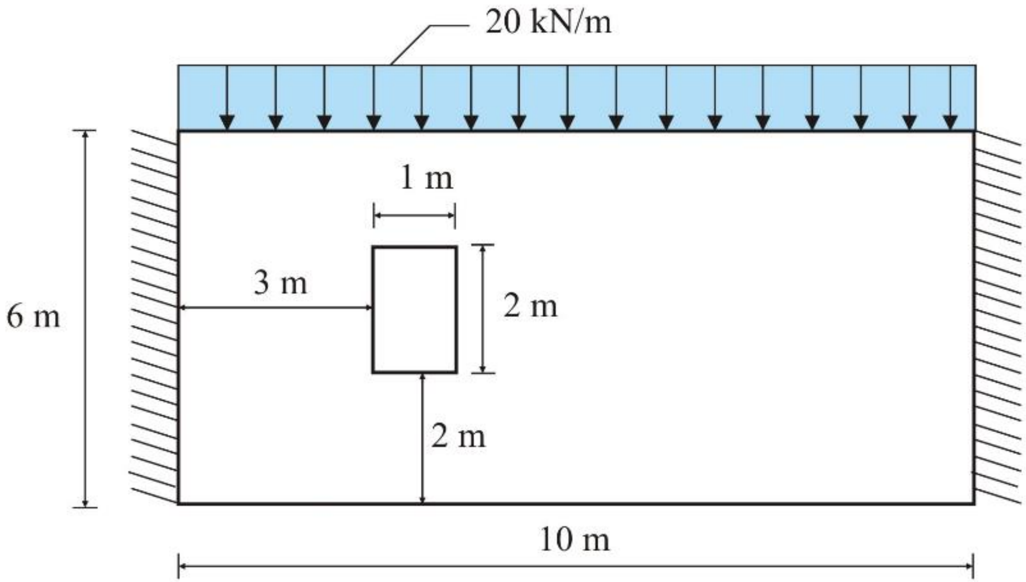
- 3 parciálních diferenciálních rovnic rovnováhy
- 6 geometrických rovnic
- 6 fyzikálních rovnic

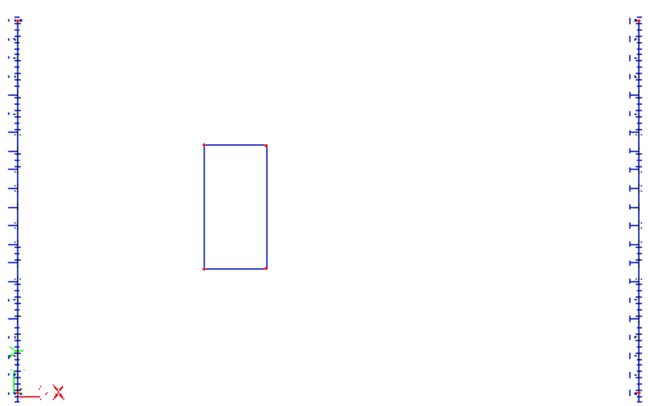
Na povrchu tělesa musí být splněny podmínky odpovídající zatížení a vazbám - **okrajové podmínky**

