

# Pružnost a plasticita II

3. ročník bakalářského studia

doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.  
Katedra stavební mechaniky



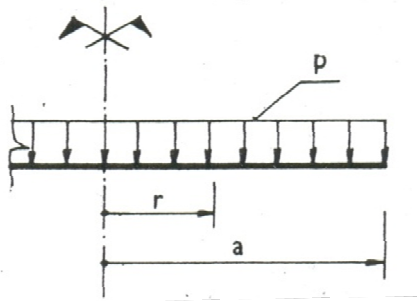
# 7-8

Řešení kruhových  
a mezikruhových  
nosných desek

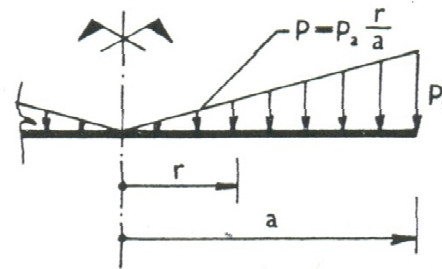


# Základní vztahy pro výpočet kruhových a mezikruhových desek

$$w(r) = w_0(r) + C_1 + C_2 \cdot r^2 + C_3 \cdot \ln r + C_4 \cdot r^2 \cdot \ln r \quad r \in \langle 0, a \rangle$$



$$w_0(r) = \frac{p \cdot r^4}{64 \cdot D}$$



$$w_0(r) = \frac{p_a \cdot r^5}{225 \cdot a \cdot D}$$

$$m_r = -D \cdot \left( w'' + \mu \cdot \frac{w'}{r} \right)$$

$$m_\varphi = -D \cdot \left( \frac{w'}{r} + \mu \cdot w'' \right)$$

$$q_r = -D \cdot \left( w''' + \frac{1}{r} \cdot w'' - \frac{1}{r^2} \cdot w' \right)$$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$$

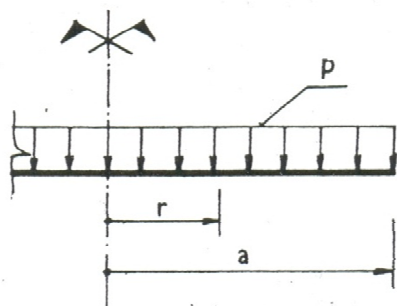
$$w'(r) = w'_0(r) + 2 \cdot C_2 \cdot r + \frac{C_3}{r} + 2 \cdot C_4 \cdot r \cdot \ln r + C_4 \cdot r$$

$$w''(r) = w''_0(r) + 2 \cdot C_2 - \frac{C_3}{r^2} + (2 \cdot C_4 \cdot \ln r + 2 \cdot C_4) + C_4$$

$$w'''(r) = w'''_0(r) + \frac{2 \cdot C_3}{r^3} + \frac{2 \cdot C_4}{r}$$

# Kruhové a mezikruhové desky, partikulární řešení deskové rovnice

Např.:



$$w_0(r) = \frac{p \cdot r^4}{64 \cdot D}$$

$$w_0'(r) = \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot D}$$

$$w_0''(r) = \frac{3 \cdot p \cdot r^2}{16 \cdot D}$$

$$w_0'''(r) = \frac{3 \cdot p \cdot r}{8 \cdot D}$$

$$w_0''''(r) = \frac{3 \cdot p}{8 \cdot D}$$

$$w'''' + \frac{2}{r} \cdot w''' - \frac{1}{r^2} \cdot w'' + \frac{1}{r^3} \cdot w' = \frac{p}{D}$$

$$\begin{aligned} & \frac{3 \cdot p}{8 \cdot D} + \frac{2}{r} \cdot \frac{3 \cdot p \cdot r}{8 \cdot D} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{3 \cdot p \cdot r^2}{16 \cdot D} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot D} = \\ & = \frac{p}{D} \cdot \left( \frac{3}{8} + \frac{6}{8} - \frac{3}{16} + \frac{1}{16} \right) = \frac{p}{D} \cdot \left( \frac{6+12-3+1}{16} \right) = \frac{p}{D} \end{aligned}$$

