VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta stavební

Pružnost a plasticita II

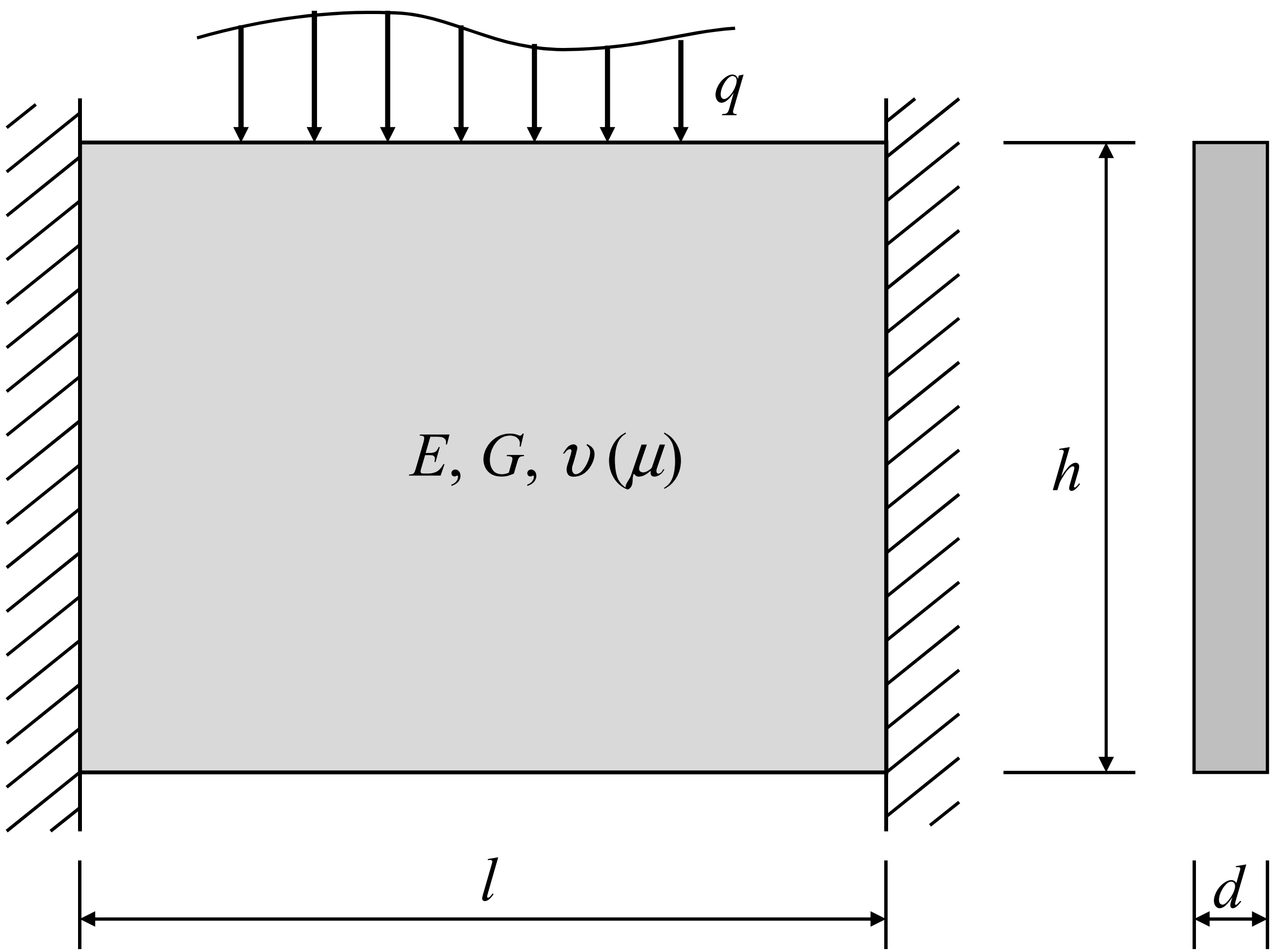
3. ročník bakalářského studia

doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.
Katedra stavební mechaniky

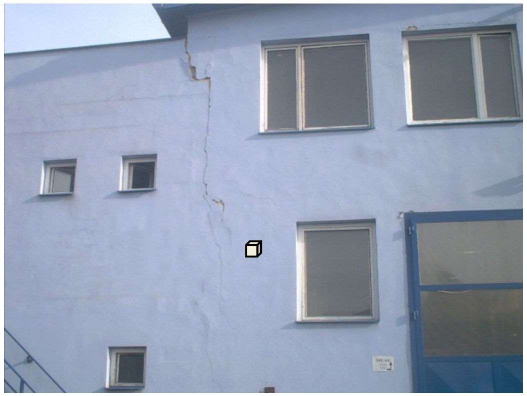
3-4

Řešení pravoúhlých nosných stěn metodou sítí

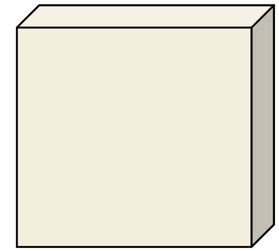
Statické schéma nosné stěny



Tenzor napětí a deformace



Elementární kvádr



Stav napjatosti <u>nosné stěny</u>:
3 neznámé složky napětí a přetvoření

Tenzor napětí:

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ sym. & \sigma_y\end{bmatrix}$$

Tenzor deformace:

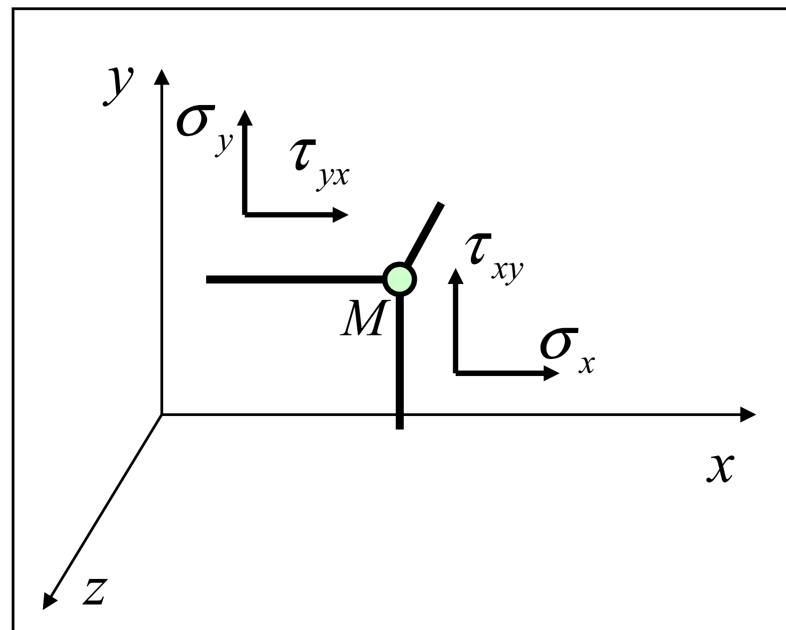
$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xy}\\ sym. & \varepsilon_y\end{bmatrix}$$

Vektor napětí:

$$\{\sigma\}=\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T$$

Vektor deformace:

$$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T$$



Fyzikální rovnice

Vztahy mezi složkami napětí a deformací (Hookův zákon)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}.\left[\sigma_x - \upsilon.\sigma_y\right] \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}.\left[\sigma_y - \upsilon.\sigma_x\right] \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2.(1+\upsilon)}{E}.\tau_{xy}$$

U izotropní látky jsou E, G a υ vzájemně závislé.

$$\frac{E}{G} = 2.(1+\upsilon) \qquad 0 \le \upsilon \le 0{,}5 \rightarrow \frac{E}{3} \le G \le \frac{E}{2}$$

Maticový zápis:

$$[\varepsilon] = [D]^{-1}.[\sigma] \qquad [\sigma] = [D].[\varepsilon]$$

Matice poddajnosti materiálu:

$$[D]^{-1} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\upsilon & 0 \\ -\upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\upsilon) \end{bmatrix}$$

Matice tuhosti materiálu:

$$[D] = \frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\upsilon) \end{bmatrix}$$

Geometrické podmínky, statické podmínky rovnováhy, podmínky spojitosti

Geometrické podmínky: vyjadřují vztahy mezi složkami poměrných deformací v tělese a složkami posunů libovolných bodů v tělese.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Statické podmínky rovnováhy: vyjadřují vztahy mezi složkami napětí a zatížením v tělese.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

Podmínky spojitosti:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

Lévyho podmínka

Pierre-Simon Laplace
(1749-1827)

Maurice Lévy
(1838-1910)

Podmínky fyzikální & spojitosti:

$$\frac{\partial^2(\sigma_x - \upsilon\sigma_y)}{E\partial y^2} + \frac{\partial^2(\sigma_y - \upsilon\sigma_x)}{E\partial x^2} = \frac{2(1+\upsilon)\partial^2\tau_{xy}}{E\partial x\partial y}$$