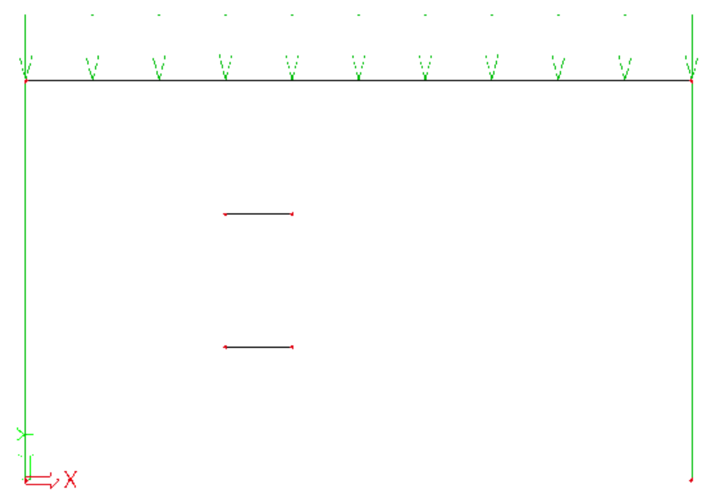
Druhy okrajových podmínek

1. **Statické okrajové podmínky:** na povrchu tělesa jsou zadána povrchová zatížení svými složkami $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$. Složky napětí na povrchu tělesa p_x, p_y, p_z musí být s nimi v rovnováze.
   Musí tedy platit: $\bar{p}_x = p_x \quad \bar{p}_y = p_y \quad \bar{p}_z = p_z$
2. **Deformační okrajové podmínky:** na povrchu tělesa jsou zadány složky posunutí $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ nebo jejich derivace. Složky deformace povrchu u, v, w tělesa musí vyhovovat těmto podmínkám: $\bar{u} = u \qquad \bar{v} = v \qquad \bar{w} = w$
3. **Smíšené okrajové podmínky:** na povrchu tělesa jsou zadána současně zatížení a deformace.

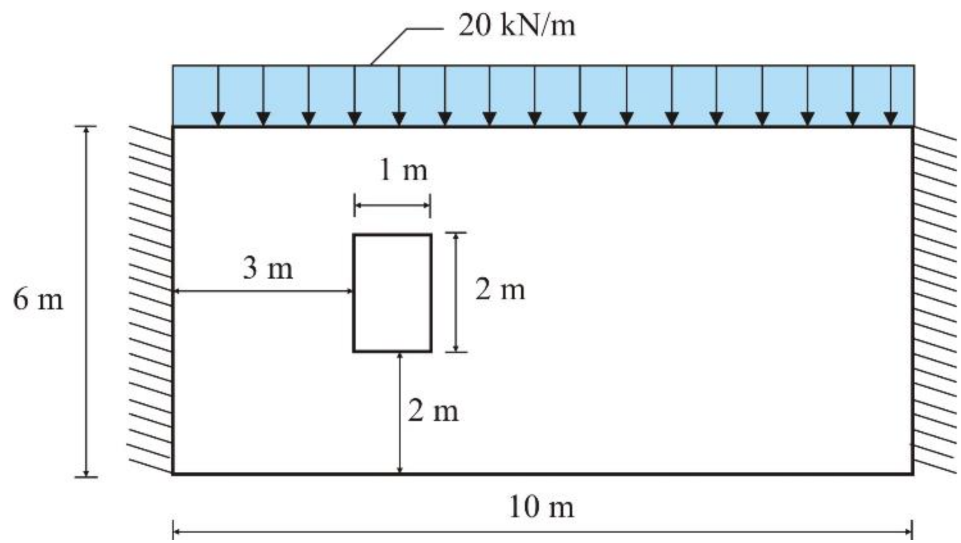
Příklad, zadání, okrajové podmínky, zatížení

