VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta stavební

Pružnost a plasticita II

3. ročník bakalářského studia

doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.
Katedra stavební mechaniky

5-6

Řešení pravoúhlých nosných desek metodou sítí

Základní rovnice desek

Základní rovnice desek

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \qquad \text{resp.} \qquad \Delta\Delta w(x,y) = \frac{p(x,y)}{D}$$

Laplaceův operátor $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Desková tuhost

$$D = \frac{E.h^3}{12.\left(1-\mu^2\right)} \qquad [\mathrm{Pa.m^3 = N.m}]$$

E … modul pružnosti v tahu a tlaku

h … tloušťka desky

$\mu(\upsilon)$ … Poissonův součinitel příčné deformace

Řešení nosných desek metodou sítí, diferenční vztahy

1. $$\frac{\partial w_{i,j}}{\partial x} = \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial w_{i,j}}{\partial y} = \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

$$\Delta x = x_{i+1,j} - x_{i,j} = x_{i,j} - x_{i-1,j}$$

$$2\Delta x = x_{i+1,j} - x_{i-1,j}$$

$$\Delta y = y_{i,j+1} - y_{i,j} = y_{i,j} - y_{i,j-1}$$

$$2\Delta y = y_{i,j+1} - y_{i,j-1}$$

2. $$\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

3. $$\frac{\partial^3 w_{i,j}}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 w_{i+1,j}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 w_{i-1,j}}{\partial x^2}}{2\Delta x} = \frac{w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - w_{i-2,j}}{2\Delta x^3}$$

Řešení nosných desek metodou sítí, diferenční vztahy

4. $$\frac{\partial^4 w_{i,j}}{\partial x^4}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial^2 w_{i+1,j}}{\partial x^2}-2.\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_{i-1,j}}{\partial x^2}}{\Delta x^2}=\frac{w_{i+2,j}-4w_{i+1,j}+6w_{i,j}-4w_{i-1,j}+w_{i-2,j}}{\Delta x^4}$$

$$\frac{\partial^4 w_{i,j}}{\partial y^4}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}.\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial y^2}=\frac{\frac{\partial^2 w_{i,j+1}}{\partial y^2}-2.\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_{i,j-1}}{\partial y^2}}{\Delta y^2}=\frac{w_{i,j+2}-4w_{i,j+1}+6w_{i,j}-4w_{i,j-1}+w_{i,j-2}}{\Delta y^4}$$

Smíšené derivace

$$\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}.\frac{\partial w_{i,j}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}.\frac{w_{i,j+1}-w_{i,j-1}}{2\Delta y}=\frac{w_{i+1,j+1}+w_{i-1,j-1}-w_{i+1,j-1}-w_{i-1,j+1}}{4\Delta x \Delta y}$$

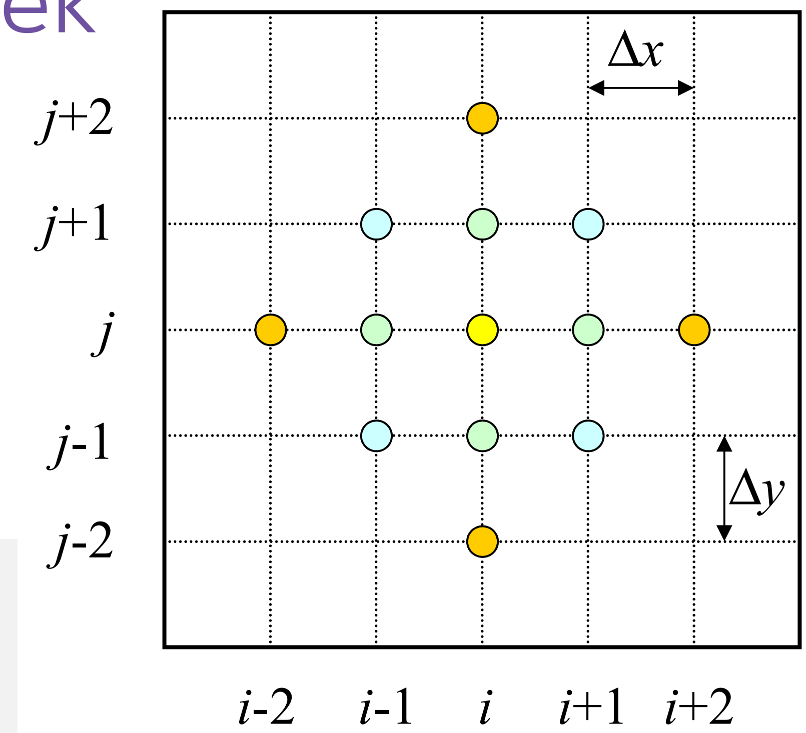
$$\frac{\partial^4 w_{i,j}}{\partial x^2 \partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x^2}.\frac{w_{i,j+1}-2w_{i,j}+w_{i,j-1}}{\Delta y^2}=$$

