VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta stavební

Pružnost a plasticita II

3. ročník bakalářského studia

doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.
Katedra stavební mechaniky

6

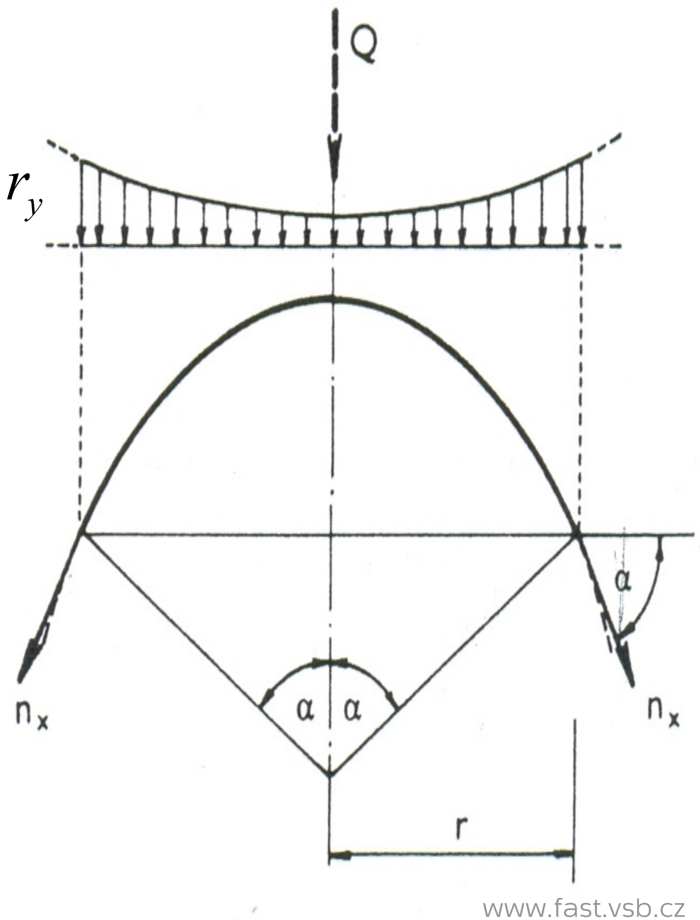
Skořepiny

Membránový stav rotačně souměrných skořepin, podmínky rovnováhy

Pro řešení membránového stavu rotačně souměrných skořepin vyplývají z podmínek rovnováhy dvě rovnice:

1. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(n_x \cdot r) - n_y \cdot r_x \cdot \cos\alpha + p_x \cdot r \cdot r_x = 0$$

2. $$\frac{n_x}{r_x} + \frac{n_y}{r_y} + p_z = 0 \text{ resp. } n_y = -\frac{n_x}{r_x} \cdot r_y - p_z \cdot r_y$$



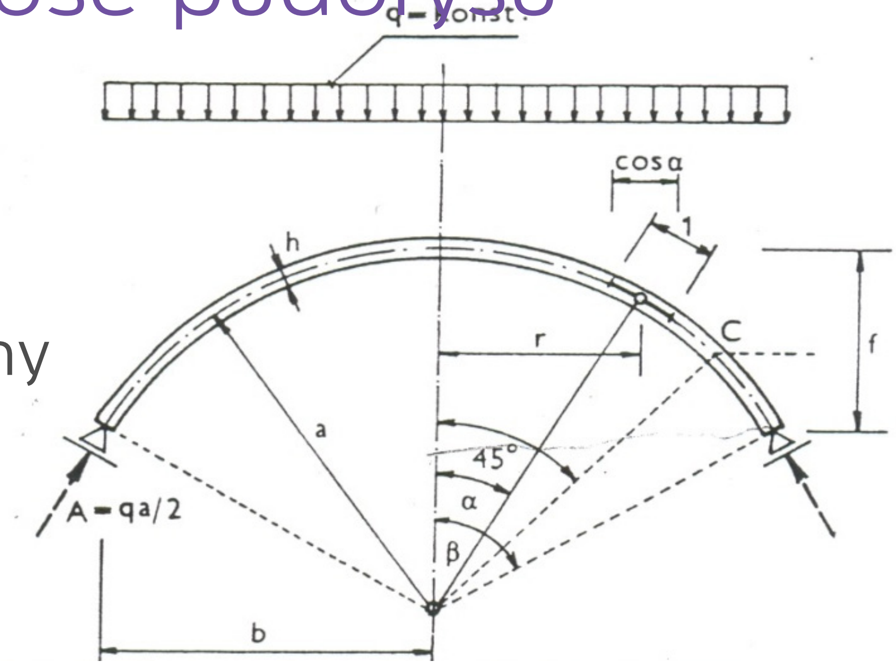
Alternativně lze rovnici 1. nahradit jednodušší podmínkou rovnováhy:

3. $$n_x = \frac{-Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin\alpha} \qquad \sin\alpha = \frac{r}{r_y}$$

Dosazením do rovnice 2. lze získat:

4. $$n_y = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_x \cdot \sin^2\alpha} - p_z \cdot r_y$$

Příklad 1: Kulová báň zatížená rovnoměrně po ploše půdorysu



Kulová báň vzniká rotací části kružnice kolem osy symetrie.

Geometricky je vymezená poloměrem střednicové plochy a a středovým úhlem β.

Lze ji zadat též poloměrem patní kružnice b a vzepětím f.

Platí: $(a-f)^2+b^2=a^2 \rightarrow a=\dfrac{f^2+b^2}{2\cdot f}$ $\quad\quad \sin\beta=\dfrac{b}{a}$

U kulové skořepiny jsou poloměry zakřivení shodné, tj. $r_x=r_y$, platí také $S_x=S_y$.

Poloměr rovnoběžky je: $r=a\cdot\sin\alpha$

Příklad 1: Kulová báň zatížená rovnoměrně po ploše půdorysu

Podmínky rovnováhy:

$$\boxed{n_x = \frac{-Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin \alpha}}$$

$$\boxed{n_y = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_x \cdot \sin^2 \alpha} - p_z \cdot r_y}$$

Výslednice zatížení působícího uvnitř kružnice o poloměru *r* je:

$$Q = q \cdot \pi \cdot r^2 = q \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

Po dosazení:

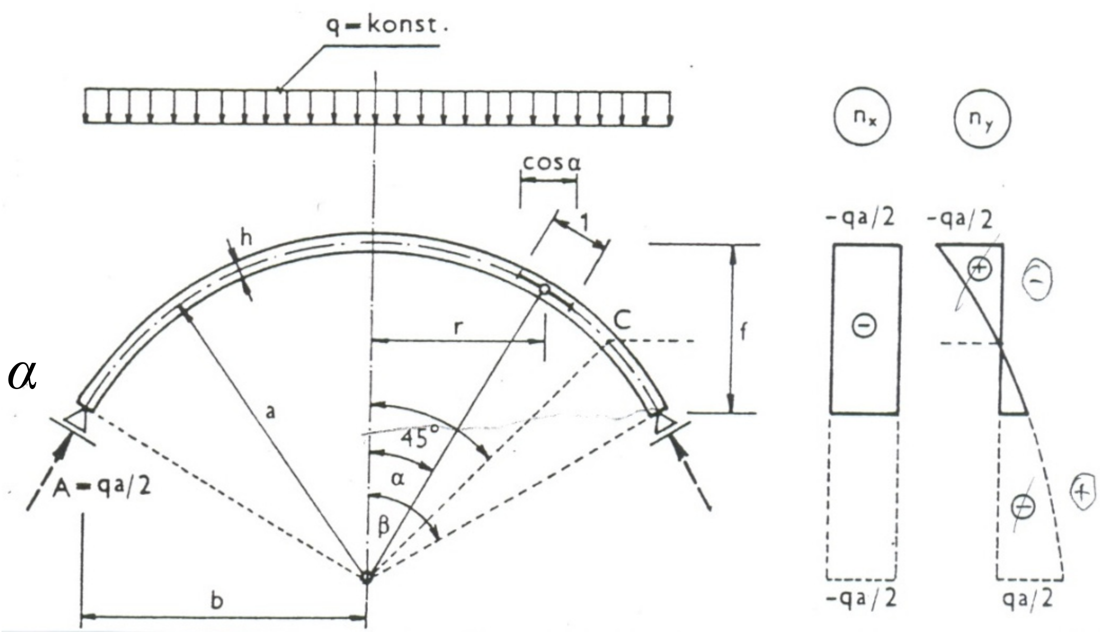
$$\boxed{r = a \cdot \sin \alpha}$$

$$n_x = -\frac{q \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sin^2 \alpha} = -\frac{q \cdot a}{2}$$

$$\boxed{p_z = q \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$n_y = \frac{q \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sin^2 \alpha} - q \cdot a \cdot \cos^2 \alpha$$

$$n_y = q \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} - \cos^2 \alpha \right)$$



Příklad 2: Kulová báň zatížená vlastní tíhou

Povrch kulové báně:

$$P = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot h \qquad h = a \cdot (1 - \cos\alpha)$$

$$P = 2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (1 - \cos\alpha)$$

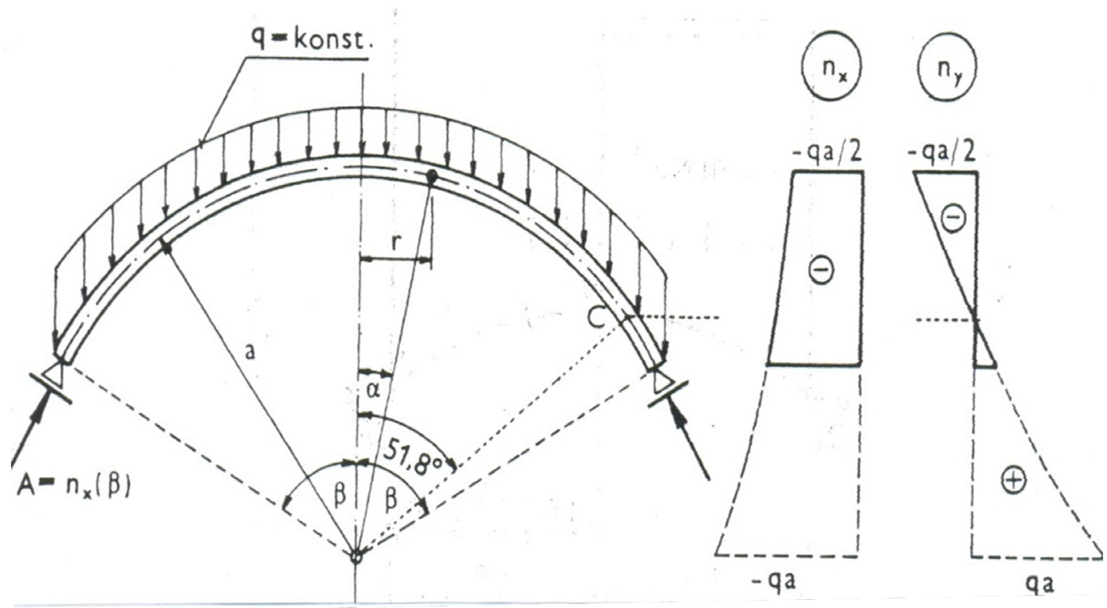
Vlastní tíha je rozložena rovnoměrně po střednicové ploše:

$$Q = q \cdot 2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (1 - \cos\alpha)$$

$$p_z = q \cdot \cos\alpha$$

Podmínky rovnováhy:

$$n_x = \frac{-Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin\alpha} \qquad n_y = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_x \cdot \sin^2\alpha} - p_z \cdot r_y$$



$$n_x = -\frac{q \cdot 2 \cdot \pi \cdot a^2 (1 - \cos\alpha)}{2 \cdot \pi \cdot (a \cdot \sin\alpha) \cdot \sin\alpha} = -\frac{1 - \cos\alpha}{\sin^2\alpha} \cdot q \cdot a = -\frac{1 - \cos\alpha}{1 - \cos^2\alpha} \cdot q \cdot a = -\frac{q \cdot a}{1 + \cos\alpha}$$

$$n_y = \frac{q \cdot 2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (1 - \cos\alpha)}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sin^2\alpha} - q \cdot \cos\alpha \cdot a = q \cdot a \cdot \left(\frac{1}{1 + \cos\alpha} - \cos\alpha \right)$$