Statické podmínky rovnováhy & konstantní objemové síly:

$$-\frac{(1+\upsilon)\partial^2\sigma_x}{E\partial x^2} - \frac{(1+\upsilon)\partial^2\sigma_y}{E\partial y^2} = \frac{2(1+\upsilon)\partial^2\tau_{xy}}{E\partial x\partial y}$$

Matematická úprava:

$$\frac{\partial^2(\sigma_x - \upsilon\sigma_y)}{E\partial y^2} + \frac{\partial^2(\sigma_y - \upsilon\sigma_x)}{E\partial x^2} = -\frac{(1+\upsilon)\partial^2\sigma_x}{E\partial x^2} - \frac{(1+\upsilon)\partial^2\sigma_y}{E\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

Lévyho podmínka

Laplaceův operátor

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Stěnová rovnice

George Biddell Airy
(1801-1892)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+X=0\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+Y=0\\
&\Delta\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=0
\end{aligned}\right\}$$

Pro nulové objemové síly X a Y vyhovuje **Airyho funkce napětí** $F(x,y)$, pro kterou platí:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\qquad \sigma_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\qquad \tau_{xy}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$$

Stěnová rovnice

$$\Delta\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=\Delta\Delta F\left(x,y\right)=0$$

Stěnová (*biharmonická*) **rovnice** je parciální diferenciální rovnicí 4.řádu, která je **homogenní** (nemá pravou stranu).

Pro každou biharmonickou funkci lze odvodit stav napjatosti stěny, který odpovídá podmínkám rovnováhy a spojitosti.

Airy (1862)

Okrajové podmínky

1. Statické okrajové podmínky:
Výslednice napětí na okraji desky (hranici řešené oblasti) se musí rovnat výslednici povrchových sil.

2. Deformační okrajové podmínky:
Přetvoření na okraji desky (hranici řešené oblasti) musí odpovídat vnějším vazbám.

3. Smíšené okrajové podmínky:
V rovinných úlohách musí být na okraji (hranici řešené oblasti) splněny dvě okrajové podmínky.

Metoda sítí (metoda konečných diferencí)

1. $$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} = \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} \qquad 2\Delta x = x_{i+1} - x_{i-1}$$

2. $$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_i = \frac{\dfrac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2}$$

3. $$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_i = \frac{\dfrac{\partial^2 y_{i+1}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 y_{i-1}}{\partial x^2}}{2\Delta x} = \frac{\dfrac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{\Delta x^2} - \dfrac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^2}}{2\Delta x} = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2\Delta x^3}$$

4. $$\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right)_i = \frac{\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{i+1} - 2\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_i + \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{i-1}}{\Delta x^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{\Delta x^2} - 2.\dfrac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{\Delta x^2} + \dfrac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^2}}{\Delta x^2} =$$

$$= \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^4}$$

Metoda sítí (metoda konečných diferencí)

1.
$$\frac{\partial F_{i,j}}{\partial x} = \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$\Delta x = x_{i+1,j} - x_{i,j} = x_{i,j} - x_{i-1,j}$$
$$2\Delta x = x_{i+1,j} - x_{i-1,j}$$

$$\frac{\partial F_{i,j}}{\partial y} = \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

$$\Delta y = y_{i,j+1} - y_{i,j} = y_{i,j} - y_{i,j-1}$$
$$2\Delta y = y_{i,j+1} - y_{i,j-1}$$

2.
$$\frac{\partial^2 F_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{F_{i+1,j} - 2F_{i,j} + F_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 F_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{F_{i,j+1} - 2F_{i,j} + F_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

3.
$$\frac{\partial^3 F_{i,j}}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 F_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 F_{i+1,j}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 F_{i-1,j}}{\partial x^2}}{2\Delta x} = \frac{F_{i+2,j} - 2F_{i+1,j} + 2F_{i-1,j} - F_{i-2,j}}{2\Delta x^3}$$

Metoda sítí (metoda konečných diferencí)

4. $$\frac{\partial^4 F_{i,j}}{\partial x^4} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2 F_{i+1,j}}{\partial x^2} - 2.\frac{\partial^2 F_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{i-1,j}}{\partial x^2}}{\Delta x^2} = \frac{F_{i+2,j} - 4F_{i+1,j} + 6F_{i,j} - 4F_{i-1,j} + F_{i-2,j}}{\Delta x^4}$$

$$\frac{\partial^4 F_{i,j}}{\partial y^4} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 F_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{\frac{\partial^2 F_{i,j+1}}{\partial y^2} - 2.\frac{\partial^2 F_{i,j}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_{i,j-1}}{\partial y^2}}{\Delta y^2} = \frac{F_{i,j+2} - 4F_{i,j+1} + 6F_{i,j} - 4F_{i,j-1} + F_{i,j-2}}{\Delta y^4}$$

Smíšené derivace

$$\frac{\partial^2 F_{i,j}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_{i,j}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j-1}}{2\Delta y} = \frac{F_{i+1,j+1} + F_{i-1,j-1} - F_{i+1,j-1} - F_{i-1,j+1}}{4\Delta x \Delta y}$$

$$\frac{\partial^4 F_{i,j}}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x^2} \cdot \frac{F_{i,j+1} - 2F_{i,j} + F_{i,j-1}}{\Delta y^2} =$$
$$= \frac{F_{i+1,j+1} - 2F_{i+1,j} + F_{i+1,j-1} - 2\left(F_{i,j+1} - 2F_{i,j} + F_{i,j-1}\right) + F_{i-1,j+1} - 2F_{i-1,j} + F_{i-1,j-1}}{\Delta x^2 \Delta y^2}$$

Postup výpočty stěny metodou sítí

1. Zadání. Nakreslit výpočetní model stěny.
2. Určit hodnoty Airyho funkce napětí na obryse stěny podle analogie náhradního rámu, $M = \Phi$.
3. Určit normálové síly fiktivního rámu nosné stěny, který je derivací funkce napětí Φ ve směru vnější normály k hranici stěny a hodnotu Airyho funkce napětí vně obrysu nosné stěny.
4. Sestavit matici levých stran a vektor pravých stran pro výpočet hodnot Airyho funkce napětí v jednotlivých bodech sítě.
5. Řešit soustavu lineárních rovnic. Jejich počet odpovídá počtu uzlů sítě. Výsledkem jsou **hodnoty Airyho funkce napětí Φ** v uzlech sítě.

Postup výpočty stěny metodou sítí

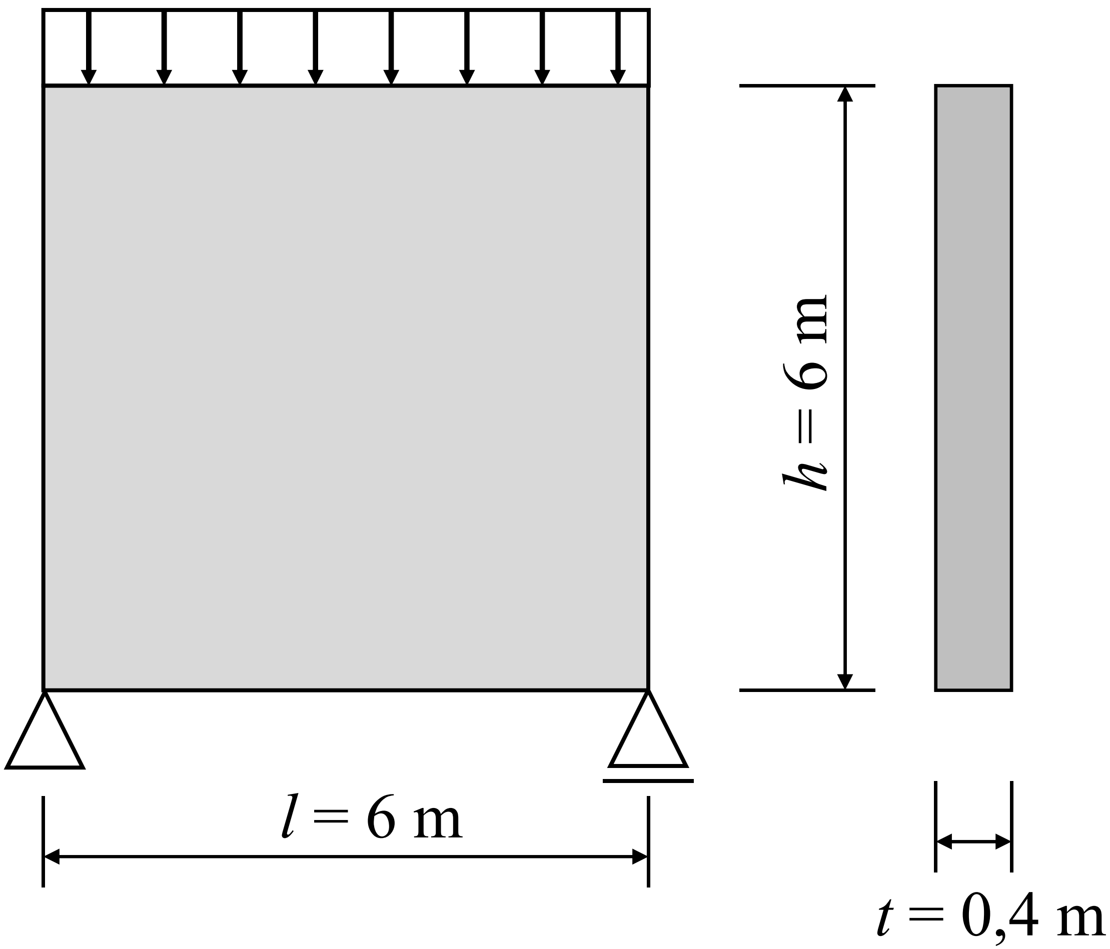
6. Hodnoty Airyho funkce napětí Φ v jednotlivých bodech sítě jsou podkladem pro výpočet složek napětí. V případě, že při výpočtu hodnot M a N se předpokládala jednotková tloušťka nosné stěny a ta je jiná, zahrnout do výpočtu napětí.
7. Provést kontrolu vypočtených složek napětí, zejména na okrajích stěny.
8. Vypočet hodnot **hlavních normálových napětí**.
9. Vypočet směrů hlavních normálových napětí.
10. Vypočet **maximálních smykových napětí** a jejich směrů.