$$=\frac{w_{i+1,j+1}-2w_{i+1,j}+w_{i+1,j-1}-2\left(w_{i,j+1}-2w_{i,j}+w_{i,j-1}\right)+w_{i-1,j+1}-2w_{i-1,j}+w_{i-1,j-1}}{\Delta x^2 \Delta y^2}$$

Základní rovnice desek

Základní rovnice desek

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$



$$\Delta\Delta w_{i,j} = \left\{ \begin{array}{l} w_{i,j}.\left(8+6\alpha^2+6\beta^2\right)- \\ -4.\begin{bmatrix} w_{i+1,j}.\left(1+\beta^2\right)+ \\ +w_{i-1,j}.\left(1+\beta^2\right)+ \\ +w_{i,j+1}.\left(1+\alpha^2\right)+ \\ +w_{i,j-1}.\left(1+\alpha^2\right) \end{bmatrix}+ \\ +2.\begin{pmatrix} w_{i+1,j+1}+w_{i+1,j-1}+ \\ +w_{i-1,j+1}+w_{i-1,j-1} \end{pmatrix}+ \\ +\alpha^2.\left(w_{i,j+2}+w_{i,j-2}\right)+\beta^2.\left(w_{i+2,j}+w_{i-2,j}\right) \end{array} \right\} \frac{1}{\Delta x^2 \Delta y^2} = \frac{p}{D}$$

kde

$$\alpha^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 \quad \beta^2 = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

Okrajové podmínky

1. Desky na okraji prostě podepřené

$$w = 0 \qquad m_{x,y} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} = 0 \qquad -\beta.\left(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}\right) = -\beta.\left(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0 \qquad -\alpha.\left(w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}\right) = -\alpha.\left(w_{i,j+1} + w_{i,j-1}\right) = 0$$

2. Desky s vetknutými okraji

$$w = 0 \qquad w' = 0 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}; \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$$

Okraj lze považovat za osu symetrie

$$\frac{\partial w_{i,j}}{\partial x} = \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2\Delta x} = 0 \qquad \frac{\partial w_{i,j}}{\partial y} = \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2\Delta y} = 0 \qquad w_{i+1,j} = w_{i-1,j}$$

Přesněji – interpolace průhybové plochy parabolou 3°

(čtyřbodová diferenční aproximace)

$$\frac{\partial w_{i,j}}{\partial x} \approx \frac{-2w_{i-1,j} - 3w_{i,j} + 6w_{i+1,j} - w_{i+2,j}}{6.\Delta x} = 0 \qquad w_{i-1,j} = 3w_{i+1,j} - \frac{w_{i+2,j}}{2}$$