# Kruhové a mezikruhové desky, okrajové podmínky

Integrační konstanty  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  a  $C_4$  vyplývají z okrajových podmínek. Opět platí:

- prosté podepření:

$$w = 0$$

$$m_r = 0$$

$$m_r = -D \cdot \left( w'' + \mu \cdot \frac{w'}{r} \right) = 0$$

- vetknutí:

$$w = 0$$

$$w' = 0$$

- volný okraj:

$$m_r = 0$$

$$q_r = 0$$

$$m_r = -D \cdot \left( w'' + \mu \cdot \frac{w'}{r} \right) = 0$$

$$q_r = -D \cdot \left( w''' + \frac{1}{r} \cdot w'' - \frac{1}{r^2} \cdot w' \right) = 0$$

# Příklad 1: kruhová deska rovnoměrně zatížená, na okraji vetknutá

Konkrétní zadání:  $a = 5 \text{ m}$     $h = 0,05 \text{ m}$     $p = 5 \text{ kN/m}^2$   
 $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$     $\mu = 0,3$

Řešení:  $w(r) = w_0(r) + C_1 + C_2 \cdot r^2 + C_3 \cdot \ln r + C_4 \cdot r^2 \cdot \ln r$

$$C_3 = C_4 = 0 \quad w_0(r) = \frac{p \cdot r^4}{64 \cdot D}$$

Okrajové podmínky:

$$w(r = a) = 0$$

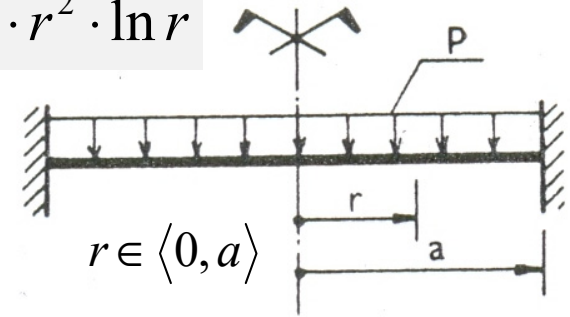
$$w(r = a) = \frac{p \cdot a^4}{64 \cdot D} + C_1 + C_2 \cdot a^2 = 0$$

$$w'(r = a) = 0$$

$$w'(r = a) = \frac{p \cdot a^3}{16 \cdot D} + 2 \cdot C_2 \cdot a = 0$$

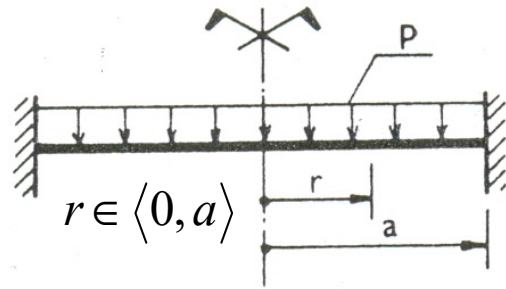
$$C_1 = \frac{p \cdot a^4}{64 \cdot D}$$

$$C_2 = -\frac{p \cdot a^2}{32 \cdot D}$$



$$w(r) = w_0(r) + C_1 + C_2 \cdot r^2 = \frac{p \cdot r^4}{64 \cdot D} + \frac{p \cdot a^4}{64 \cdot D} - \frac{p \cdot a^2}{32 \cdot D} \cdot r^2 = \frac{p}{64 \cdot D} \cdot (r^4 + a^4 - 2 \cdot a^2 \cdot r^2)$$