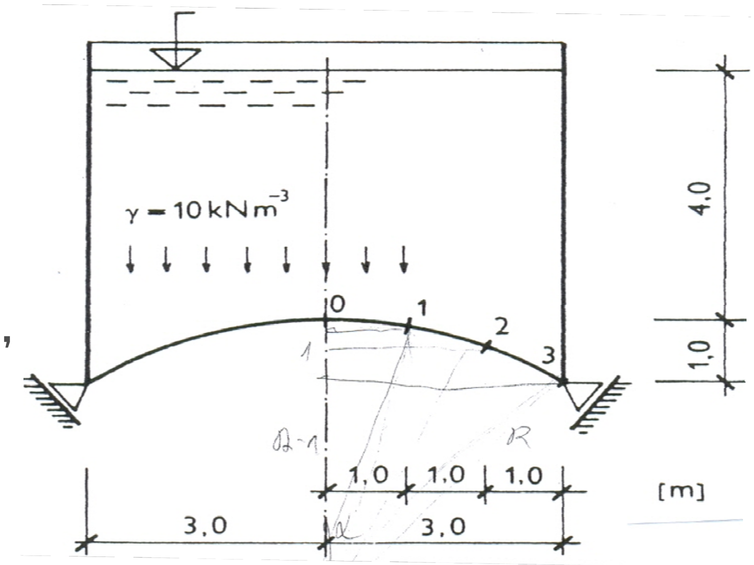
Příklad 3: Kulová báň zatížena vodním tlakem

Dno nádrže o průměru $6\ \mathrm{m}$ ve tvaru kulové skořepiny je zatíženo tlakem vody o výšce $4\ \mathrm{m}$ nad vrcholem.

Vypočtěte normálové síly n_x, n_y v řezech na poloměrech $r = 1\ \mathrm{m}$, $2\ \mathrm{m}$, $3\ \mathrm{m}$ a $4\ \mathrm{m}$.

Předpokládá se membránová stav.

Tíha vody je $10\ \mathrm{kNm^{-3}}$.



Řešení:

Objem kulové úseče je: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3a - h)$ $\qquad h = a \cdot (1 - \cos\alpha)$

Zatížení kulové úseče: $Q = \left[\pi \cdot r^2 \cdot H - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3a - h) \right] \cdot 10$

Příklad 3: Kulová báň zatížena vodním tlakem

Potřebné vztahy:

Podmínky rovnováhy:

$$n_x = \frac{-Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin \alpha}$$

$$n_y = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_x \cdot \sin^2 \alpha} - p_z \cdot r_y$$

$$(a-f)^2 + b^2 = a^2$$

Konkrétně:

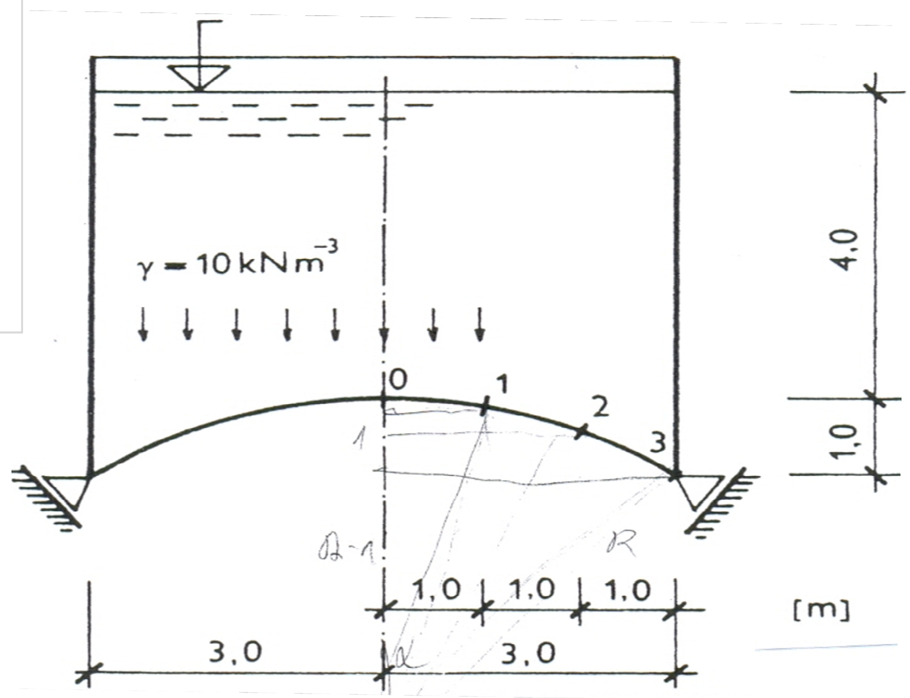
$$(a-1)^2 + 3^2 = a^2 \rightarrow 2 \cdot a = 10 \rightarrow a = 5\ \mathrm{m}$$

$H = 4\ \mathrm{m}$ pro $r = 0$,

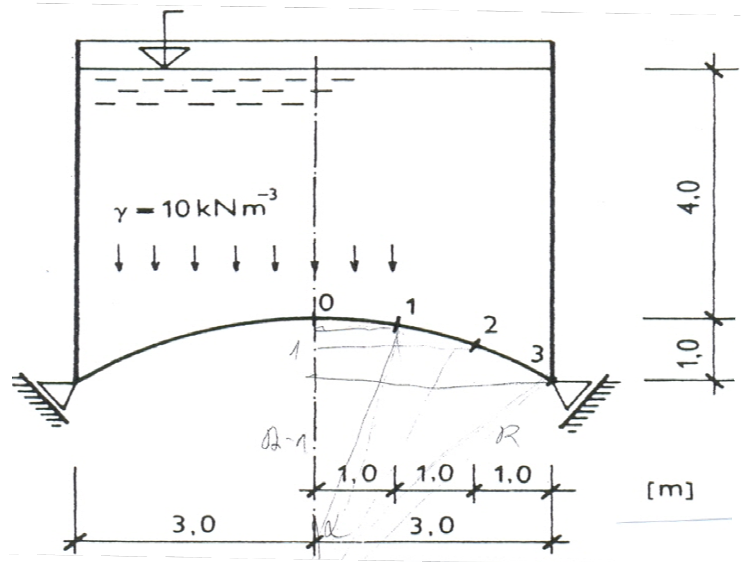
Obecně: $H = 4 + h$

$$\alpha = \arcsin \frac{r}{a}$$

$$h = a \cdot (1 - \cos \alpha)$$



Příklad 3: Kulová báň zatížena vodním tlakem



$$\boxed{Q=\left[\pi\cdot r^2\cdot H-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h^2\cdot(3a-h)\right]\cdot 10}$$