Okrajové podmínky

3. Desky s volnými okraji

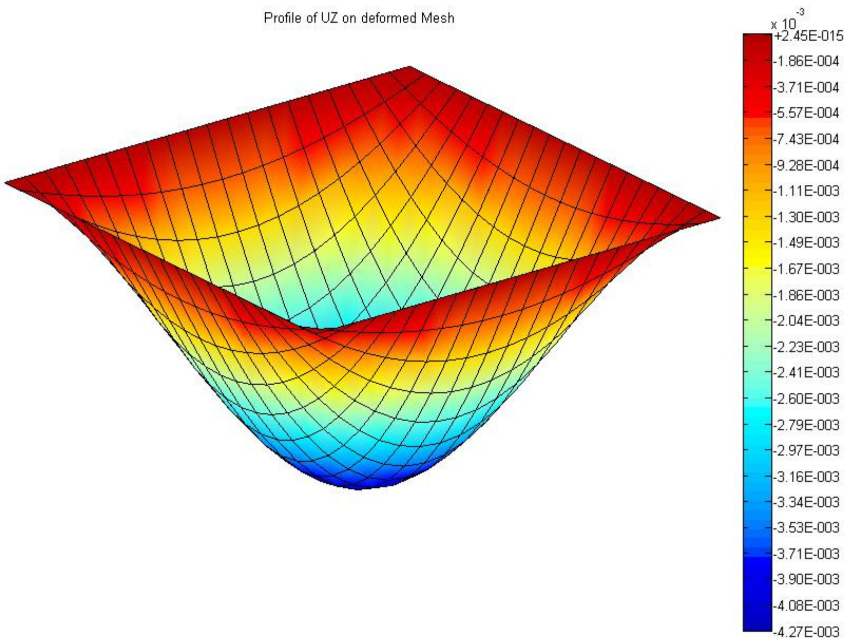
   Reakce na okraji nulové

$$m_{x,y} = 0 \qquad q_{x,y} = 0$$

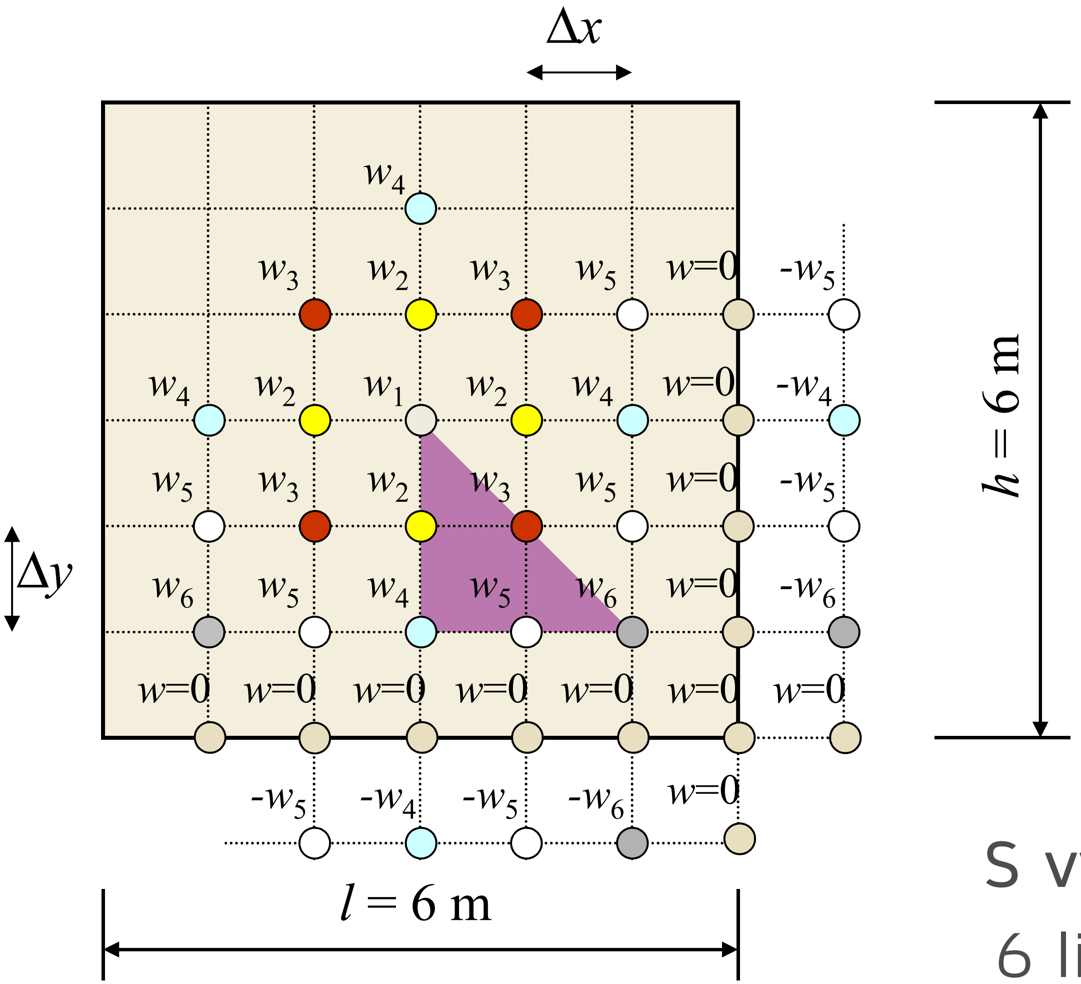
Po vyřešení soustavy rovnic:

Skutečný průhyb v uzlových bodech:

$$w_{i,j} \quad [\mathrm{m}]$$



Nosná deska s prostě podepřeným okrajem

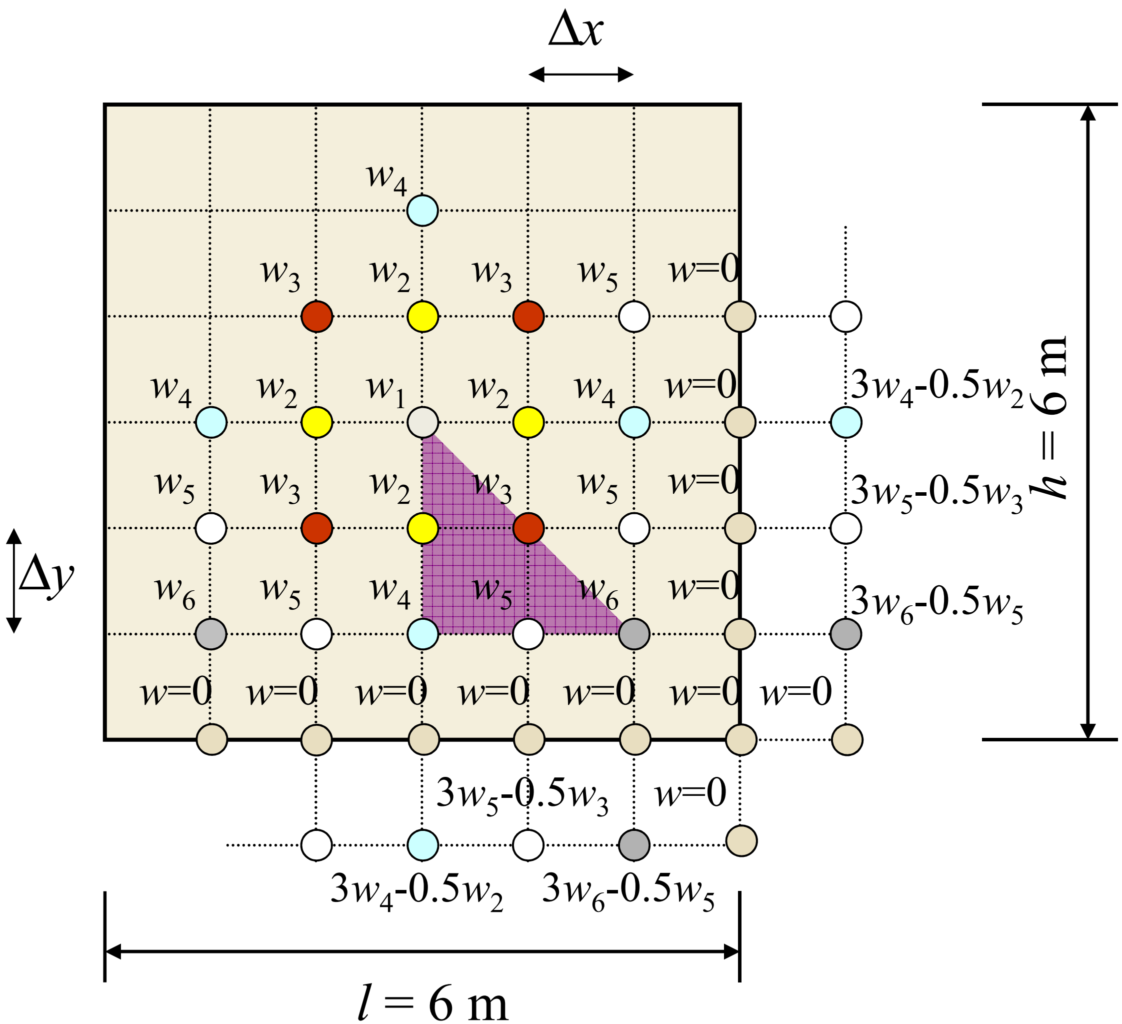


S využitím symetrie:

6 lineárních rovnic

6 neznámých $w_1 \dots w_6$

Nosná deska s vetknutým okrajem



S využitím symetrie:

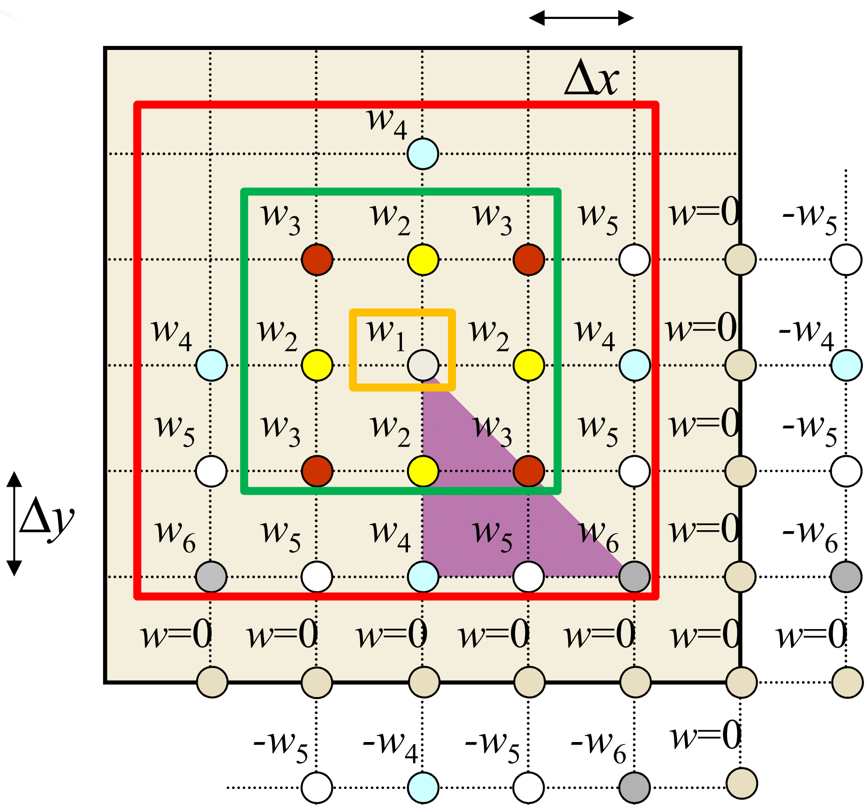
6 lineárních rovnic

6 neznámých $w_1 \ldots w_6$

Závěr:

pro přesné řešení desky po okraji vetknuté je nutno zvýšit hustotu sítě.