# Příklad 1: kruhová deska rovnoměrně zatížená, na okraji vetknutá



Funkce výsledných veličin:

$$w(r) = \frac{p}{64 \cdot D} \cdot (a^2 - r^2)^2$$

$$w'(r) = w'_0(r) + 2 \cdot C_2 \cdot r$$

$$w''(r) = w''_0(r) + 2 \cdot C_2$$

$$w'(r) = \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot D} - 2 \cdot \frac{p \cdot a^2}{32 \cdot D} \cdot r = \frac{p \cdot r}{16 \cdot D} \cdot (r^2 - a^2)$$

$$w''(r) = \frac{3 \cdot p \cdot r^2}{16 \cdot D} - 2 \cdot \frac{p \cdot a^2}{32 \cdot D} = \frac{p}{32 \cdot D} \cdot (6 \cdot r^2 - 2 \cdot a^2)$$

$$m_r = -D \cdot \left( w'' + \mu \cdot \frac{w'}{r} \right) \quad m_\varphi = -D \cdot \left( \frac{w'}{r} + \mu \cdot w'' \right)$$

$$m_r = -D \cdot \left[ \frac{p}{32 \cdot D} \cdot (6 \cdot r^2 - 2 \cdot a^2) + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{p \cdot r}{16 \cdot D} \cdot (r^2 - a^2) \right]$$

$$m_r = \frac{p}{16} \cdot [a^2 \cdot (1 + \mu) - r^2 \cdot (3 + \mu)]$$

$$m_\varphi = \frac{p}{16} \cdot [a^2 \cdot (1 + \mu) - r^2 \cdot (1 + 3 \cdot \mu)]$$

w

$m_r$

$m_\varphi$

$$w_{\max} = \frac{pa^4}{64D}$$

$$-\frac{1}{8}pa^2$$

$$\frac{1+\mu}{16}pa^2$$

$$-\frac{\mu}{8}pa^2$$

$$\frac{1+\mu}{16}pa^2$$

# Příklad 1: kruhová deska rovnoměrně zatížená, na okraji vetknutá

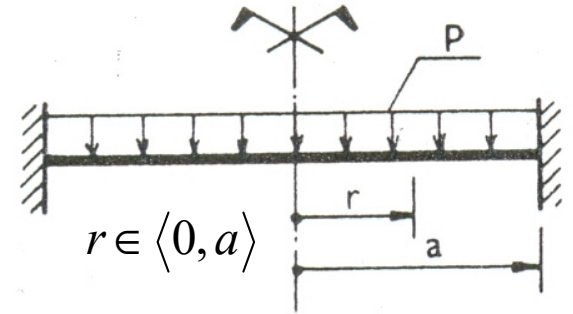
Funkce výsledných veličin:

$$q_r = -D \cdot \left( w''' + \frac{1}{r} \cdot w'' - \frac{1}{r^2} \cdot w' \right)$$

$$w'(r) = \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot D} - 2 \cdot \frac{p \cdot a^2}{32 \cdot D} \cdot r = \frac{p \cdot r}{16 \cdot D} \cdot (r^2 - a^2)$$

$$w''(r) = \frac{3 \cdot p \cdot r^2}{16 \cdot D} - 2 \cdot \frac{p \cdot a^2}{32 \cdot D} = \frac{p}{32 \cdot D} \cdot (6 \cdot r^2 - 2 \cdot a^2) \qquad w'''(r) = \frac{3 \cdot p \cdot r}{8 \cdot D}$$

$$q_r = -D \cdot \left[ \frac{3 \cdot p \cdot r}{8 \cdot D} + \frac{1}{r} \cdot \frac{p}{32 \cdot D} \cdot (6 \cdot r^2 - 2 \cdot a^2) - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{p \cdot r}{16 \cdot D} \cdot (r^2 - a^2) \right]$$

