

Pružnost a plasticita II

3. ročník bakalářského studia

doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.
Katedra stavební mechaniky



10

Numerické řešení nosníku na pružném podkladu



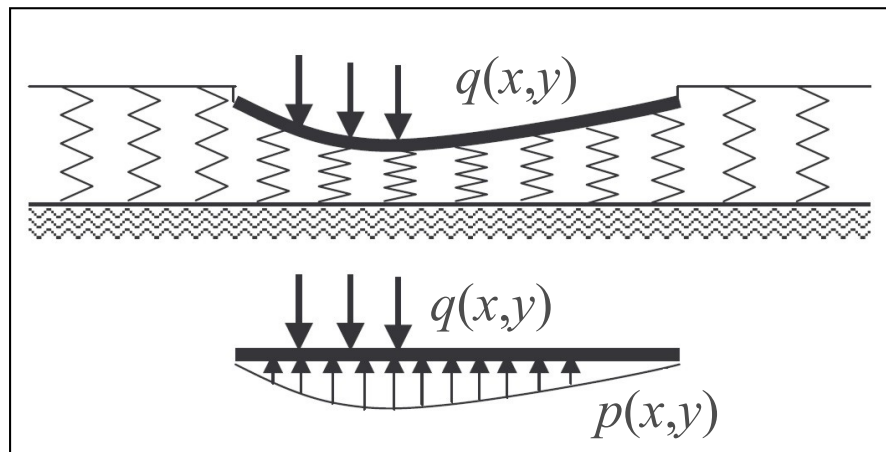
Winklerův model podloží



Emil Winkler
1835-1888

$$p(x, y) = C \cdot w(x, y)$$

- $p(x, y)$... reakce podloží [$\text{kN} \cdot \text{m}^{-2}$]
 C ... modul stlačitelnosti podkladu [$\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$]
 $w(x, y)$... přetvoření základové konstrukce [m]



- $q(x, y)$... plošné zatížení na základ [$\text{kN} \cdot \text{m}^{-2}$]

Winklerův model podloží

Schwedlerovy vztahy

$$w(x) = ?$$

$$\varphi(x) = \frac{dw(x)}{dx}$$

$$M(x) = -EI \cdot \frac{d^2w(x)}{dx^2}$$

$$V(x) = -EI \cdot \frac{d^3w(x)}{dx^3}$$

$$q(x) = EI \cdot \frac{d^4w(x)}{dx^4}$$

Pro pružné podloží

$$q(x) - p'(x) = EI \cdot \frac{d^4w(x)}{dx^4}$$

$$p'(x) = p(x, y) \cdot b$$

b ... šířka základu [m]

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4} + \frac{C \cdot b}{EI} \cdot w(x) = \frac{q(x)}{EI}$$

EI ... konst.

Metoda sítí (metoda konečných diferencí)

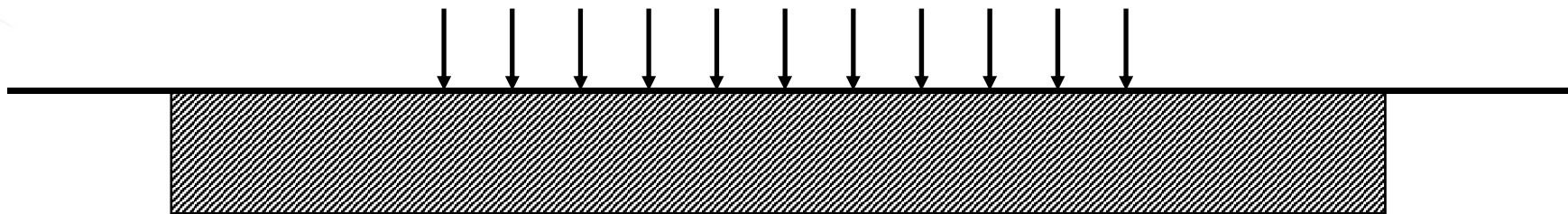
$$1. \left(\frac{dy}{dx} \right)_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} \quad \Delta x = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} \quad 2\Delta x = x_{i+1} - x_{i-1}$$

$$2. \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_i = \frac{\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} - \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$$3. \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_i = \frac{\frac{d^2 y_{i+1}}{dx^2} - \frac{d^2 y_{i-1}}{dx^2}}{2\Delta x} = \frac{\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{\Delta x^2} - \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^2}}{2\Delta x} = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2\Delta x^3}$$

$$4. \left(\frac{d^4 y}{dx^4} \right)_i = \frac{\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{i+1} - 2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_i + \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{i-1}}{\Delta x^2} =$$
$$= \frac{\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{\Delta x^2} - 2 \cdot \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^2}}{\Delta x^2} =$$
$$= \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^4}$$

Teoretické řešení základového pásu



Výpočet průhybu

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{C \cdot b}{EI} \cdot w(x) = \frac{q(x)}{EI}$$