Sestavení soustavy rovnic 1. řádek

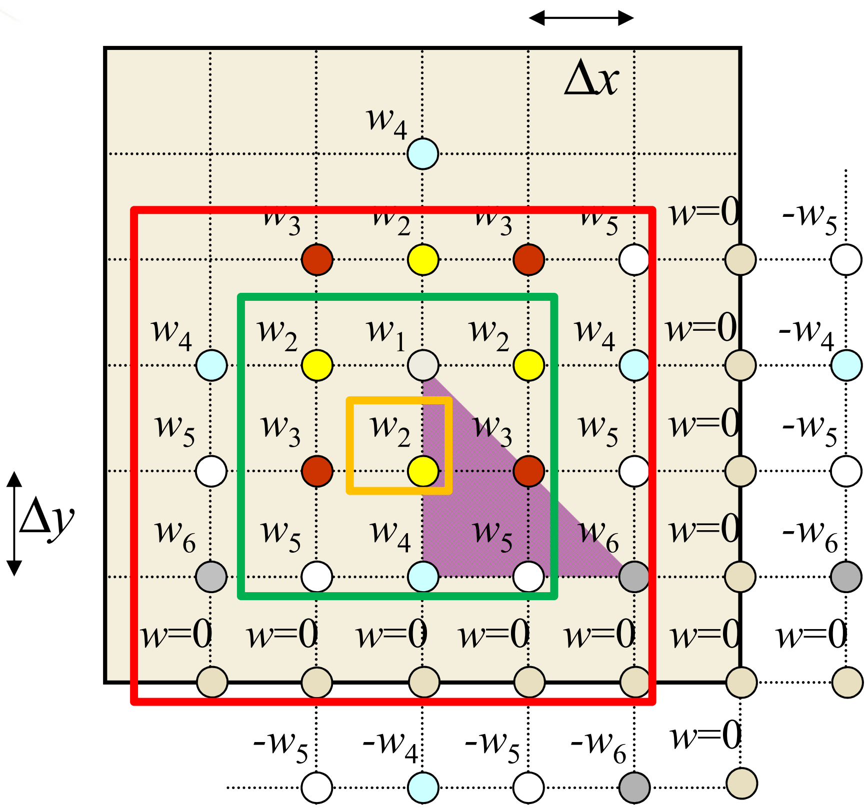


Diferenční schéma

	i-2	i-1	i	i+1	i+2
j+2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
j+1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j	1,000	-8,000	20,000	-8,000	1,000
j-1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j-2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000

bod	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	*P.S.*
1	20	-32	8	4	0	0	0,00026
2	-8	25	-16	-8	6	0	0,00026
3	2	-16	22	4	-16	2	0,00026
4	1	-8	4	19	-16	2	0,00026
5	0	3	-8	-8	22	-8	0,00026
6	0	0	2	2	-16	18	0,00026