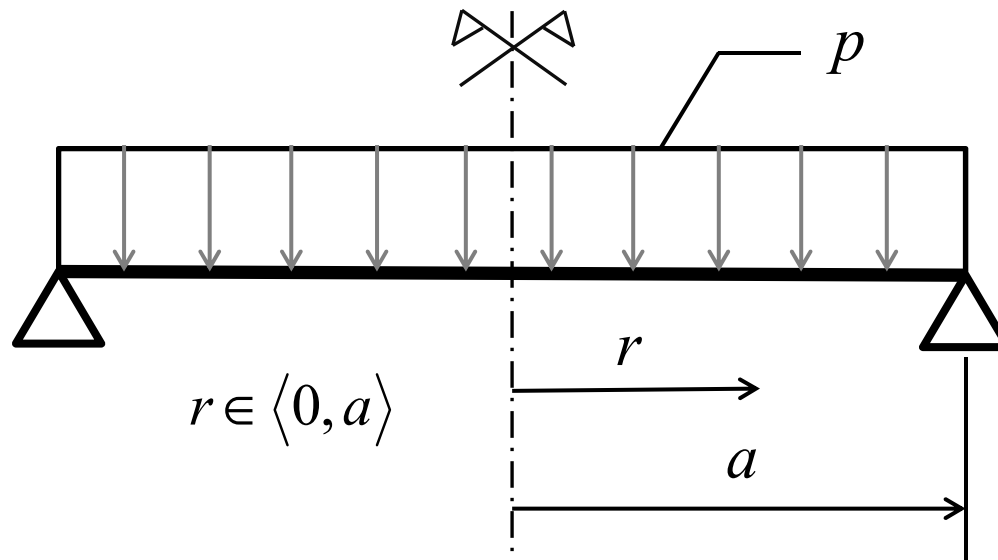


$$q_r = -\frac{1}{2} \cdot p \cdot r$$



# Příklad 2: kruhová deska rovnoměrně zatížená, na okraji prostě uložená

Zadání: Určete u kruhové desky příslušné přetvárné veličiny a složky měrných vnitřních sil.



Konkrétní zadání:  $a = 5 \text{ m}$      $h = 0,05 \text{ m}$      $p = 5 \text{ kN/m}^2$   
 $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$      $\mu = 0,3$

# Příklad 3: kruhová deska zatížená břemenem ve svém středu

Konkrétní zadání:  $a = 5 \text{ m}$   $h = 0,05 \text{ m}$   $P = 200 \text{ kN}$   
 $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$   $\mu = 0,3$

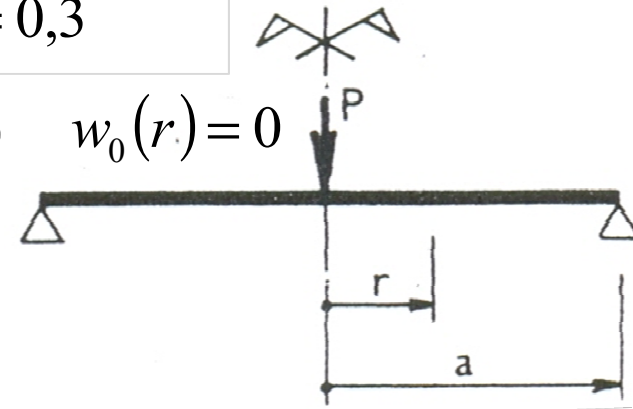
Řešení:  $w(r) = C_1 + C_2 \cdot r^2 + C_4 \cdot r^2 \cdot \ln r$   $C_3 = 0$   $w_0(r) = 0$

$$w(r) = C_1 + C_2 \cdot r^2 + C_4 \cdot r^2 \cdot \ln r$$

$$w'(r) = 2 \cdot C_2 \cdot r + 2 \cdot C_4 \cdot r \cdot \ln r + C_4 \cdot r$$

$$w''(r) = 2 \cdot C_2 + 2 \cdot C_4 \cdot \ln r + 3 \cdot C_4$$

$$w'''(r) = \frac{2 \cdot C_4}{r}$$



$$q_r = -D \cdot \left( w''' + \frac{1}{r} \cdot w'' - \frac{1}{r^2} \cdot w' \right)$$

$$q_r = -D \cdot \left[ 2 \cdot C_4 \cdot \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \cdot (2 \cdot C_2 + 2 \cdot C_4 \cdot \ln r + 3 \cdot C_4) - \frac{1}{r^2} \cdot (2 \cdot C_2 \cdot r + 2 \cdot C_4 \cdot r \cdot \ln r + C_4 \cdot r) \right]$$