1.B Zadání nosné stěny

$q = 2\ \mathrm{kN/m}$

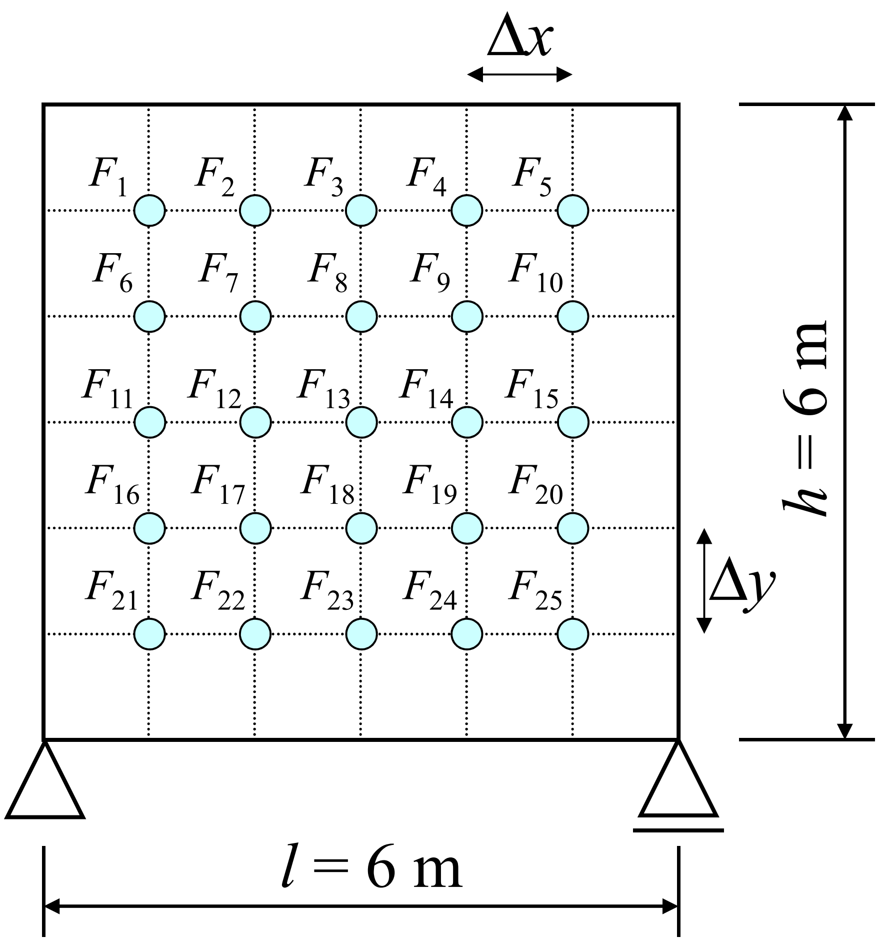
$(\,p = 5\ \mathrm{kN/m^2},\ q = p\ .\ t\,)$

$\Delta x = \Delta y = 1\mathrm{m}$



Šířka stěny l [m] :	6,00
Výška stěny b [m] :	6,00
Tloušťka stěny t [m] :	0,40
Velikost spojitého zatížení p [$\mathrm{kN/m^2}$] :	5,00
Velikost spojitého zatížení q [$\mathrm{kN/m}$] :	2,00
Šířka diference Δx [m] :	1,00
Výška diference Δy [m] :	1,00
Velikost α^2 :	1,00
Velikost β^2 :	1,00

1.B Rozdělení nosné stěny sítí



$\Delta x = l/6 = 1\text{m}$

$\Delta y = h/6 = 1\text{m}$

25 vnitřních bodů

25 lineárních rovnic

25 neznámých F_1 .. F_{25}

S využitím symetrie:

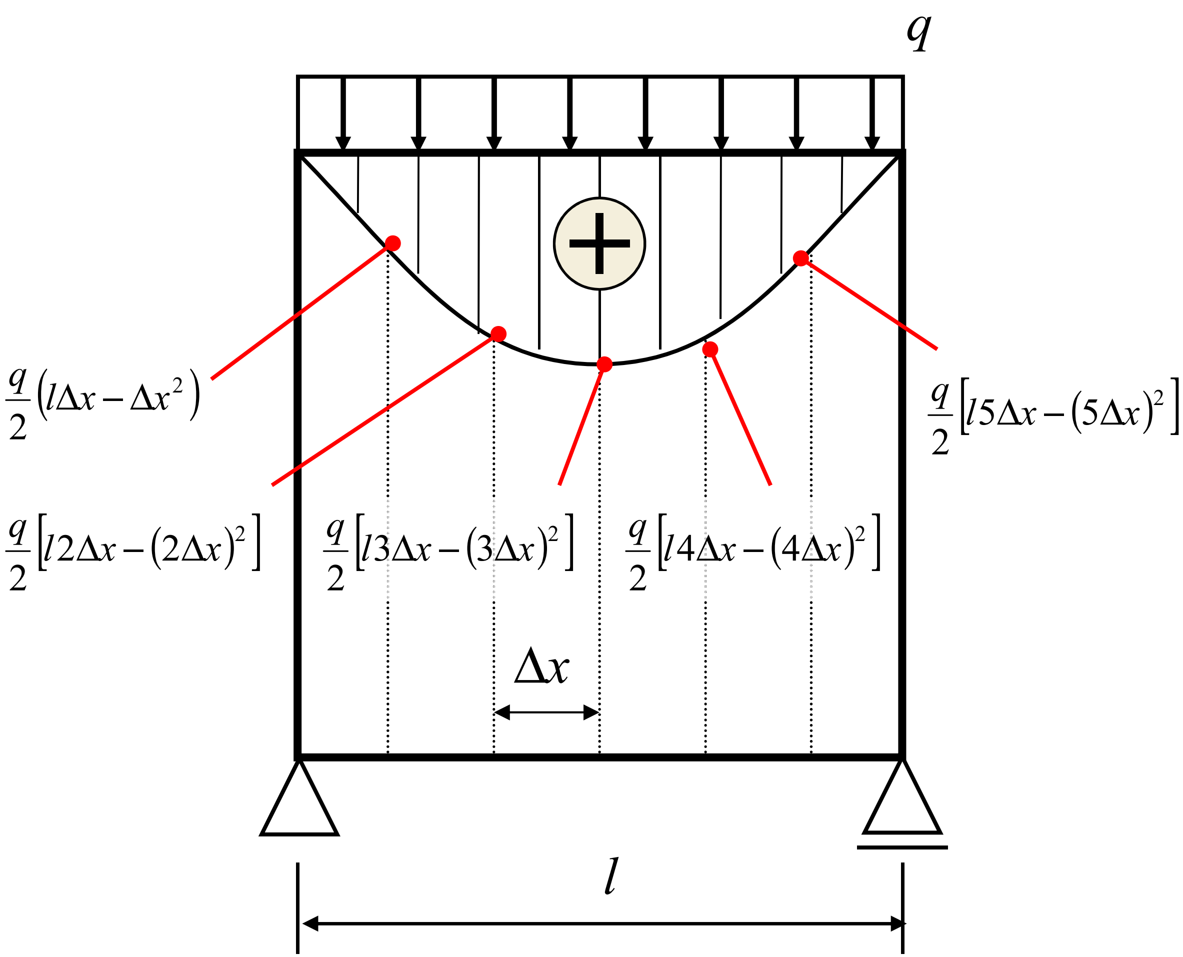
15 lineárních rovnic

15 neznámých F_1 .. F_{15}

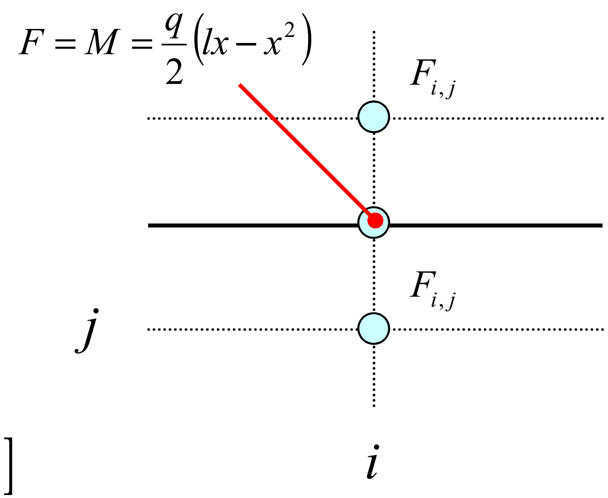
2. Momenty na rámu

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
5,00	8,00	9,00	8,00	5,00

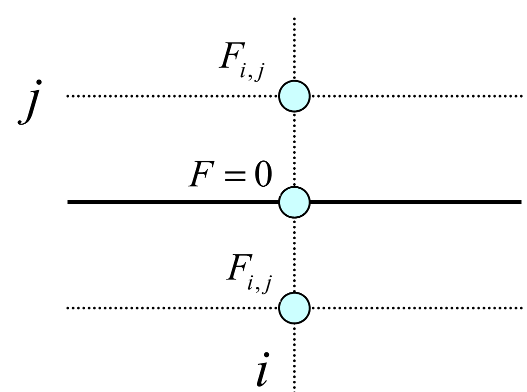
M … ohybový moment na fiktivním rámu



Horní okraj



Spodní okraj

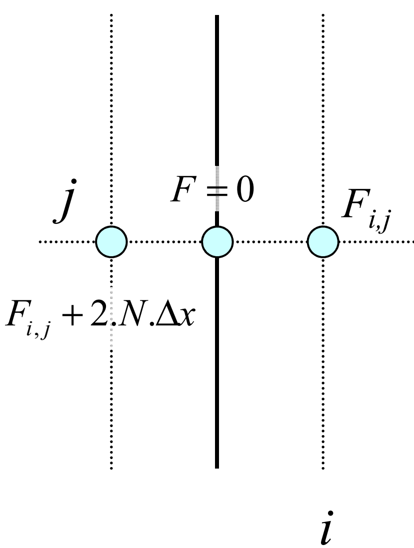


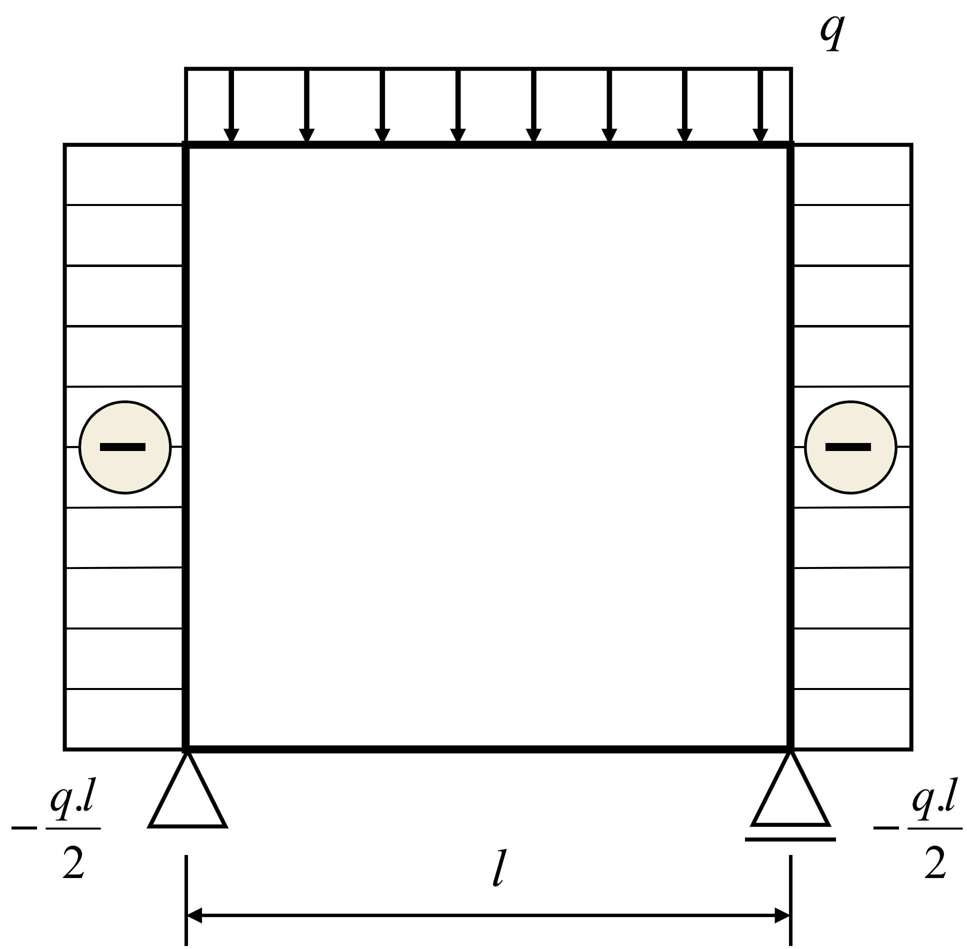
3. Normálové síly na fiktivním rámu

S využitím analogie náhradního rámu

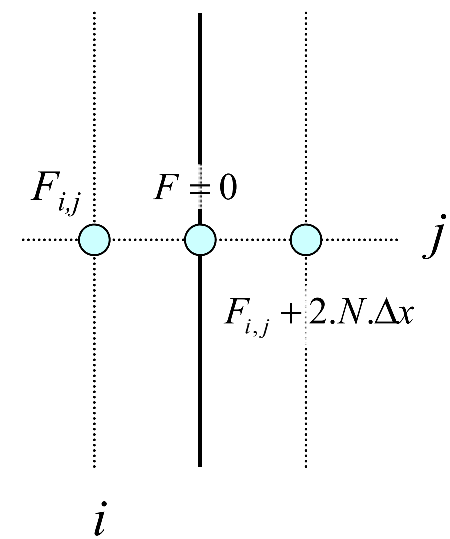
N … normálová síla na fiktivním rámu

Levý okraj





Pravý okraj

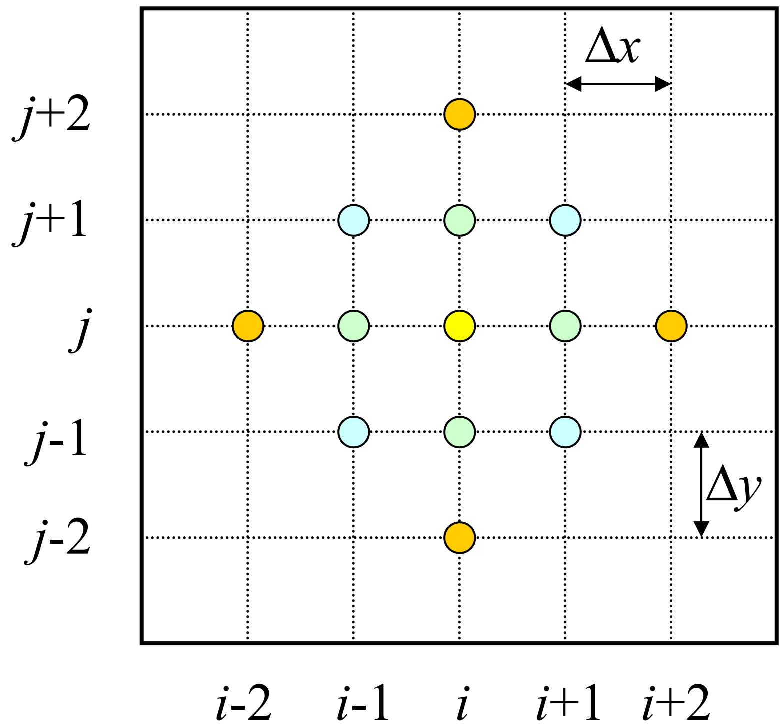


4.A Řešení stěn metodou sítí, diferenční vzta

Stěnová rovnice $$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

$$F_{i,j}.\left(8 + 6\alpha^2 + 6\beta^2\right) - 4.\left[F_{i+1,j}.\left(1+\beta^2\right) + F_{i-1,j}.\left(1+\beta^2\right) + F_{i,j+1}.\left(1+\alpha^2\right) + F_{i,j-1}.\left(1+\alpha^2\right)\right] +$$
$$+ 2.\left(F_{i+1,j+1} + F_{i+1,j-1} + F_{i-1,j+1} + F_{i-1,j-1}\right) + \alpha^2.\left(F_{i,j+2} + F_{i,j-2}\right) + \beta^2.\left(F_{i+2,j} + F_{i-2,j}\right) = 0$$

kde $\alpha^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 \qquad \beta^2 = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$