Sestavení soustavy rovnic 2. řádek

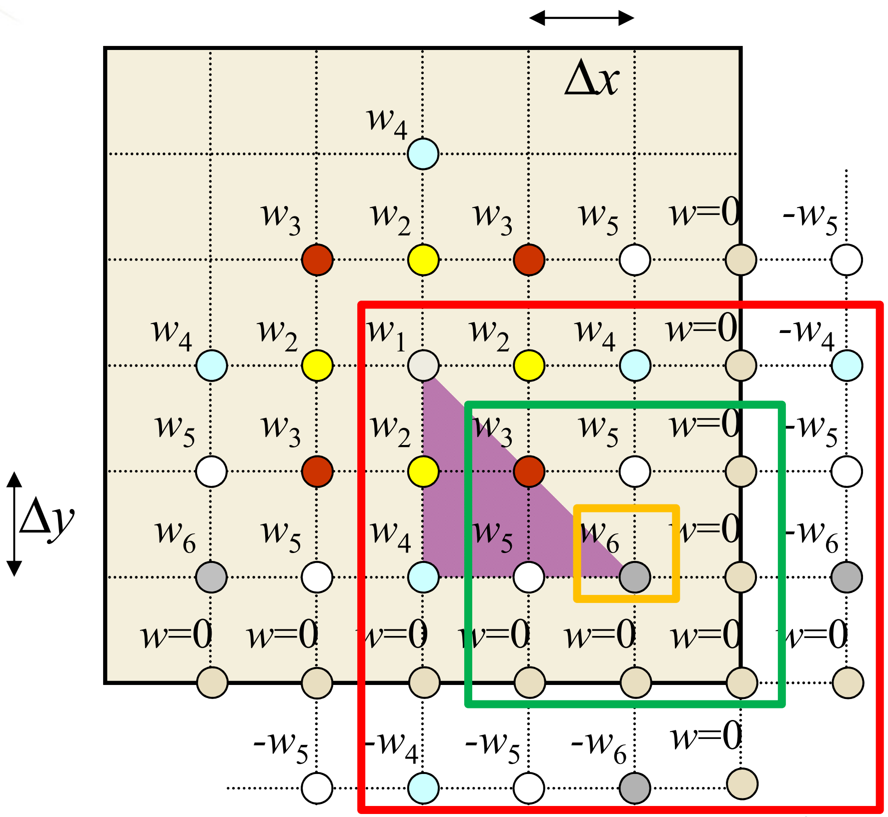


Diferenční schéma

	i-2	i-1	i	i+1	i+2
j+2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
j+1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j	1,000	-8,000	20,000	-8,000	1,000
j-1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j-2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000

bod	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	P.S.
1	20	-32	8	4	0	0	0,00026
2	-8	25	-16	-8	6	0	0,00026
3	2	-16	22	4	-16	2	0,00026
4	1	-8	4	19	-16	2	0,00026
5	0	3	-8	-8	22	-8	0,00026
6	0	0	2	2	-16	18	0,00026

Sestavení soustavy rovnic 6. řádek



Diferenční schéma

	i-2	i-1	i	i+1	i+2
j+2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
j+1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j	1,000	-8,000	20,000	-8,000	1,000
j-1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j-2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000

bod	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	*P.S.*
1	20	-32	8	4	0	0	0,00026
2	-8	25	-16	-8	6	0	0,00026
3	2	-16	22	4	-16	2	0,00026
4	1	-8	4	19	-16	2	0,00026
5	0	3	-8	-8	22	-8	0,00026
6	0	0	2	2	-16	18	0,00026

Výpočet měrných vnitřních sil

Měrné vnitřní síly:

- je jich celkem pět - dva měrné ohybové momenty m_x a m_y , jeden měrný kroutící moment m_{xy} a dvě měrné posouvající síly q_x a q_y :