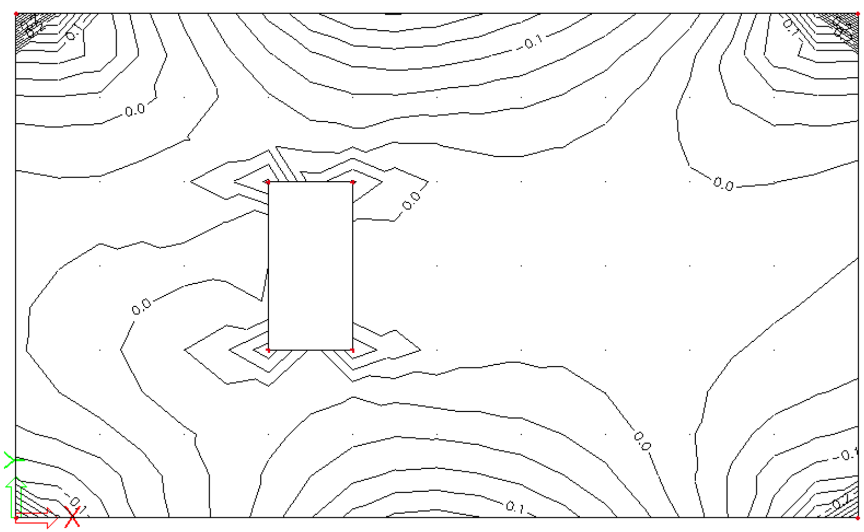




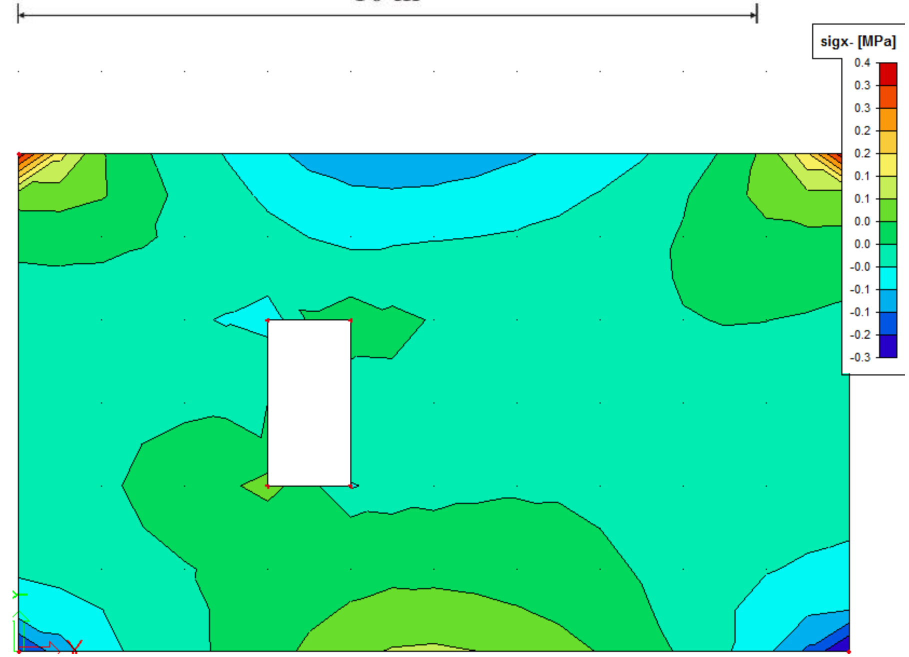


Příklad



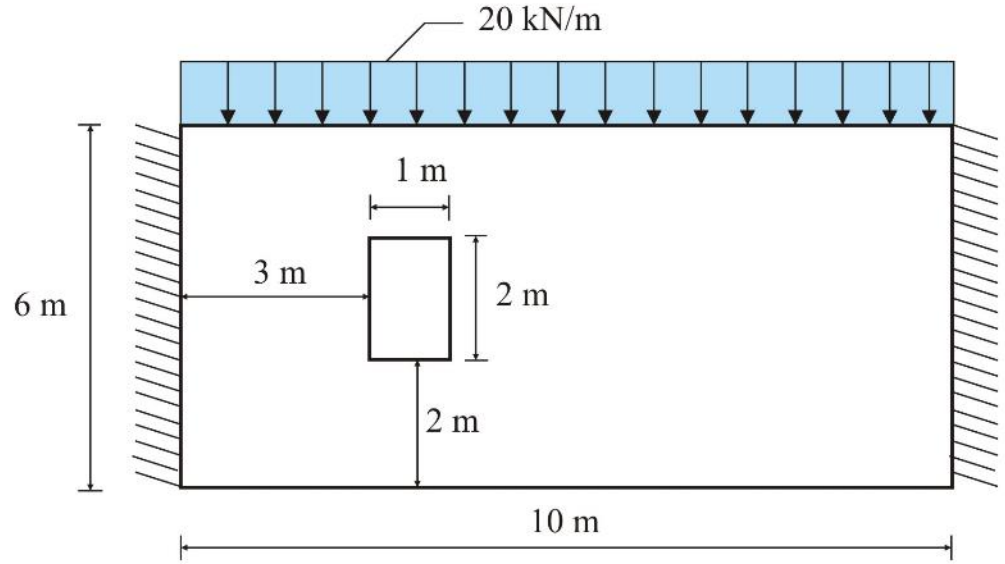