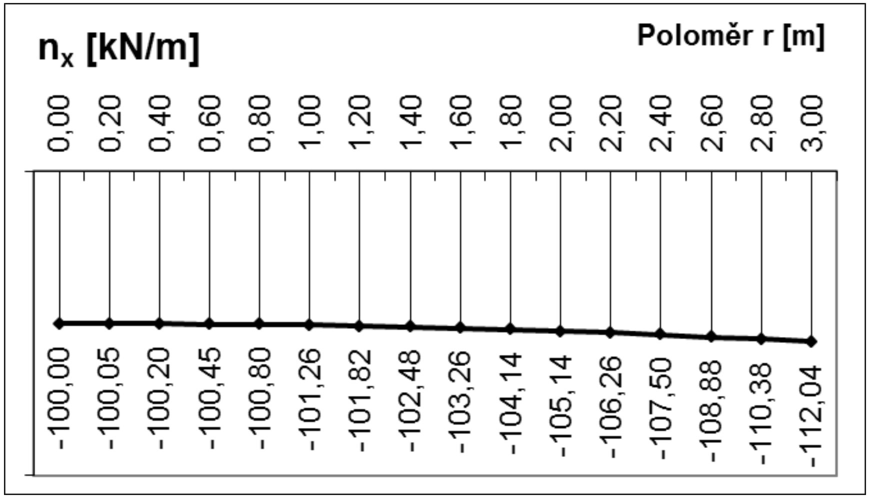
$$n_x=\frac{-\left[\pi\cdot r^2\cdot H-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h^2\cdot(3a-h)\right]\cdot 10}{2\cdot\pi\cdot r^2\cdot\frac{1}{a}}=$$

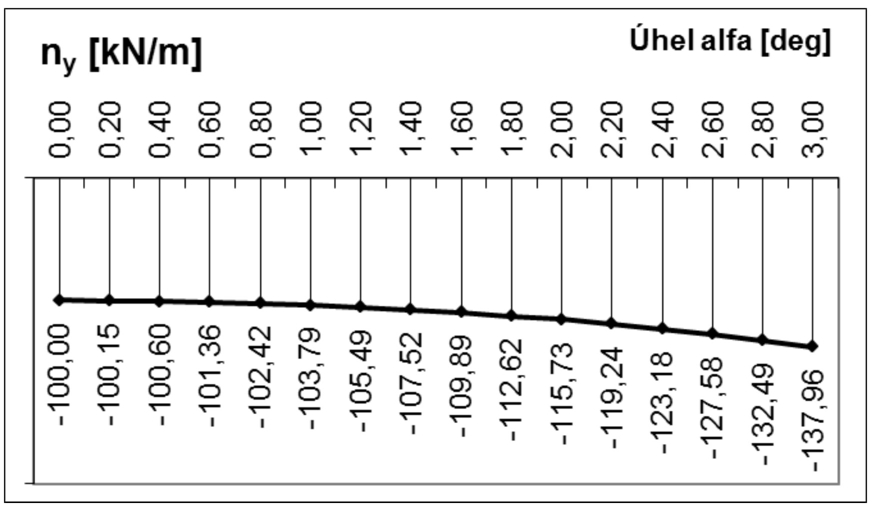
$$=\frac{-H\cdot a}{2}\cdot 10+\frac{h^2\cdot a\cdot(3\cdot a-h)}{6\cdot r^2}\cdot 10=-5\cdot H\cdot a+\frac{5}{3}\cdot\frac{a\cdot(3a-h)\cdot h^2}{r^2}$$

$$n_y=\frac{\left[\pi\cdot r^2\cdot H-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h^2\cdot(3a-h)\right]\cdot 10}{2\cdot\pi\cdot r_x\cdot\sin^2\alpha}-H\cdot 10\cdot a=$$

$$=\frac{\left[\pi\cdot r^2\cdot H-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h^2\cdot(3a-h)\right]\cdot 10}{2\cdot\pi\cdot a\cdot\frac{r^2}{a^2}}-H\cdot 10\cdot a=-5\cdot a\cdot H-\frac{5\cdot h^2\cdot(3a-h)\cdot a}{3\cdot r^2}$$