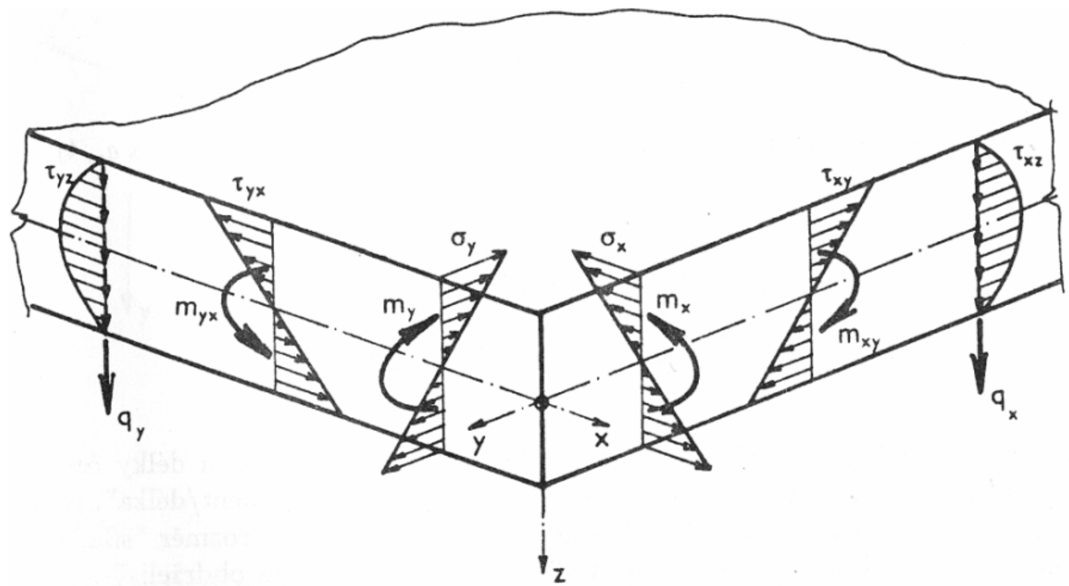
$$m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$m_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$m_{xy} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$q_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)$$

$$q_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)$$



Desková tuhost $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$

Výpočet složek měrných vnitřních sil s využitím diferenčních vztahů

$$m_x = -D.\left(\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial x^2} + \mu.\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial y^2}\right) =$$

$$= -D.\left(\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \mu.\frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right)$$

$$m_y = -D.\left(\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial y^2} + \mu.\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial x^2}\right) =$$

$$= -D.\left(\frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \mu.\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right)$$

$$m_{xy} = -D.(1-\mu).\left(\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial x \partial y}\right) =$$

$$= -D.(1-\mu).\left(\frac{w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j-1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1}}{4\Delta x \Delta y}\right)$$