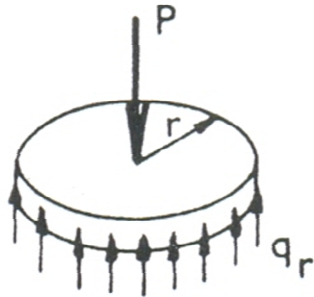
$$q_r = -4 \cdot D \cdot \frac{C_4}{r} = -\frac{P}{2 \cdot \pi \cdot r} \Rightarrow C_4 = \frac{P}{8 \cdot \pi \cdot D}$$

Rovnováha vyřatého kotouče

$$w(r) = C_1 + C_2 \cdot r^2 + \frac{P}{8 \cdot \pi \cdot D} \cdot r^2 \cdot \ln r$$

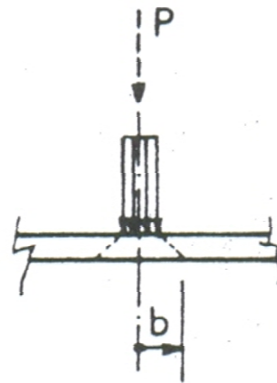
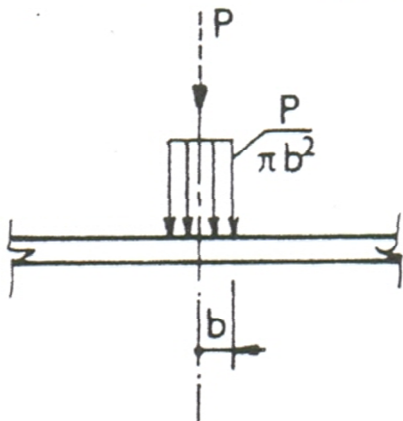
# Příklad 3: kruhová deska zatížená břemenem ve svém středu

Rovnováha na vytřátém kotouči:



$$q_r = -\frac{P}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

rovnováha vytřátého kotouče



Platí za předpokladu rovnoměrného rozložení síly na ploše (vytřátém kotouči) o poloměru  $b$

Poznámka: posouvající síla  $q_r$  má ve skutečnosti záporné znaménko.

# Příklad 3: kruhová deska zatížená břemenem ve svém středu

$$w(r) = C_1 + C_2 \cdot r^2 + \frac{P}{8 \cdot \pi \cdot D} \cdot r^2 \cdot \ln r$$

Okrajové podmínky:

$$w(r = a) = 0 \quad m_r(r = a) = 0$$

$$C_1 = \frac{P \cdot a^2}{16 \cdot \pi \cdot D} \cdot \frac{3 + \mu}{1 + \mu}$$

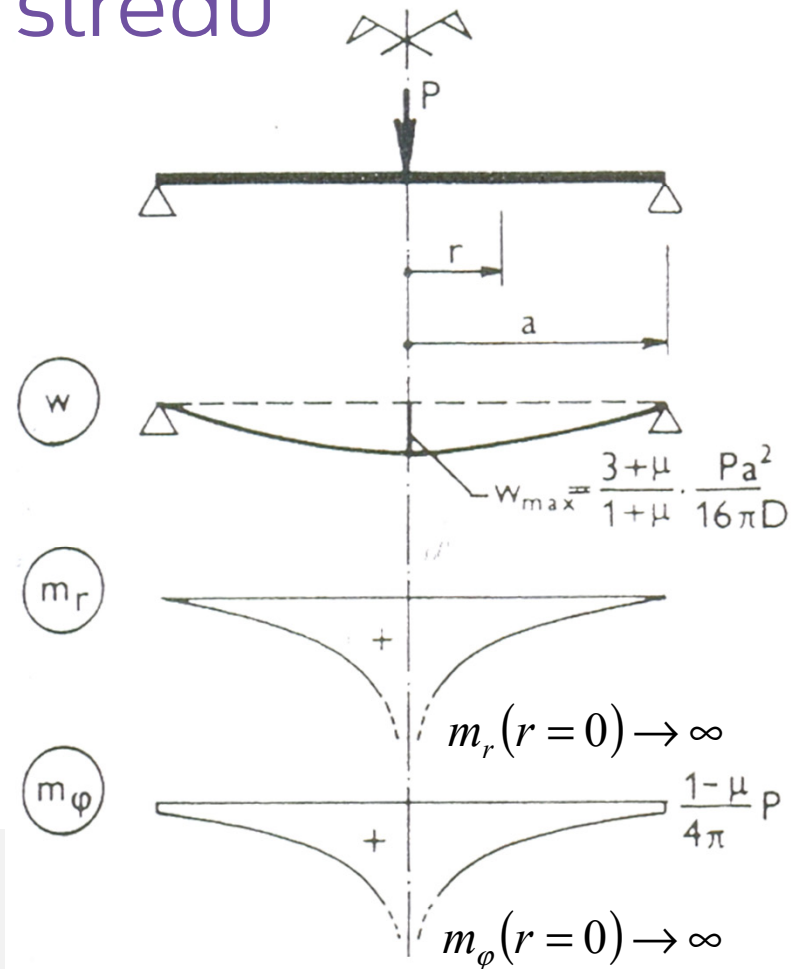
$$C_2 = -\frac{P}{16 \cdot \pi \cdot D} \cdot \left( 2 \cdot \ln a + \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right)$$

$$w(r) = \frac{P}{16 \cdot \pi \cdot D} \cdot \left[ \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \cdot (a^2 - r^2) + 2 \cdot r^2 \cdot \ln \frac{r}{a} \right]$$

$$m_r = -\frac{P}{4 \cdot \pi} \cdot (1 + \mu) \cdot \ln \frac{r}{a}$$

$$m_\varphi = \frac{P}{4 \cdot \pi} \cdot \left[ (1 - \mu) - (1 + \mu) \cdot \ln \frac{r}{a} \right]$$

$$q_r = -\frac{P}{2 \cdot \pi \cdot r}$$



# Příklad 4: mezikruhová deska

$$w(r) = w_0(r) + C_1 + C_2 \cdot r^2 + C_3 \cdot \ln r + C_4 \cdot r^2 \cdot \ln r$$

Okrajové podmínky:

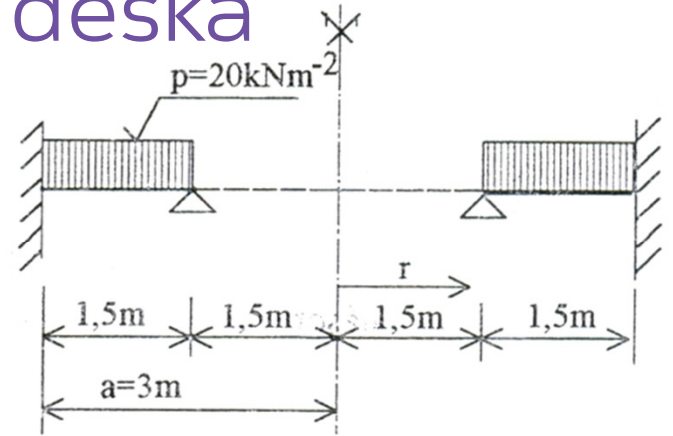
$$w_0(r) = \frac{p \cdot r^4}{64 \cdot D}$$

$$w\left(r = \frac{a}{2}\right) = 0$$

$$m_r\left(r = \frac{a}{2}\right) = 0$$

$$w(r = a) = 0$$

$$w'(r = a) = 0$$



$$r \in \left\langle \frac{a}{2}, a \right\rangle \quad h = 0,15 \text{ m} \quad \mu = 0,2$$