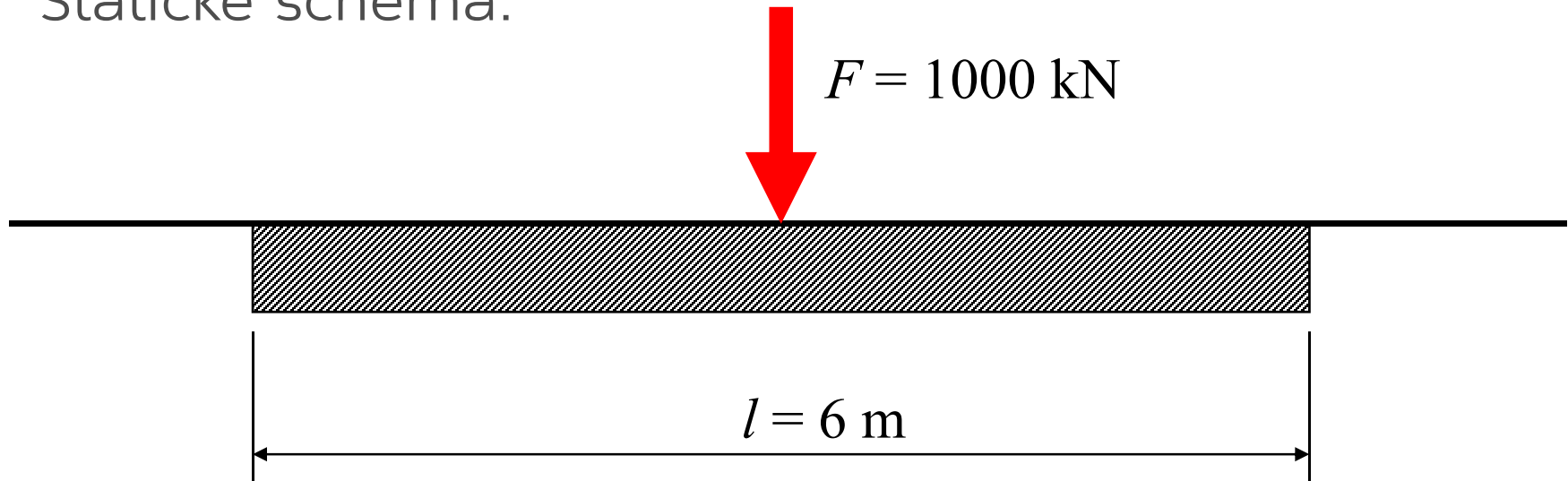
Výpočet vnitřních sil

$$M(x) = -EI \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$$

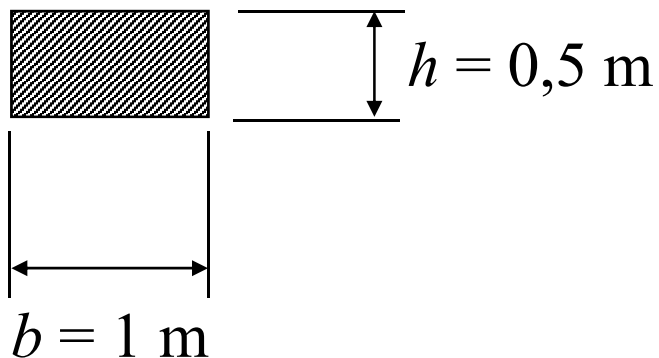
$$V(x) = -EI \cdot \frac{d^3 w(x)}{dx^3}$$

Zadání příkladu

Statické schéma:



Řez pásem



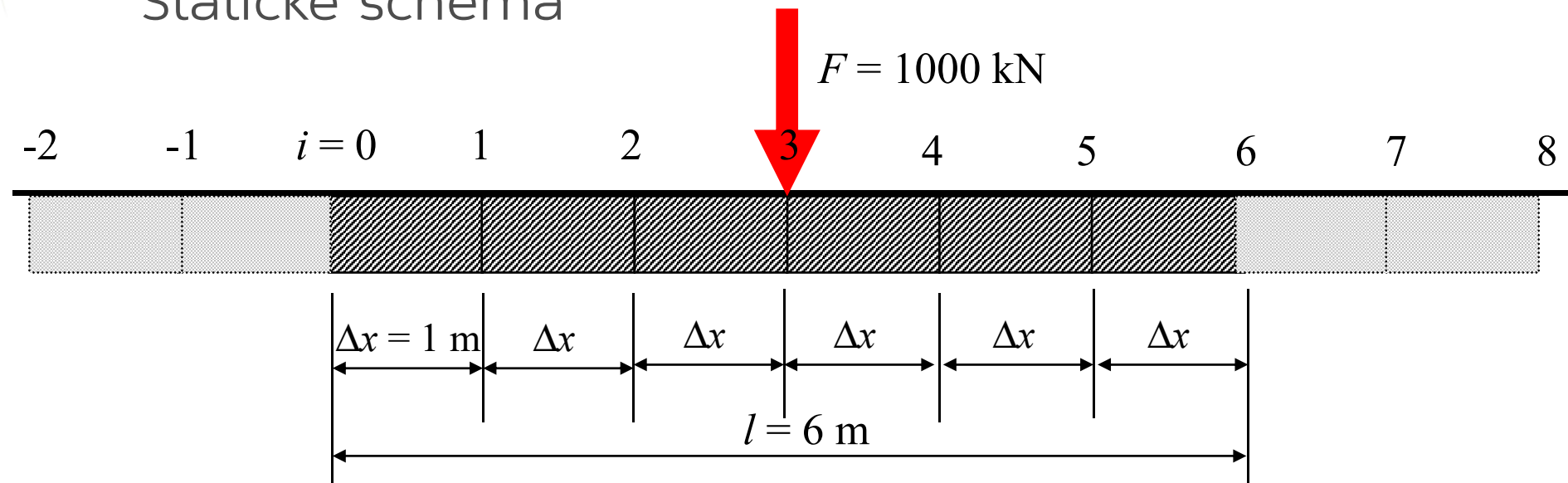
Materiálové charakteristiky

$$E = 2 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$C = 36 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-1} = 36000 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$$

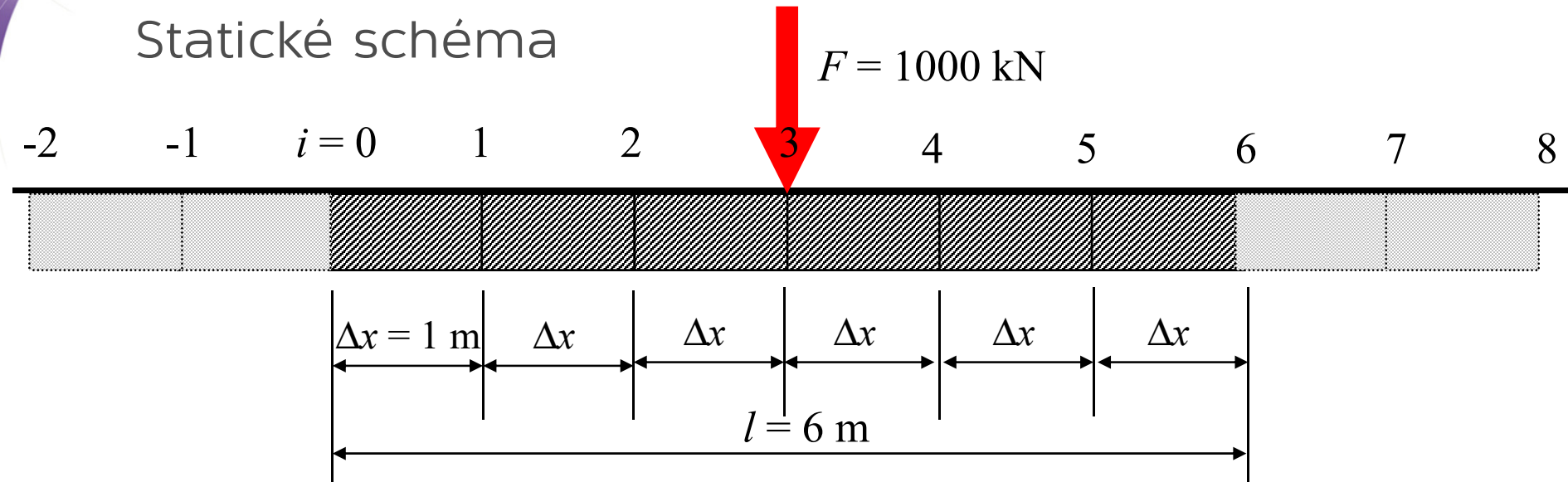
Rozdělení na difference

Statické schéma



Sestavení soustavy lineárních rovnic

Statické schéma



Bod 0:

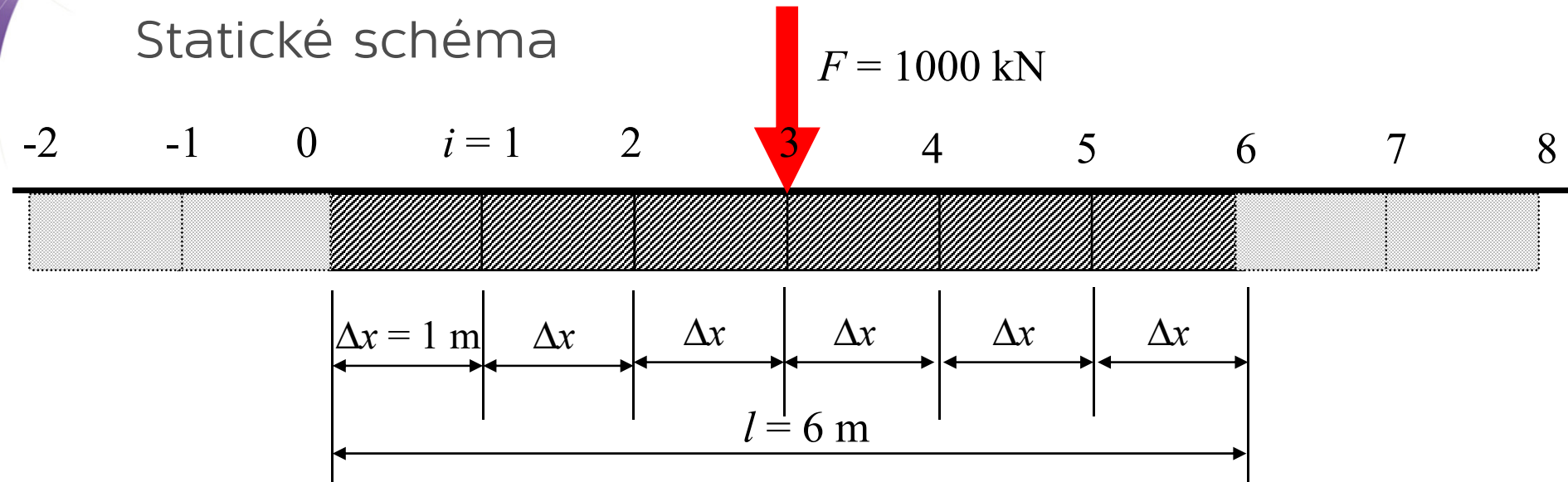
$$\frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta x^4} + \frac{C \cdot b}{EI} \cdot w_i = \frac{q(x)}{EI}$$

$$i = 0$$

$$q = 0$$

Sestavení soustavy lineárních rovnic

Statické schéma



Bod 1:

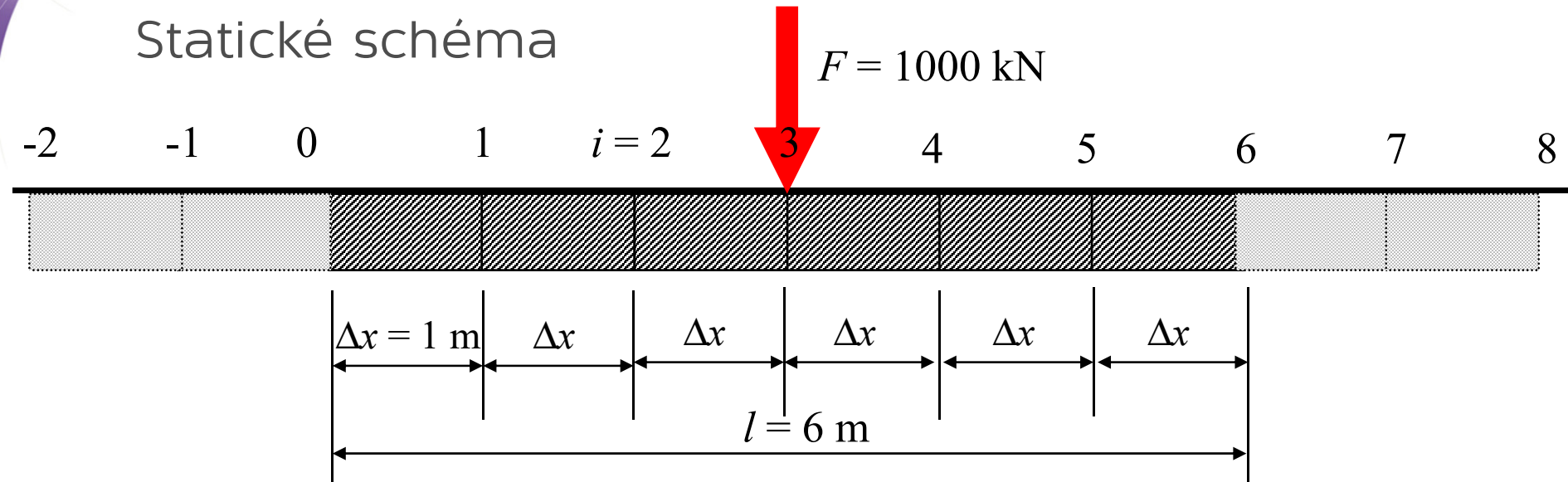
$$\frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta x^4} + \frac{C \cdot b}{EI} \cdot w_i = \frac{q(x)}{EI}$$

$i = 1$

$q = 0$

Sestavení soustavy lineárních rovnic

Statické schéma



Bod 2:

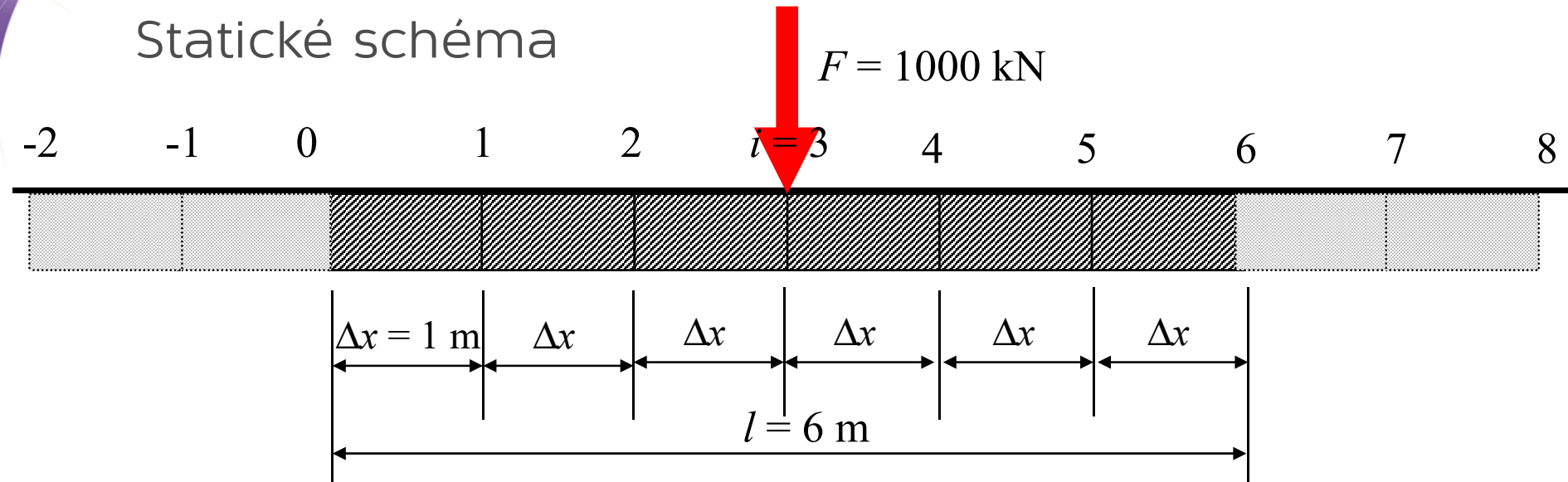
$$\frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta x^4} + \frac{C \cdot b}{EI} \cdot w_i = \frac{q(x)}{EI}$$

$i = 2$

$q = 0$

Sestavení soustavy lineárních rovnic

Statické schéma



Bod 3:

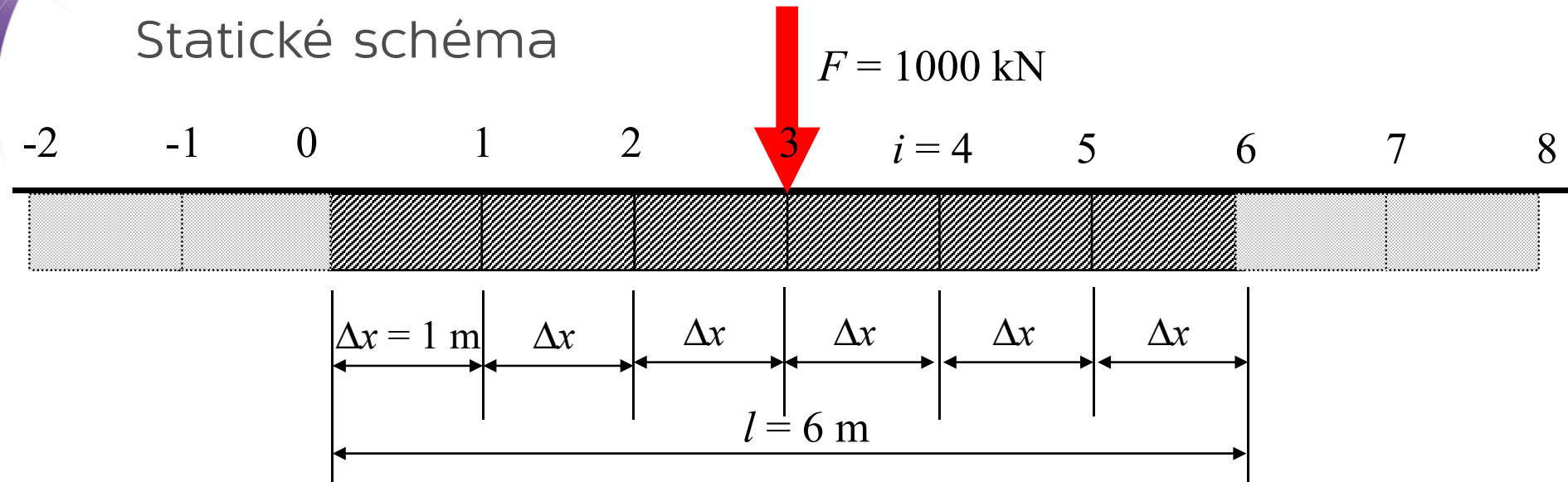
$$\frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta x^4} + \frac{C \cdot b}{EI} \cdot w_i = \frac{q(x)}{EI}$$

$i = 3$

$$q = \frac{F}{\Delta x}$$

Sestavení soustavy lineárních rovnic

Statické schéma



Bod 4:

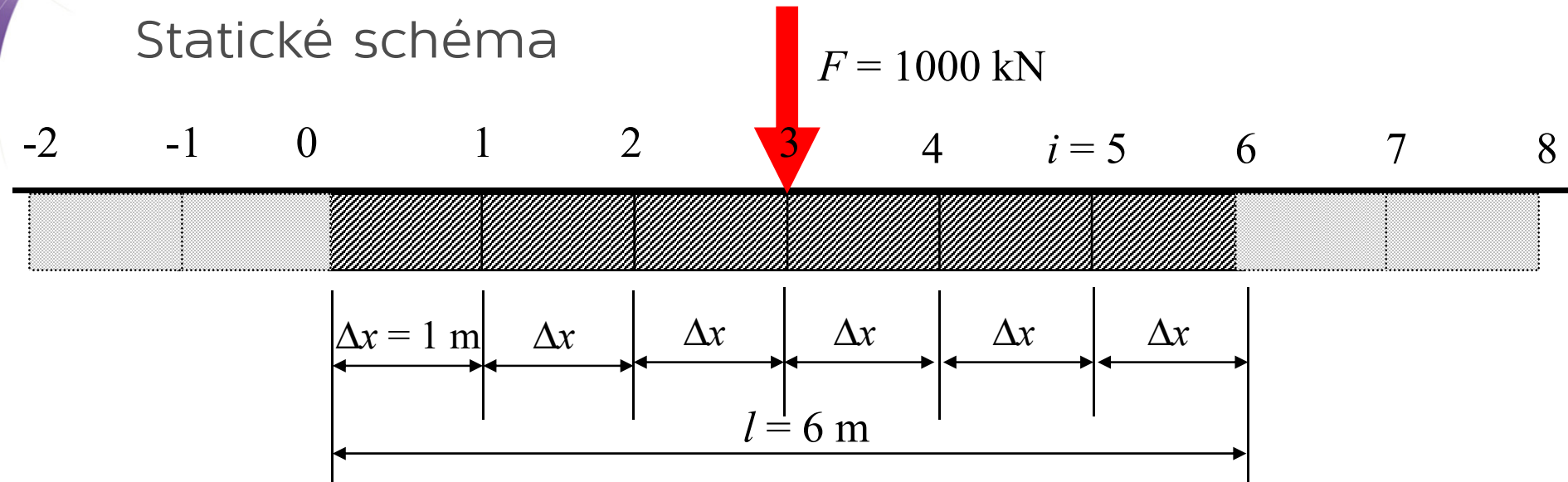
$$\frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta x^4} + \frac{C \cdot b}{EI} \cdot w_i = \frac{q(x)}{EI}$$

$$i = 4$$

$$q = 0$$

Sestavení soustavy lineárních rovnic

Statické schéma



Bod 5:

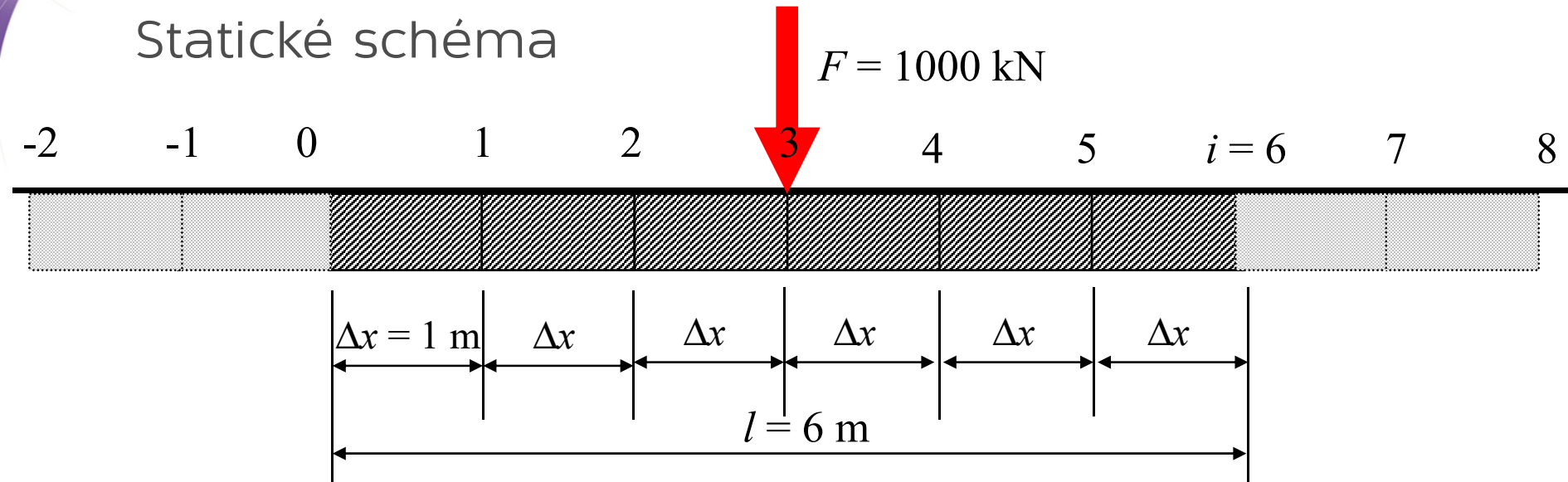
$$\frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta x^4} + \frac{C \cdot b}{EI} \cdot w_i = \frac{q(x)}{EI}$$

$i = 5$

$q = 0$

Sestavení soustavy lineárních rovnic

Statické schéma



Bod 6:

$$\frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta x^4} + \frac{C \cdot b}{EI} \cdot w_i = \frac{q(x)}{EI}$$

$i = 6$

$q = 0$

Soustava lineárních rovnic

Bod 0: $w_2 - 4 \cdot w_1 + \left(6 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI}\right) \cdot w_0 - 4 \cdot w_{-1} + w_{-2} = 0$

Bod 1: $w_3 - 4 \cdot w_2 + \left(6 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI}\right) \cdot w_1 - 4 \cdot w_0 + w_{-1} = 0$

Bod 2: $w_4 - 4 \cdot w_3 + \left(6 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI}\right) \cdot w_2 - 4 \cdot w_1 + w_0 = 0$

Bod 3: $w_5 - 4 \cdot w_4 + \left(6 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI}\right) \cdot w_3 - 4 \cdot w_2 + w_1 = \frac{F \cdot \Delta x^4}{\Delta x \cdot EI}$

Bod 4: $w_6 - 4 \cdot w_5 + \left(6 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI}\right) \cdot w_4 - 4 \cdot w_3 + w_2 = 0$

Bod 5: $w_7 - 4 \cdot w_6 + \left(6 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI}\right) \cdot w_5 - 4 \cdot w_4 + w_3 = 0$