Pokud $\Delta x = \Delta y$ pak platí:

$$20.F_{i,j} - 8.\left(F_{i+1,j} + F_{i-1,j} + F_{i,j+1} + F_{i,j-1}\right) +$$
$$+ 2.\left(F_{i+1,j+1} + F_{i+1,j-1} + F_{i-1,j+1} + F_{i-1,j-1}\right) +$$
$$+ F_{i+2,j} + F_{i-2,j} + F_{i,j+2} + F_{i,j-2} = 0$$

4.B Řešení stěn metodou sítí, diferenční vztah

Pro $\Delta x \neq \Delta y$ platí : $\alpha^2 = \left(\dfrac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2$ $\beta^2 = \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$

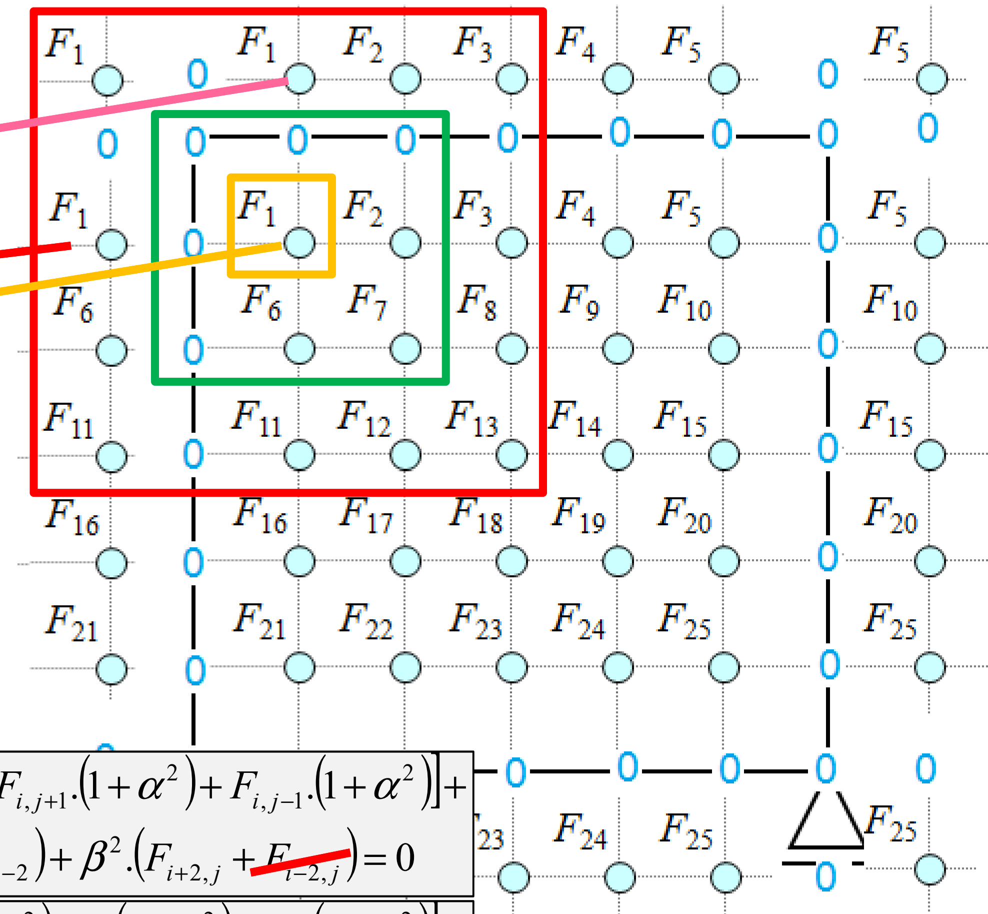
	i-2	i-1	i	i+1	i+2
j+2	0	0	α^2	0	0
j+1	0	2	$4(-1-\alpha^2)$	2	0
j	β^2	$4(-1-\beta^2)$	$8+6\alpha^2+6\beta^2$	$4(-1-\beta^2)$	β^2
j-1	0	2	$4(-1-\alpha^2)$	2	0
j-2	0	0	α^2	0	0

4.C Matice levých stran – 1. řádek

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16	F17	F18	F19	F20	F21	F22	F23	F24	F25
22,00	-8,00	1,00	0,00	0,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Diferenční schéma

	i-2	i-1	i	i+1	i+2
j+2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
j+1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j	1,000	-8,000	20,000	-8,000	1,000
j-1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j-2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000



$$\boxed{F_{i,j}.\left(8+6\alpha^2+6\beta^2\right)}\boxed{+\alpha^2.\left(F_{i,j+2}\right)}\boxed{+\beta^2.\left(F_{i-2,j}\right)}$$

$$\cancel{F_{i,j}.\left(8+6\alpha^2+6\beta^2\right)}-4.\left[F_{i+1,j}.\left(1+\beta^2\right)+F_{i-1,j}.\left(1+\beta^2\right)+F_{i,j+1}.\left(1+\alpha^2\right)+F_{i,j-1}.\left(1+\alpha^2\right)\right]+$$
$$+2.\left(F_{i+1,j+1}+F_{i+1,j-1}+F_{i-1,j+1}+F_{i-1,j-1}\right)+\alpha^2.\left(\cancel{F_{i,j+2}}+F_{i,j-2}\right)+\beta^2.\left(F_{i+2,j}+\cancel{F_{i-2,j}}\right)=0$$

$$F_1.\left(8+6\alpha^2+6\beta^2\right)-4.\left[F_2.\left(1+\beta^2\right)+0.\left(1+\beta^2\right)+0.\left(1+\alpha^2\right)+F_6.\left(1+\alpha^2\right)\right]+$$
$$+2.\left(0+0+0+F_7\right)+\alpha^2.\left(F_1+F_{11}\right)+\beta^2.\left(F_3+F_1\right)=0$$

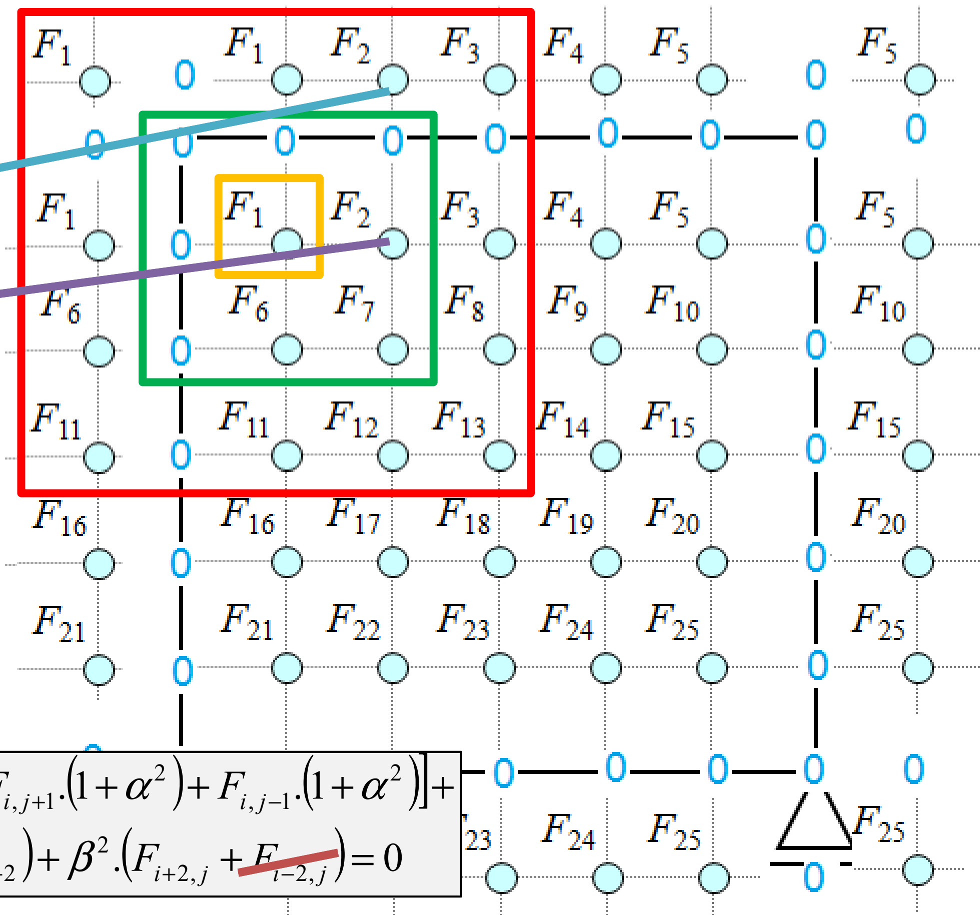
4.C Matice levých stran – 1. řádek

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}	F_{20}	F_{21}	F_{22}	F_{23}	F_{24}	F_{25}
22,00	-8,00	1,00	0,00	0,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Diferenční schéma