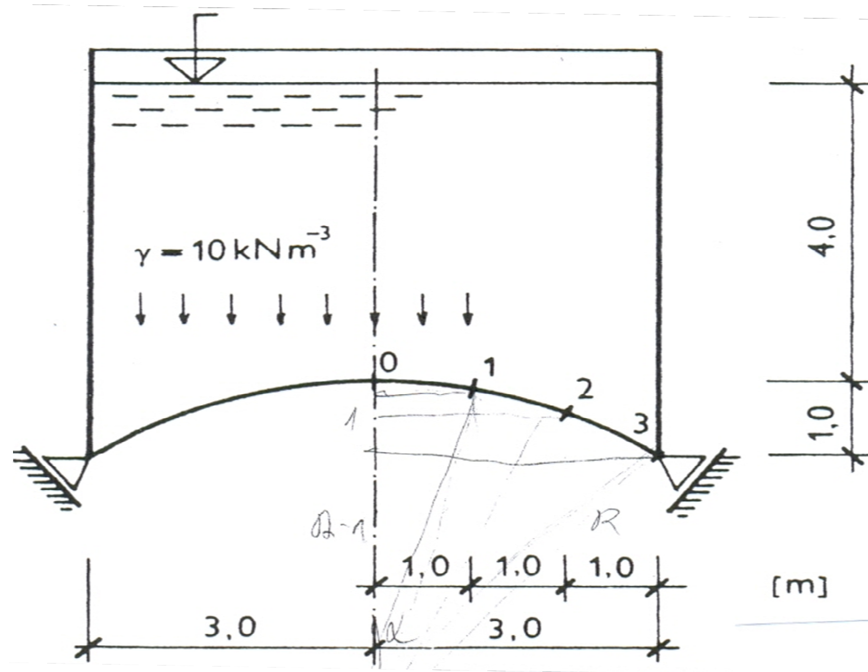
Příklad 3: Kulová báň zatížena vodním tlakem





$$n_x = -5 \cdot H \cdot a + \frac{5}{3} \cdot \frac{a \cdot (3a - h) \cdot h^2}{r^2}$$

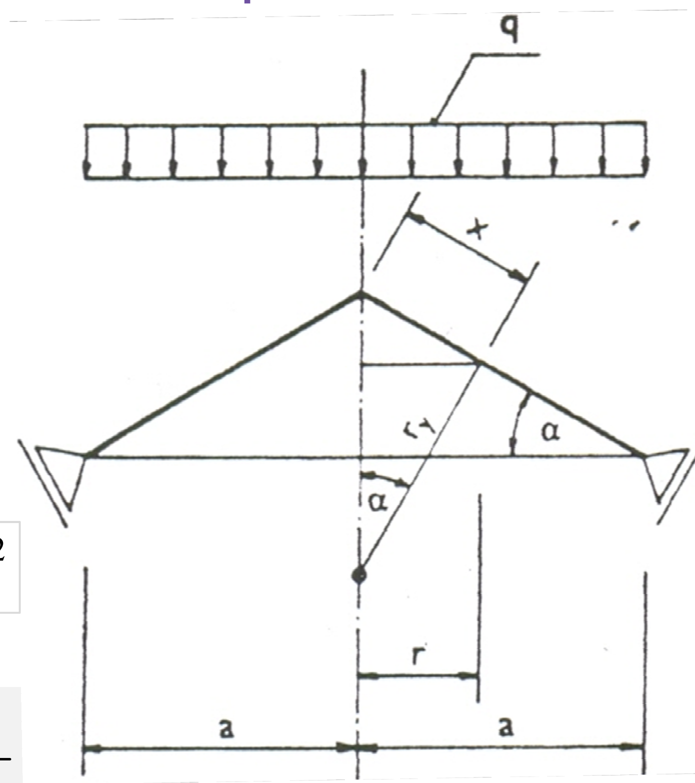
$$n_y = -5 \cdot a \cdot H - \frac{5 \cdot h^2 \cdot (3a - h) \cdot a}{3 \cdot r^2}$$



Příklad 4: Kuželová báň, zatížená rovnoměrně na půdorysnou plochu

Pro **kuželovou báň** platí $r_x = \infty$.