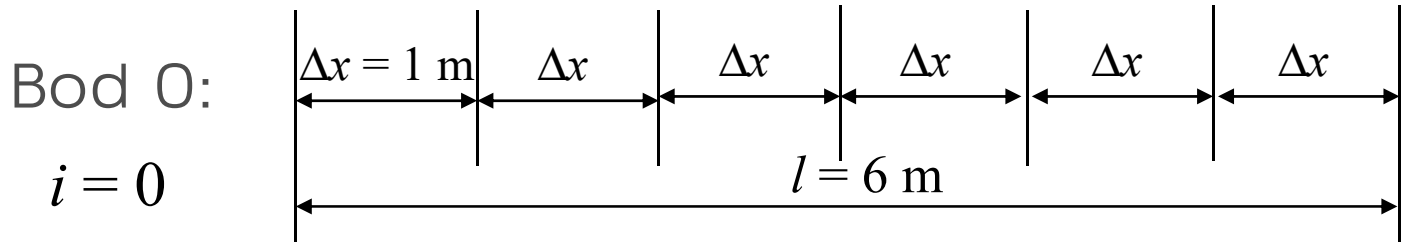
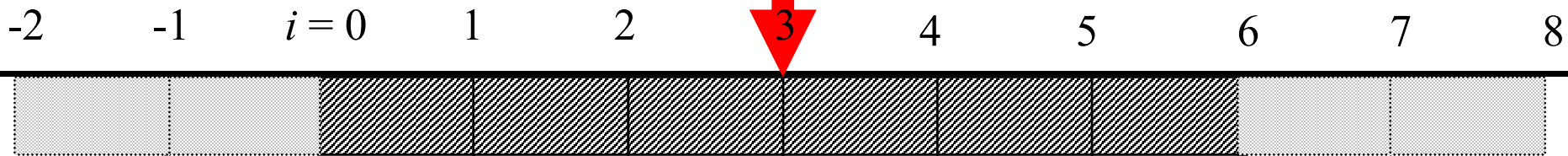
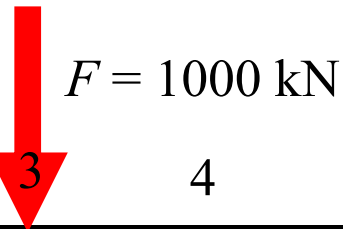
Bod 6: $w_8 - 4 \cdot w_7 + \left(6 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI}\right) \cdot w_6 - 4 \cdot w_5 + w_4 = 0$

7 rovnic / 11
neznámých

Nutno
sestavit 4
okrajové
podmínky

Okrajové podmínky

Statické schéma



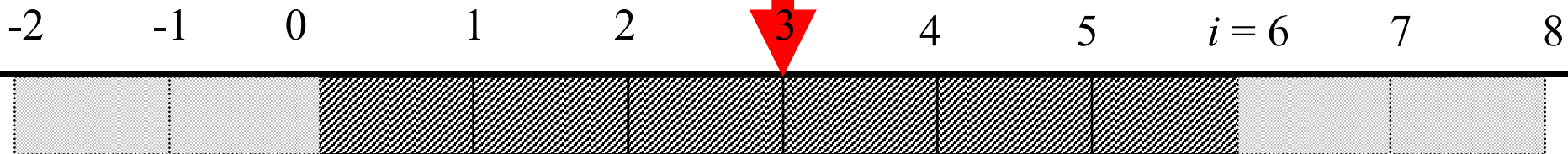
$$M_i = -EI \cdot \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2} = 0$$

$$V_i = -EI \cdot \frac{w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2}}{2\Delta x^3} = 0$$

Okrajové podmínky

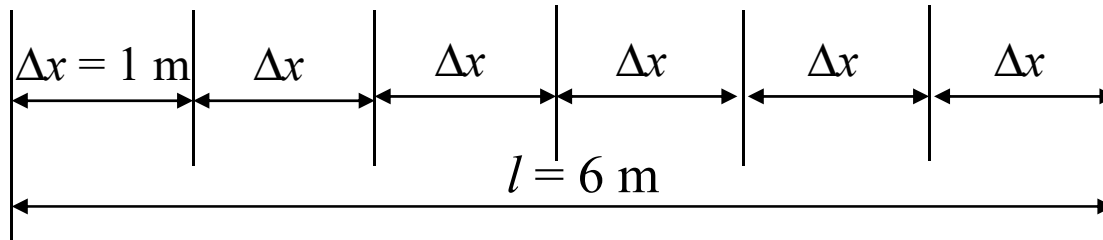
Statické schéma

$F = 1000 \text{ kN}$



Bod 6:

$i = 6$



$$M_i = -EI \cdot \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2} = 0$$

$$V_i = -EI \cdot \frac{w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2}}{2\Delta x^3} = 0$$

Výsledná soustava lineárních rovnic

$$\text{Bod 0: } 2 \cdot w_2 - 4 \cdot w_1 + \left(2 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI} \right) \cdot w_0 = 0$$

$$\text{Bod 1: } w_3 - 4 \cdot w_2 + \left(5 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI} \right) \cdot w_1 - 2 \cdot w_0 = 0$$

$$\text{Bod 2: } w_4 - 4 \cdot w_3 + \left(6 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI} \right) \cdot w_2 - 4 \cdot w_1 + w_0 = 0$$

$$\text{Bod 3: } w_5 - 4 \cdot w_4 + \left(6 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI} \right) \cdot w_3 - 4 \cdot w_2 + w_1 = \frac{F \cdot \Delta x^4}{\Delta x \cdot EI} \quad \begin{array}{l} 7 \text{ rovnic / } 7 \\ \text{neznámých} \end{array}$$

$$\text{Bod 4: } w_6 - 4 \cdot w_5 + \left(6 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI} \right) \cdot w_4 - 4 \cdot w_3 + w_2 = 0$$

$$\text{Bod 5: } -2 \cdot w_6 + \left(5 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI} \right) \cdot w_5 - 4 \cdot w_4 + w_3 = 0$$

$$\text{Bod 6: } \left(2 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI} \right) \cdot w_6 - 4 \cdot w_5 + 2 \cdot w_4 = 0$$

Z okrajových podmínek

$$w_{-2} = w_2 - 4w_1 + 4w_0$$

$$w_{-1} = 2w_0 - w_1$$

$$w_7 = 2w_6 - w_5$$

$$w_8 = w_4 - 4w_5 + 4w_6$$

Kořeny soustavy - průhyb v bodech 0 až 6

Maticový zápis soustavy lineárních rovnic

$$\begin{bmatrix}
 2 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI} & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -2 & 5 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI} & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -4 & 6 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI} & -4 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -4 & 6 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI} & -4 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -4 & 6 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI} & -4 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI} & -2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 + \frac{C \cdot b \cdot \Delta x^4}{EI}
 \end{bmatrix}
 \cdot \begin{Bmatrix}
 w_0 \\
 w_1 \\
 w_2 \\
 w_3 \\
 w_4 \\
 w_5 \\
 w_6
 \end{Bmatrix}
 = \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \frac{F \cdot \Delta x^4}{\Delta x \cdot EI} \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}$$