	i-2	i-1	i	i+1	i+2
j+2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
j+1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j	1,000	-8,000	20,000	-8,000	1,000
j-1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j-2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000

$$\boxed{4.\left[F_{i+1,j}.\left(1+\beta^2\right)\right]}$$



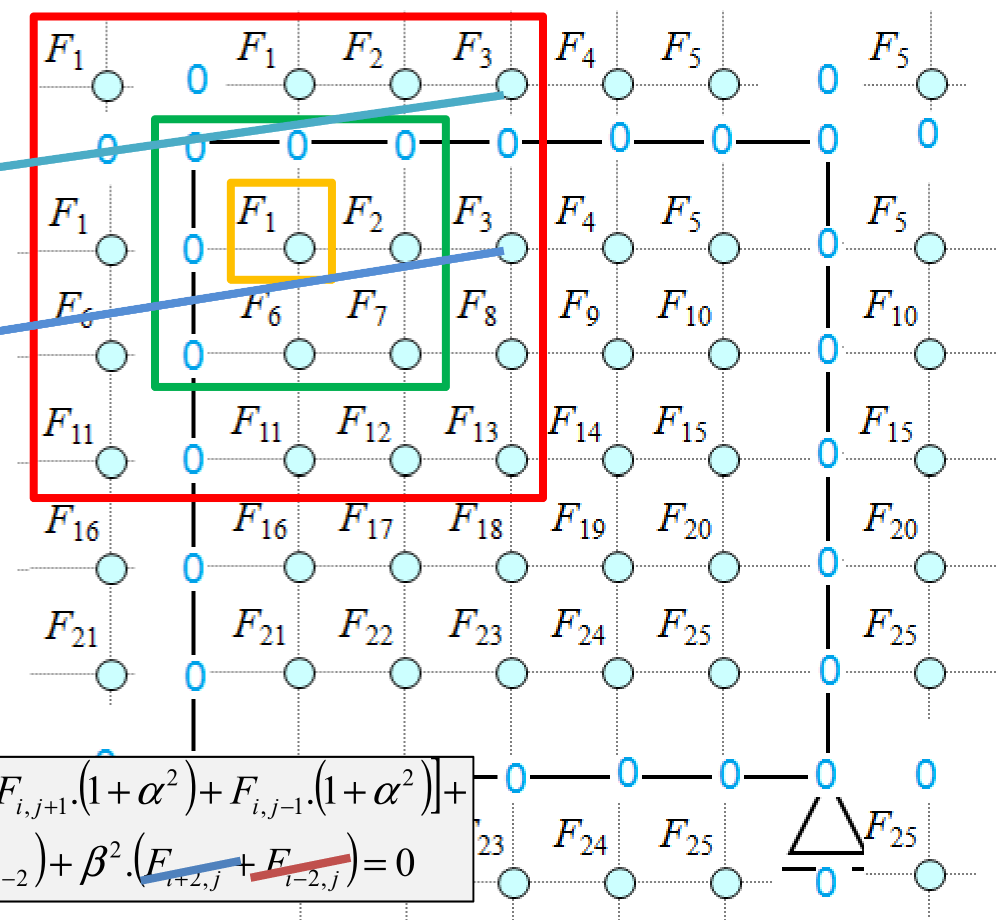
$$\cancel{F_{i,j}.\left(8+6\alpha^2+6\beta^2\right)}-4.\left[\cancel{F_{i+1,j}.\left(1+\beta^2\right)}+F_{i-1,j}.\left(1+\beta^2\right)+F_{i,j+1}.\left(1+\alpha^2\right)+F_{i,j-1}.\left(1+\alpha^2\right)\right]+$$
$$+2.\left(F_{i+1,j+1}+F_{i+1,j-1}+F_{i-1,j+1}+F_{i-1,j-1}\right)+\alpha^2.\left(\cancel{F_{i,j+2}}+F_{i,j-2}\right)+\beta^2.\left(F_{i+2,j}+\cancel{F_{i-2,j}}\right)=0$$

4.C Matice levých stran – 1. řádek

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}	F_{20}	F_{21}	F_{22}	F_{23}	F_{24}	F_{25}
22,00	-8,00	1,00	0,00	0,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Diferenční schéma

j+2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
j+1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j	1,000	-8,000	20,000	-8,000	1,000
j-1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j-2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
	i-2	i-1	i	i+1	i+2



$$\beta^2.(F_{i+2,j})$$

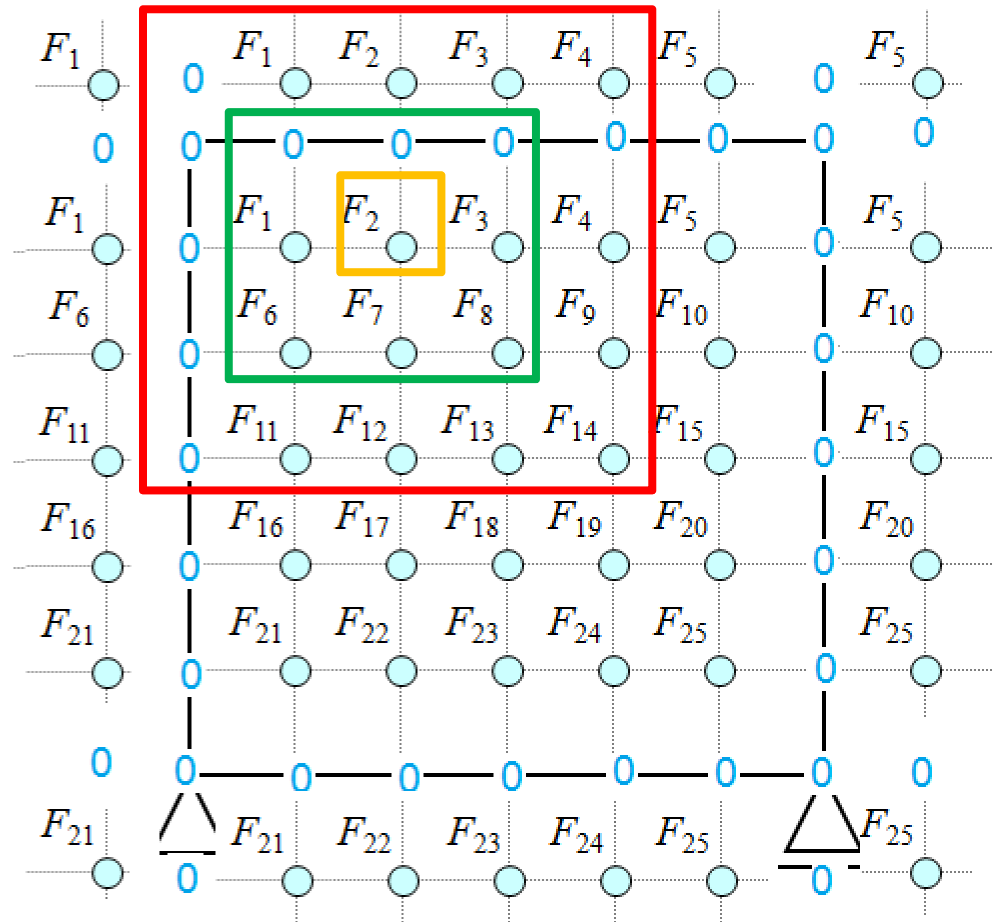
$$\cancel{F_{i,j}(8+6\alpha^2+6\beta^2)}-4.\left[\cancel{F_{i+1,j}.(1+\beta^2)}+F_{i-1,j}.(1+\beta^2)+F_{i,j+1}.(1+\alpha^2)+F_{i,j-1}.(1+\alpha^2)\right]+$$

$$+2.(F_{i+1,j+1}+F_{i+1,j-1}+F_{i-1,j+1}+F_{i-1,j-1})+\alpha^2.(\cancel{F_{i,j+2}}+F_{i,j-2})+\beta^2.(\cancel{F_{i+2,j}}+\cancel{F_{i-2,j}})=0$$