$$E = 2,8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$C_1 = -\frac{13,136}{D} [\text{m}]$$

$$C_2 = \frac{12,487}{D} [\text{m}^{-1}]$$

$$C_3 = -\frac{16,605}{D} [\text{m}]$$

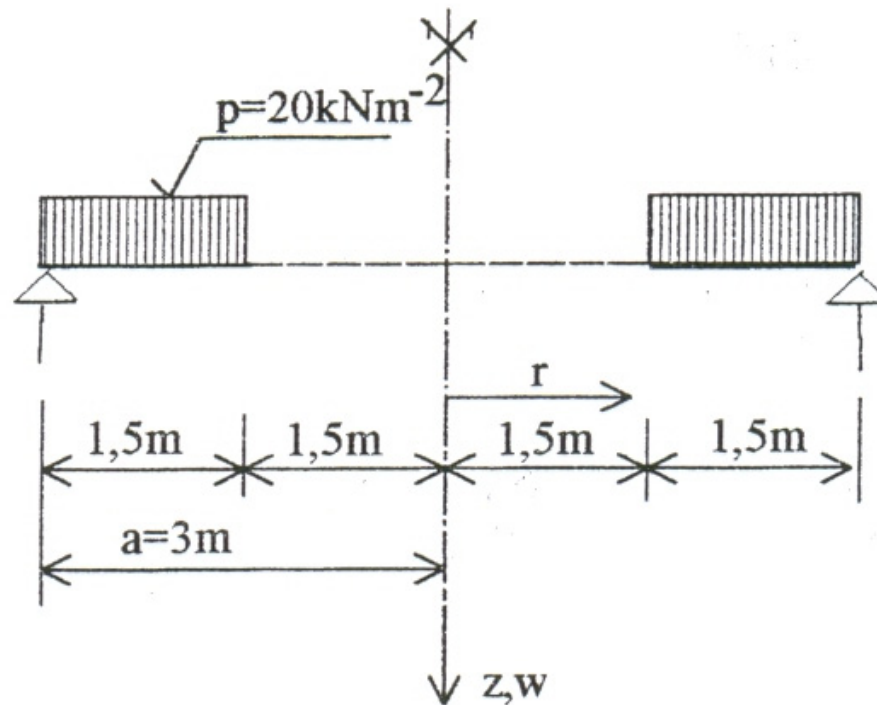
$$C_4 = -\frac{10,753}{D} [\text{m}^{-1}]$$

$$m_r = -D \cdot \left[ \frac{3 \cdot p \cdot r^2}{16 \cdot D} + 2 \cdot C_2 - \frac{C_3}{r^2} + C_4 \cdot (2 \cdot \ln r + 3) + \frac{\mu}{r} \cdot \left( \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot D} + 2 \cdot r \cdot C_2 + \frac{C_3}{r} + C_4 \cdot r \cdot (2 \cdot \ln r + 1) \right) \right]$$

$$m_\varphi = -D \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot D} + 2 \cdot r \cdot C_2 + \frac{C_3}{r^2} + C_4 \cdot r \cdot (2 \cdot \ln r + 1) \right) + \mu \cdot \left( \frac{3 \cdot p \cdot r^2}{16 \cdot D} + 2 \cdot C_2 - \frac{C_3}{r^2} + C_4 \cdot (2 \cdot \ln r + 3) \right) \right]$$

## Příklad 5: mezikruhová deska

Zadání: Určete u mezikruhové desky příslušné přetvárné veličiny a složky měrných vnitřních sil.



Konkrétní zadání:  $a = 3\text{ m}$      $h = 0,15\text{ m}$      $p = 20\text{ kN/m}^2$   
 $E = 2,8 \cdot 10^4\text{ MPa}$      $\mu = 0,2$