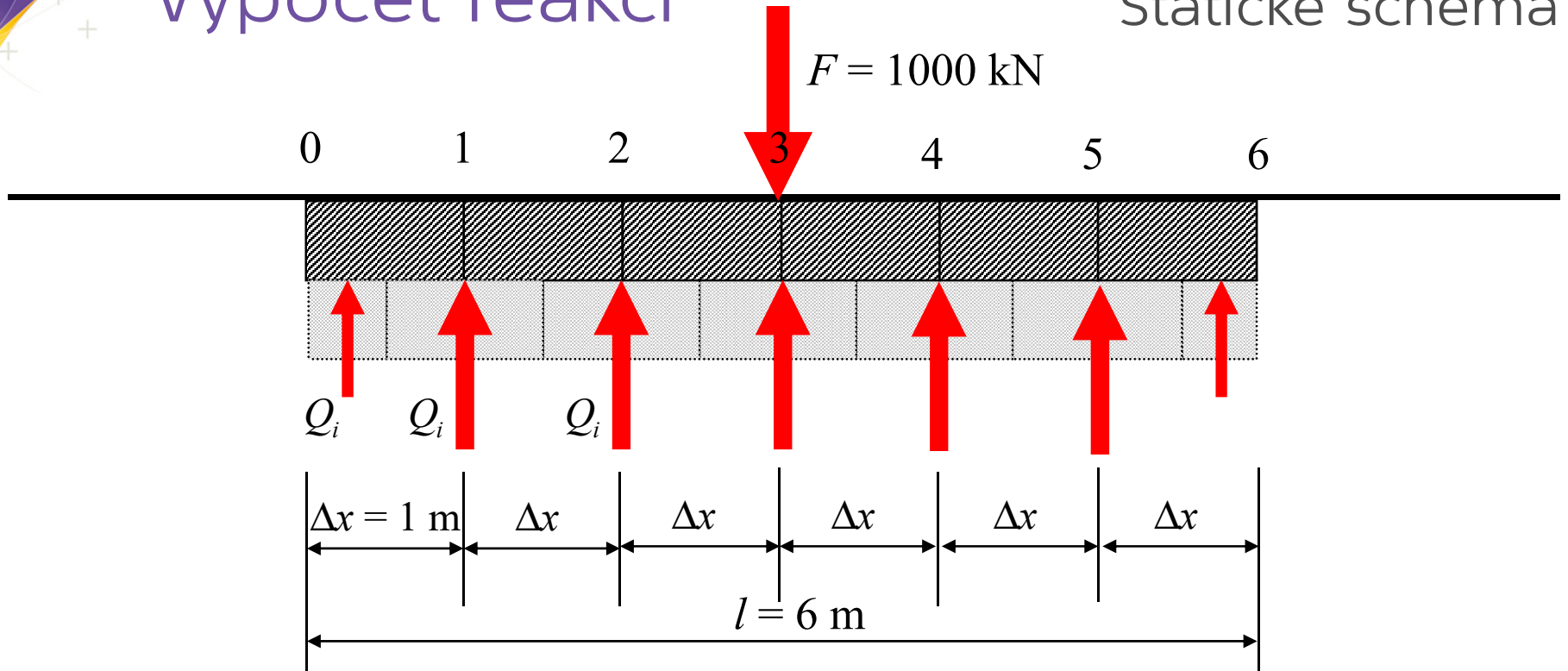
Příklad: nosník na pružném podkladu, sestavení a řešení lineárních rovnic

bod	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	PS
0	2,1728	-4,0000	2,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	-2,0000	5,1728	-4,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	1,0000	-4,0000	6,1728	-4,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0000	1,0000	-4,0000	6,1728	-4,0000	1,0000	0,0000	0,0048
4	0,0000	0,0000	1,0000	-4,0000	6,1728	-4,0000	1,0000	0,0000
5	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	-4,0000	5,1728	-2,0000	0,0000
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	2,0000	-4,0000	2,1728	0,0000

Kořeny w [m]	
1,3740E-03	w_0
3,6945E-03	w_1
5,8963E-03	w_2
7,2222E-03	w_3
5,8963E-03	w_4
3,6945E-03	w_5
1,3740E-03	w_6

Výpočet reakcí

Statické schéma



$$p(x, y) = C \cdot w(x, y)$$

$$p'(x) = p(x, y) \cdot b$$

$$p'_i = C \cdot b \cdot w_i \quad \dots \text{reakce podloží [kN/m]}$$

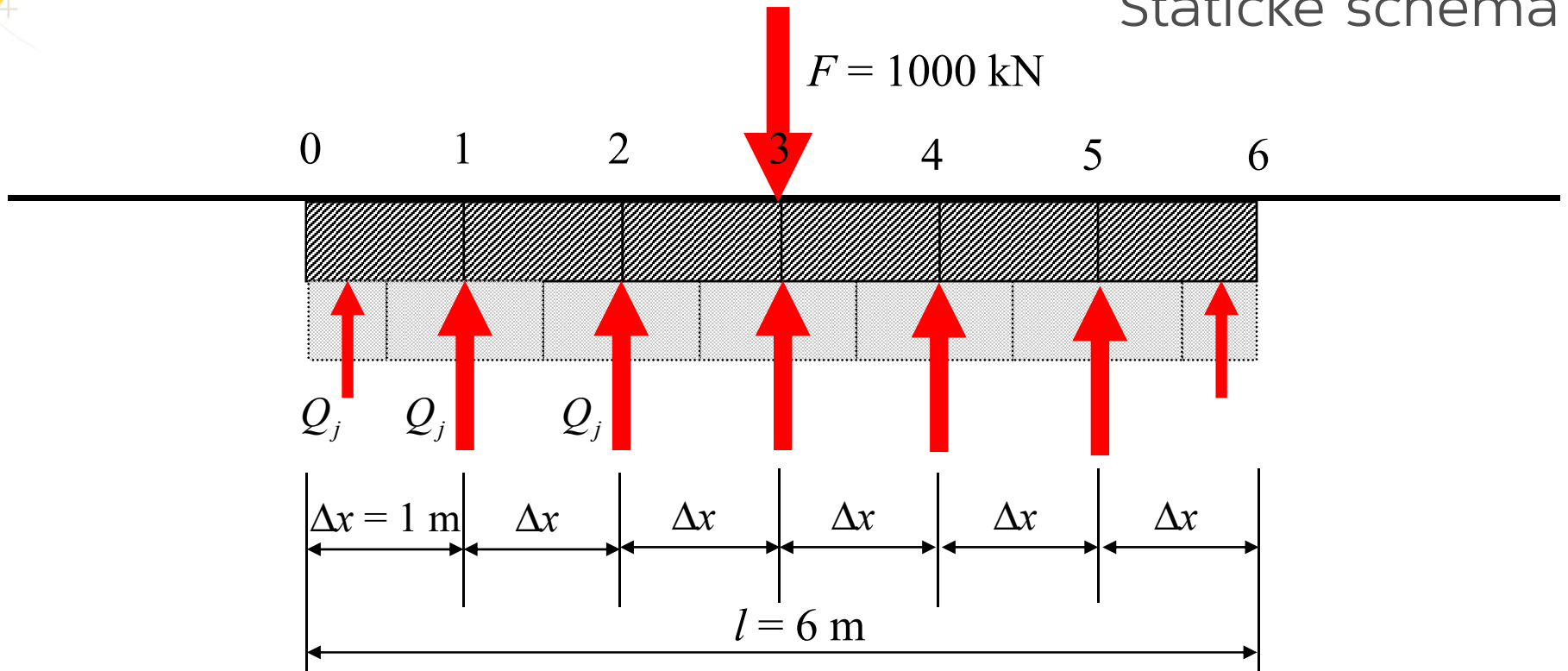
$$Q_i = p'_i \cdot \Delta x \quad \dots \text{reakce v uzlech 1..5 [kN]}$$