Příklad výpočtu pro rovnoměrné spojité zatížení na půdorys:



$$q \cdot a = q_z \cdot \frac{a}{\cos\alpha} \rightarrow q_z = q \cdot \cos\alpha$$

$$p_z = q_z \cdot \frac{r}{x} = q_z \cdot \cos\alpha = q \cdot \cos^2\alpha$$

$$Q = q \cdot \pi \cdot r^2$$

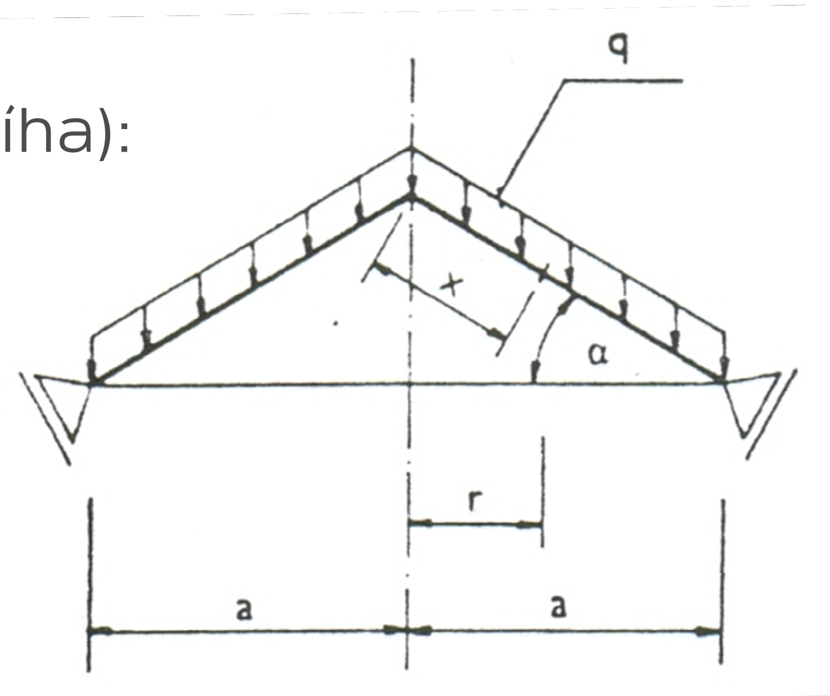
$$n_x = -\frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin\alpha} = -\frac{q \cdot \pi \cdot r^2}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin\alpha} = -\frac{q \cdot r}{2 \cdot \sin\alpha}$$

$$n_y = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_x \cdot \sin\alpha} - p_z \cdot r_y = -p_z \cdot r_y = -q \cdot \cos^2\alpha \cdot \frac{r}{\sin\alpha} = -q \cdot r \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{cotan}\,\alpha$$

$\alpha = 30^\circ$ $n_x = -q \cdot r$ $n_y = -1{,}5 \cdot q \cdot r$

Příklad 5: Kuželová báň, zatížená vlastní tíhou

Příklad výpočtu pro rovnoměrné spojité zatížení na délku (vlastní tíha):



$$p_z = q \cdot \frac{r}{x} = q \cdot \cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{r}{r_y}$$

$$r_x = \infty$$

Plocha pláště vrchlíku:

$$S = \pi \cdot r \cdot x = \frac{\pi \cdot r^2}{\cos\alpha}$$

$$Q = q \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{\cos\alpha}$$

$$n_x = -\frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin\alpha} = -\frac{q \cdot \pi \cdot r^2}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = -\frac{q \cdot r}{\sin 2\alpha}$$

$$n_y = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_x \cdot \sin\alpha} - p_z \cdot r_y = -q \cdot \cos\alpha \cdot \frac{r}{\sin\alpha} = -q \cdot r \cdot \operatorname{cotan}\alpha$$

Příklad 6: Rotační válec zatížený hydrostatickým tlakem

Pro **rotační válec** platí: $r_x = \infty$, $r_y = r = a$, $\alpha = 90^{o}$.

$$n_x = -\frac{Q}{2\cdot\pi\cdot r\cdot\sin\alpha} = -\frac{Q}{2\cdot\pi\cdot a}$$

$$n_y = \frac{Q}{2\cdot\pi\cdot r_x\cdot\sin^2\alpha} - p_z\cdot r_y = -p_z\cdot a$$

Účinek tlaku kapaliny o objemové tíze γ:

$$\boxed{Q = 0}$$

$$\boxed{p_z = -\gamma\cdot x}$$

$$n_x = 0$$

$$n_y = \gamma\cdot a\cdot x$$