4.D Matice levých stran - 2. řádek

Diferenční schéma

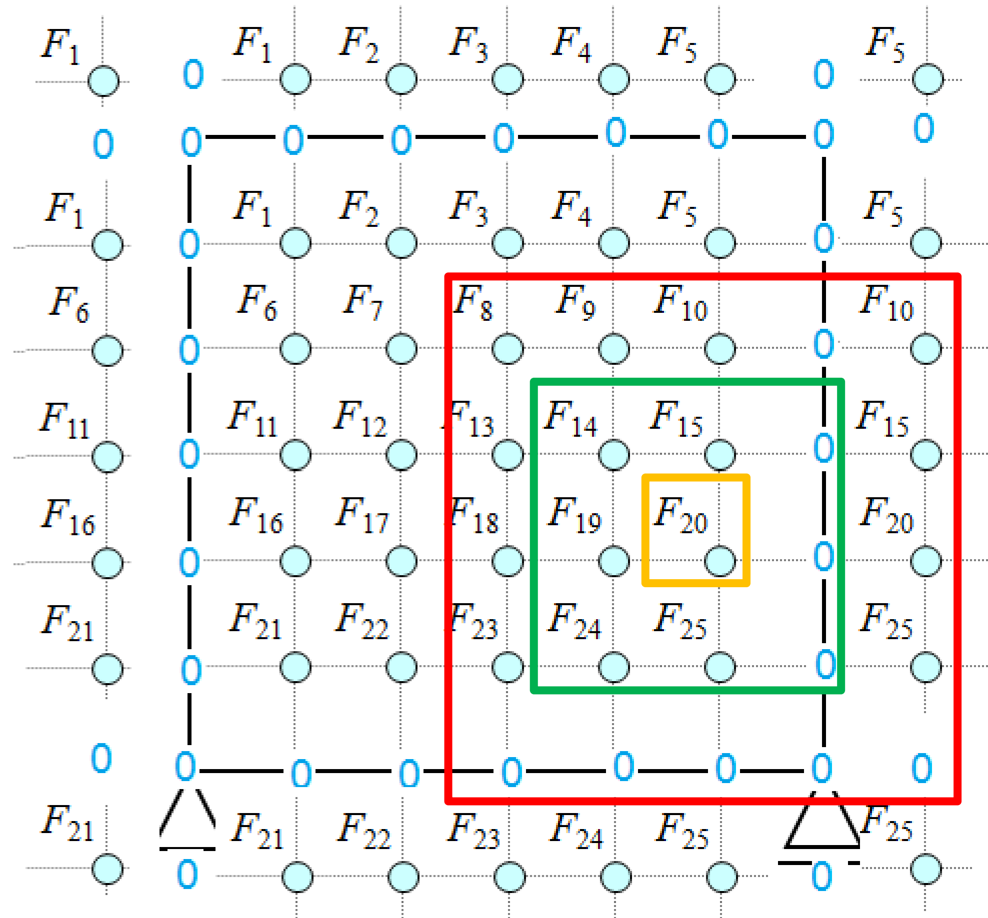
	i-2	i-1	i	i+1	i+2
j+2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
j+1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j	1,000	-8,000	20,000	-8,000	1,000
j-1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j-2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000



4.E Matice levých stran - 20. řádek

Diferenční schéma

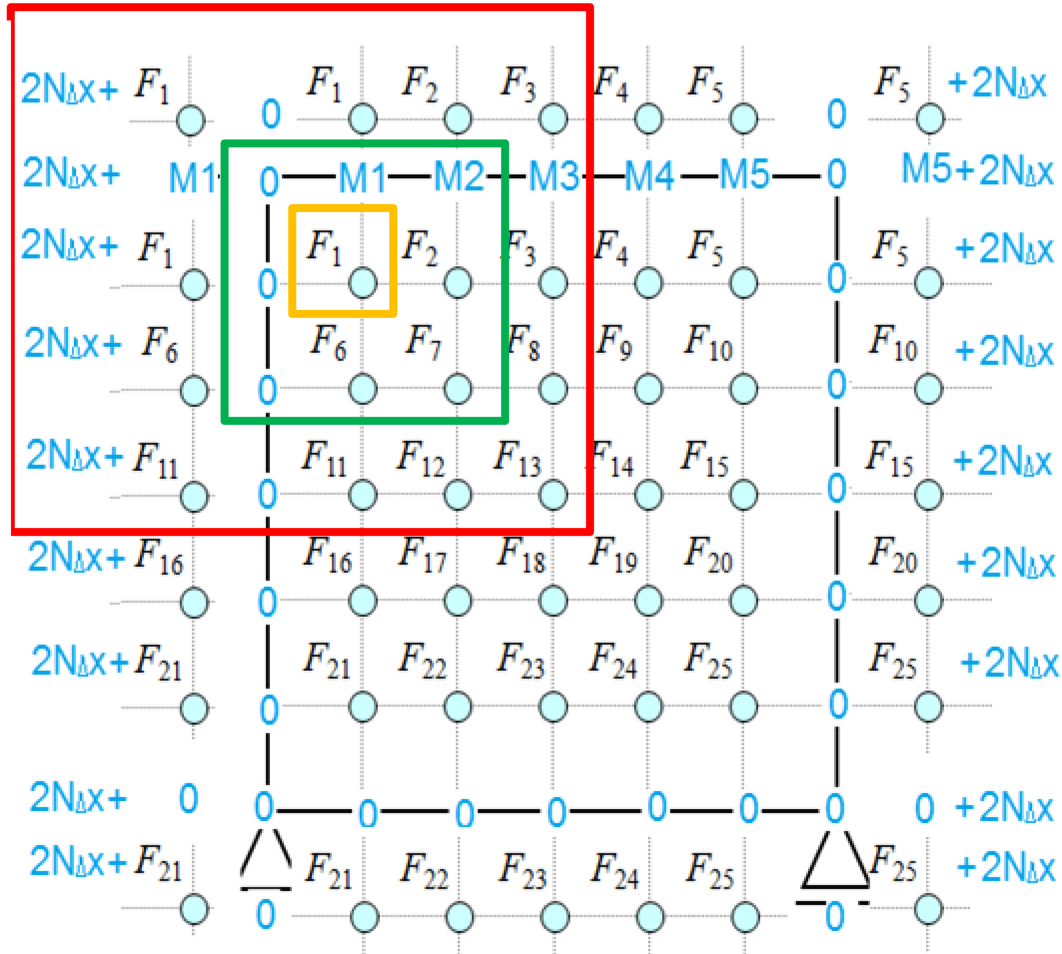
j+2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
j+1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j	1,000	-8,000	20,000	-8,000	1,000
j-1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j-2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
	i-2	i-1	i	i+1	i+2



4.F Vektor pravých stran – 1. řádek

Diferenční schéma

j+2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
j+1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j	1,000	-8,000	20,000	-8,000	1,000
j-1	0,000	2,000	-8,000	2,000	0,000
j-2	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
	i-2	i-1	i	i+1	i+2



4.G Matice levých stran a vektor pravých stra

Soustava lineárních rovnic

	F_{1}	F_{2}	F_{3}	F_{4}	F_{5}	F_{6}	F_{7}	F_{8}	F_{9}	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}	F_{20}	F_{21}	F_{22}	F_{23}	F_{24}	F_{25}	PS
F_{1}	22,00	-8,00	1,00	0,00	0,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	36,00
F_{2}	-8,00	21,00	-8,00	1,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	36,00
F_{3}	1,00	-8,00	21,00	-8,00	1,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	40,00
F_{4}	0,00	1,00	-8,00	21,00	-8,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	36,00
F_{5}	0,00	0,00	1,00	-8,00	22,00	0,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	36,00
F_{6}	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	21,00	-8,00	1,00	0,00	0,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	7,00
F_{7}	2,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	-8,00	20,00	-8,00	1,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-8,00
F_{8}	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	1,00	-8,00	20,00	-8,00	1,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-9,00
F_{9}	0,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	1,00	-8,00	20,00	-8,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-8,00
F_{10}	0,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	0,00	0,00	1,00	-8,00	21,00	0,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	7,00
F_{11}	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	21,00	-8,00	1,00	0,00	0,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	12,00
F_{12}	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	-8,00	20,00	-8,00	1,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
F_{13}	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	1,00	-8,00	20,00	-8,00	1,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00
F_{14}	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	1,00	-8,00	20,00	-8,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
F_{15}	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	0,00	0,00	1,00	-8,00	21,00	0,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	12,00
F_{16}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	21,00	-8,00	1,00	0,00	0,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	12,00
F_{17}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	-8,00	20,00	-8,00	1,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00
F_{18}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	1,00	-8,00	20,00	-8,00	1,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	0,00
F_{19}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	1,00	-8,00	20,00	-8,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00
F_{20}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	0,00	0,00	1,00	-8,00	21,00	0,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	12,00
F_{21}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	0,00	22,00	-8,00	1,00	0,00	0,00	12,00
F_{22}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	0,00	-8,00	21,00	-8,00	1,00	0,00	0,00
F_{23}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	1,00	-8,00	21,00	-8,00	1,00	0,00
F_{24}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	2,00	0,00	1,00	-8,00	21,00	-8,00	0,00
F_{25}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	2,00	-8,00	0,00	0,00	1,00	-8,00	22,00	12,00