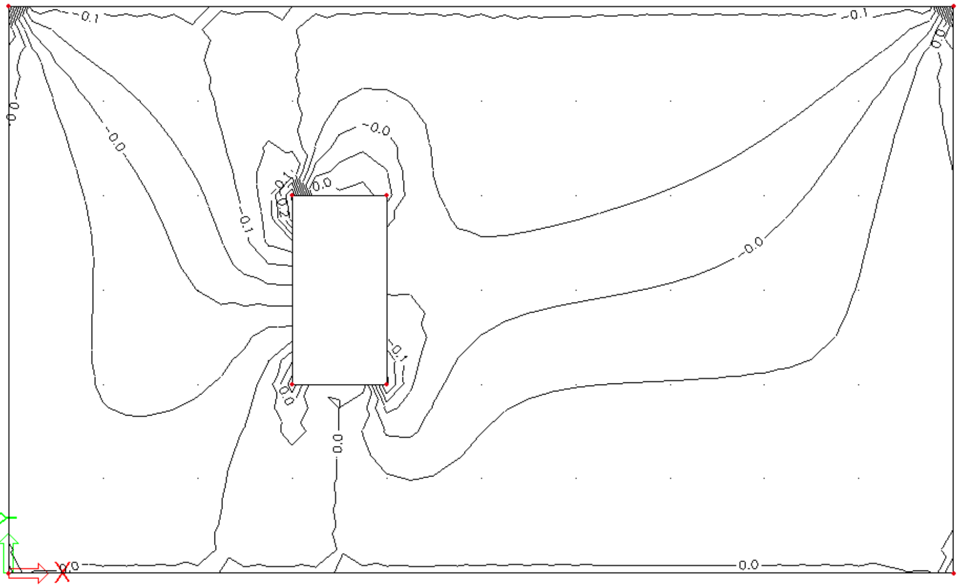
Napětí σ_x: izolinie [MPa]



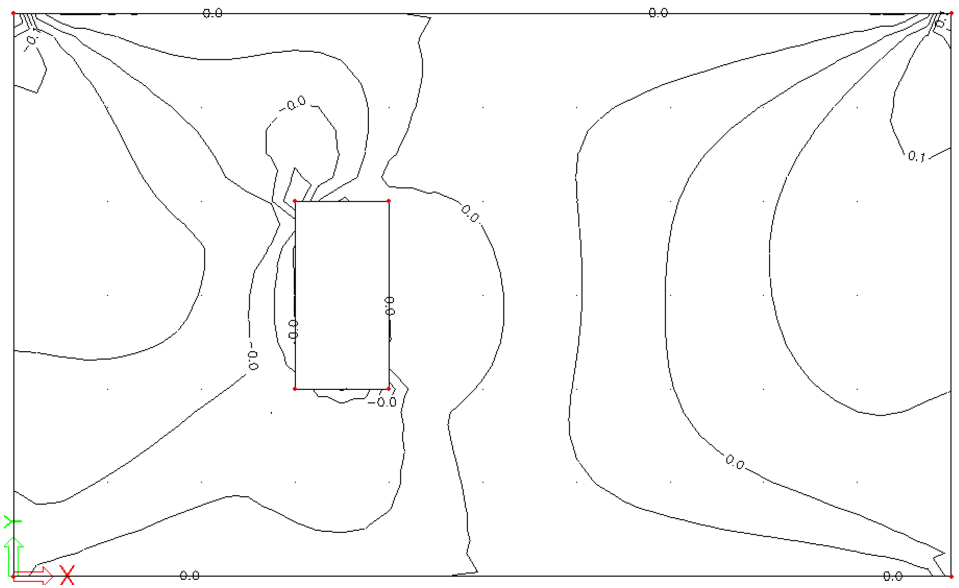
Napětí σ_x: izoplochy [MPa]