$$Q_i = p'_i \cdot \frac{\Delta x}{2} \quad \dots \text{reakce v krajních uzlech 0 a 6 [kN]}$$

$$R_z = F - p'_i \cdot l = F - \sum_{i=0}^6 Q_i = 0$$

Výpočet vnitřních sil

Statické schéma



1. podle
diferenčních
vztahů

$$M_i = -EI \cdot \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$$V_i = -EI \cdot \frac{w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2}}{2\Delta x^3}$$

2. podle
principů
statiky

$$M_i = \sum_{j=1}^i Q_{j-1} \cdot (x_i - x_{Q_{j-1}}) - \left. F \cdot \left(x_i - \frac{l}{2} \right) \right|_{x_i > \frac{l}{2}}$$

$$V_i = \sum_{j=1}^i Q_j - \left. F \right|_{x_i > \frac{l}{2}}$$

Příklad: nosník na pružném podkladu, výpočet reakcí a složek vnitřních sil

Numericky:

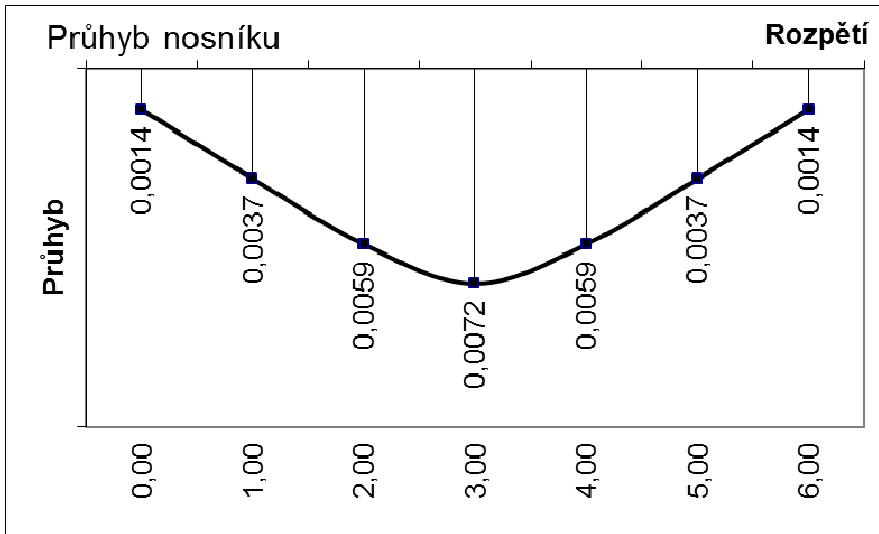
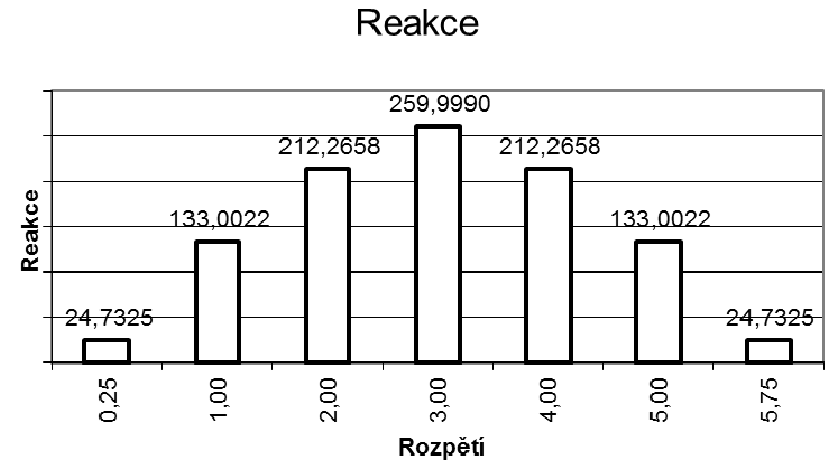
p_i [kN/m]		Reakce Q_i [kN]		x_{Qi} [m]	x_i [m]
p_0	49,4649	Q_0	24,7325	0,2500	0,0000
p_1	133,0022	Q_1	133,0022	1,0000	1,0000
p_2	212,2658	Q_2	212,2658	2,0000	2,0000
p_3	259,9990	Q_3	259,9990	3,0000	3,0000
p_4	212,2658	Q_4	212,2658	4,0000	4,0000
p_5	133,0022	Q_5	133,0022	5,0000	5,0000
p_6	49,4649	Q_6	24,7325	5,7500	6,0000
		Σ	1000,0000		

Podle principů statiky				
M_i [kNm]			V_{iL} [kN]	V_{iP} [kN]
M_0	0,0000	V_0	0,0000	X
M_1	18,5494	V_1	91,2336	
M_2	176,2841	V_2	263,8676	
M_3	546,2846	V_3	500,0000	
M_4	176,2841	V_4	X	-263,8676
M_5	18,5494	V_5		-91,2336
M_6	0,0000	V_6		0,0000

Pomocí diferenčních vztahů			
M_i [kNm]		V_i [kN]	
M_0	0,0000	V_0	0,0000
M_1	24,7325	V_1	91,2336
M_2	182,4672	V_2	263,8676
M_3	552,4677	V_3	0,0000
M_4	182,4672	V_4	-263,8676
M_5	24,7325	V_5	-91,2336
M_6	0,0000	V_6	0,0000

Příklad: nosník na pružném podkladu, průběh posunutí a reakcí

Graficky:



Příklad: nosník na pružném podkladu, průběh složek vnitřních sil