Výpočet složek měrných vnitřních sil s využitím diferenčních vztahů

$$q_x = -D.\left(\frac{\partial^3 w_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_{i,j}}{\partial x \partial y^2}\right) =$$

$$= -D.\left(\frac{w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - w_{i-2,j}}{2\Delta x^3} + \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1}}{2\Delta y^2 \Delta x}\right)$$

$$q_y = -D.\left(\frac{\partial^3 w_{i,j}}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w_{i,j}}{\partial y \partial x^2}\right) =$$

$$= -D.\left(\frac{w_{i,j+2} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} - w_{i,j-2}}{2\Delta y^3} + \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} + w_{i-1,j+1} - w_{i-1,j-1}}{2\Delta x^2 \Delta y}\right)$$

K určení fiktivní hodnoty průhybu v řadách i-2, j-2, i+2 a j+2 lze použít 4 bodovou diferenční formuli.

Velikost posouvající síly lze při výpočtu reakcí na okraji zpřesnit pomocí korekce:

V poli: $p.\dfrac{\Delta x \Delta y}{2}$ V rozích: $p.\dfrac{\Delta x \Delta y}{4}$

Nosné desky, hlavní momenty

Hlavní momenty a směry normál k plochám,
kde hlavní momenty působí:

$$m_{1,2} = \frac{m_x + m_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_x - m_y}{2}\right)^2 + m_{xy}^2}$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{m_{xy}}{m_1 - m_y} \qquad \tan\alpha_2 = \frac{m_{xy}}{m_2 - m_y}$$

Maximální měrné krouticí momenty $m_{3,4}$ se pak určí:

$$m_{3,4} = \pm\frac{m_1 - m_2}{2}$$

Spolupůsobí s nimi ohybové momenty: $\frac{m_x + m_y}{2}$

Výpočet složek napětí v nosné desce

Platí-li pro výpočet měrného ohybového momentu m_x a normálového napětí σ_x:

$$m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad \sigma_x = -\frac{E}{1-\mu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

pak

$$\frac{\sigma_x}{m_x} = \frac{E}{\left(1-\mu^2\right)D} z = \frac{E \cdot z \cdot 12\left(1-\mu^2\right)}{\left(1-\mu^2\right)Eh^3} \Rightarrow \sigma_x = \frac{12 m_x}{h^3} z$$

Složky napětí v nosné desce lze určit s pomocí vztahů:

$$\sigma_x = \frac{12 m_x}{h^3} z \qquad \sigma_y = \frac{12 m_y}{h^3} z \qquad \tau_{xy} = \frac{12 m_{xy}}{h^3} z$$

Postup výpočty desky metodou sítí

1. Nakreslit výpočetní model nosné desky.
2. Označit uzly desky jako průsečíky zvolených přímek tvořících síť.
3. Určit hodnoty w pomocí okrajových podmínek i mimo obrys desky.
4. Sestavit soustavu lineárních rovnic pro výpočet hodnot průhybu w v jednotlivých bodech sítě.
5. Vyřešit soustavu lineárních rovnic. Jejich počet odpovídá počtu uzlů sítě. Výsledkem jsou hodnoty průhybu w v uzlech sítě.

Postup výpočty stěny metodou sítí

6. Hodnoty průhybu w v jednotlivých bodech sítě jsou podkladem pro výpočet složek měrných vnitřních sil.
7. Kontrola vypočtených hodnot složek měrných vnitřních sil, zejména na okrajích desky.
8. Určit hodnoty maximálních ohybových momentů i jejich směry a maximální kroutící momenty
9. Podle potřeby stanovit příslušné hodnoty napětí.