Příklad



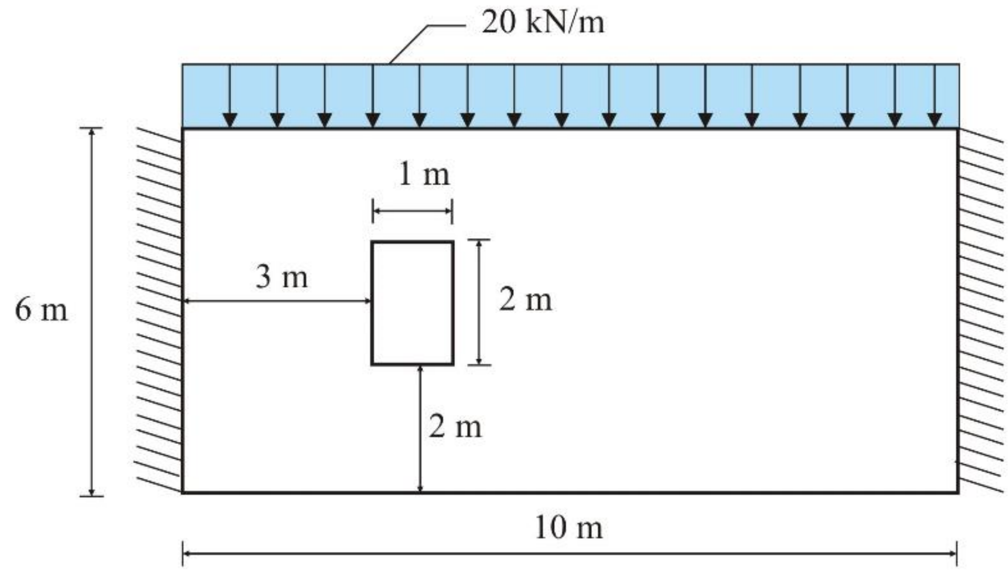


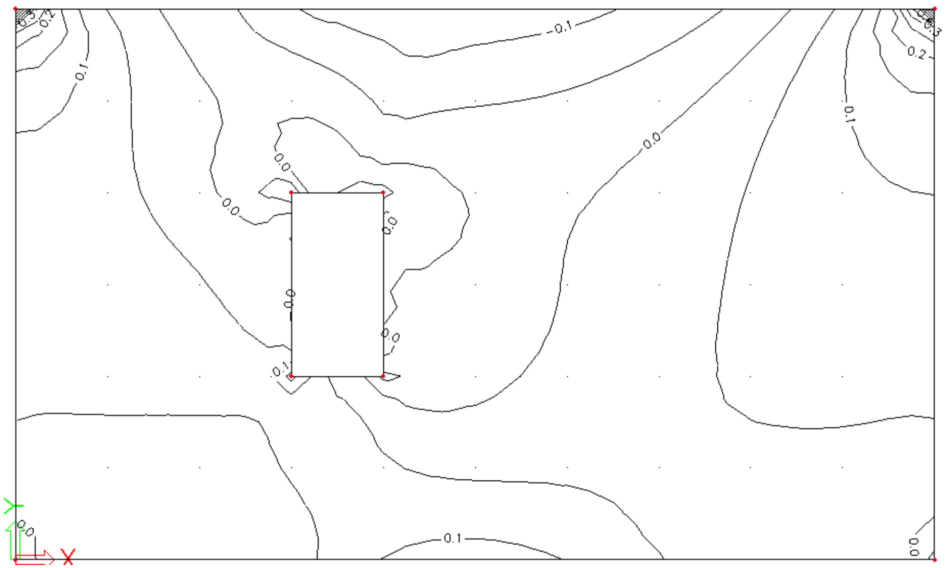
Napětí σ_y izolinie [MPa]



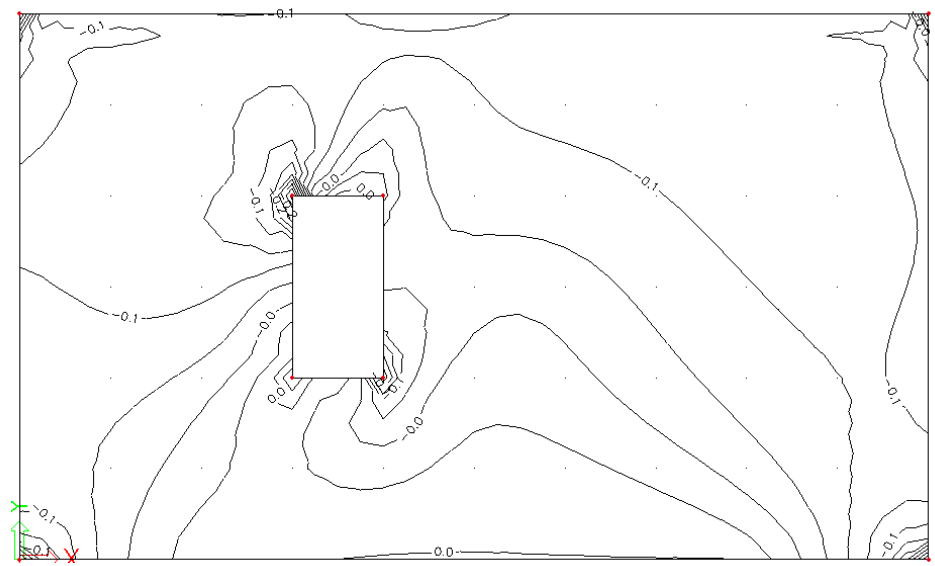
Napětí τ_{xy} izolinie [MPa]

Příklad





Napětí σ_1 izolinie [MPa]



Napětí σ_2 izolinie [MPa]