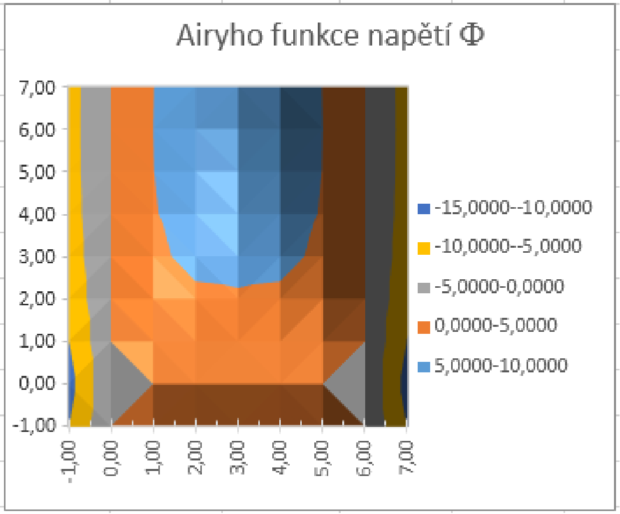
5.Soustava lineárních rovnic, výsledek

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}	F_{20}	F_{21}	F_{22}	F_{23}	F_{24}	F_{25}	Kořeny soustavy	
F_1	0,07	0,04	0,02	0,01	0,00	0,04	0,04	0,02	0,01	0,00	0,02	0,02	0,02	0,01	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	F_1	4,935390
F_2	0,04	0,10	0,06	0,02	0,01	0,04	0,08	0,06	0,03	0,01	0,02	0,05	0,04	0,02	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00	F_2	7,788090
F_3	0,02	0,06	0,11	0,06	0,02	0,02	0,06	0,09	0,06	0,02	0,02	0,04	0,06	0,04	0,02	0,01	0,02	0,03	0,02	0,01	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	F_3	8,716847
F_4	0,01	0,02	0,06	0,10	0,04	0,01	0,03	0,06	0,08	0,04	0,01	0,02	0,04	0,05	0,02	0,00	0,01	0,02	0,02	0,01	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	F_4	7,788090
F_5	0,00	0,01	0,02	0,04	0,07	0,00	0,01	0,02	0,04	0,04	0,00	0,01	0,02	0,02	0,02	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	F_5	4,935390
F_6	0,04	0,04	0,02	0,01	0,00	0,10	0,08	0,05	0,02	0,01	0,06	0,06	0,04	0,02	0,01	0,02	0,03	0,02	0,01	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	F_6	4,694082
F_7	0,04	0,08	0,06	0,03	0,01	0,08	0,18	0,13	0,07	0,02	0,06	0,13	0,11	0,07	0,02	0,03	0,07	0,07	0,04	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	0,00	F_7	7,184994
F_8	0,02	0,06	0,09	0,06	0,02	0,05	0,13	0,21	0,13	0,05	0,04	0,11	0,16	0,11	0,04	0,02	0,07	0,09	0,07	0,02	0,01	0,02	0,03	0,02	0,01	F_8	7,954541
F_9	0,01	0,03	0,06	0,08	0,04	0,02	0,07	0,13	0,18	0,08	0,02	0,07	0,11	0,13	0,06	0,01	0,04	0,07	0,07	0,03	0,00	0,01	0,02	0,02	0,01	F_9	7,184994
F_{10}	0,00	0,01	0,02	0,04	0,04	0,01	0,02	0,05	0,08	0,10	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,00	0,01	0,02	0,03	0,02	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	F_{10}	4,694082
F_{11}	0,02	0,02	0,02	0,01	0,00	0,06	0,06	0,04	0,02	0,01	0,11	0,09	0,06	0,03	0,01	0,06	0,06	0,04	0,02	0,01	0,02	0,02	0,02	0,01	0,00	F_{11}	4,191964
F_{12}	0,02	0,05	0,04	0,02	0,01	0,06	0,13	0,11	0,07	0,02	0,09	0,21	0,16	0,09	0,03	0,06	0,13	0,11	0,07	0,02	0,02	0,05	0,04	0,02	0,01	F_{12}	6,062619
F_{13}	0,02	0,04	0,06	0,04	0,02	0,04	0,11	0,16	0,11	0,04	0,06	0,16	0,25	0,16	0,06	0,04	0,11	0,16	0,11	0,04	0,02	0,04	0,06	0,04	0,02	F_{13}	6,581222
F_{14}	0,01	0,02	0,04	0,05	0,02	0,02	0,07	0,11	0,13	0,06	0,03	0,09	0,16	0,21	0,09	0,02	0,07	0,11	0,13	0,06	0,01	0,02	0,04	0,05	0,02	F_{14}	6,062619
F_{15}	0,00	0,01	0,02	0,02	0,02	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,01	0,03	0,06	0,09	0,11	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,00	0,01	0,02	0,02	0,02	F_{15}	4,191964
F_{16}	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,02	0,03	0,02	0,01	0,00	0,06	0,06	0,04	0,02	0,01	0,10	0,08	0,05	0,02	0,01	0,04	0,04	0,02	0,01	0,00	F_{16}	3,267108
F_{17}	0,01	0,02	0,02	0,01	0,00	0,03	0,07	0,07	0,04	0,01	0,06	0,13	0,11	0,07	0,02	0,08	0,18	0,13	0,07	0,02	0,04	0,08	0,06	0,03	0,01	F_{17}	4,258930
F_{18}	0,01	0,02	0,03	0,02	0,01	0,02	0,07	0,09	0,07	0,02	0,04	0,11	0,16	0,11	0,04	0,05	0,13	0,21	0,13	0,05	0,02	0,06	0,09	0,06	0,02	F_{18}	4,462641
F_{19}	0,00	0,01	0,02	0,02	0,01	0,01	0,04	0,07	0,07	0,03	0,02	0,07	0,11	0,13	0,06	0,02	0,07	0,13	0,18	0,08	0,01	0,03	0,06	0,08	0,04	F_{19}	4,258930
F_{20}	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,01	0,02	0,03	0,02	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,01	0,02	0,05	0,08	0,10	0,00	0,01	0,02	0,04	0,04	F_{20}	3,267108
F_{21}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,02	0,02	0,02	0,01	0,00	0,04	0,04	0,02	0,01	0,00	0,07	0,04	0,02	0,01	0,00	F_{21}	1,754772
F_{22}	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00	0,01	0,02	0,02	0,01	0,00	0,02	0,05	0,04	0,02	0,01	0,04	0,08	0,06	0,03	0,01	0,04	0,10	0,06	0,02	0,01	F_{22}	1,877050
F_{23}	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,01	0,02	0,03	0,02	0,01	0,02	0,04	0,06	0,04	0,02	0,02	0,06	0,09	0,06	0,02	0,02	0,06	0,11	0,06	0,02	F_{23}	1,838450
F_{24}	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00	0,01	0,02	0,02	0,01	0,01	0,02	0,04	0,05	0,02	0,01	0,03	0,06	0,08	0,04	0,01	0,02	0,06	0,10	0,04	F_{24}	1,877050
F_{25}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,01	0,02	0,02	0,02	0,00	0,01	0,02	0,04	0,04	0,00	0,01	0,02	0,04	0,07	F_{25}	1,754772

6. Hodnoty Airyho funkce + momenty, norma

Hodnoty Airyho funkce

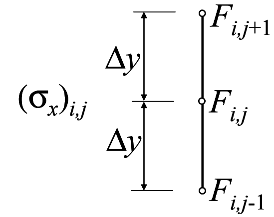
kNm	i=-1	i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	y [m]
j=7	-7,0646	0,0000	4,9354	7,7881	8,7168	7,7881	4,9354	0,0000	-7,0646	7,00
j=6	-7,0000	0,0000	5,0000	8,0000	9,0000	8,0000	5,0000	0,0000	-7,0000	6,00
j=5	-7,0646	0,0000	4,9354	7,7881	8,7168	7,7881	4,9354	0,0000	-7,0646	5,00
j=4	-7,3059	0,0000	4,6941	7,1850	7,9545	7,1850	4,6941	0,0000	-7,3059	4,00
j=3	-7,8080	0,0000	4,1920	6,0626	6,5812	6,0626	4,1920	0,0000	-7,8080	3,00
j=2	-8,7329	0,0000	3,2671	4,2589	4,4626	4,2589	3,2671	0,0000	-8,7329	2,00
j=1	-10,2452	0,0000	1,7548	1,8770	1,8384	1,8770	1,7548	0,0000	-10,2452	1,00
j=0	-12,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-12,0000	0,00
j=-1	-10,2452	0,0000	1,7548	1,8770	1,8384	1,8770	1,7548	0,0000	-10,2452	-1,00
x [m]	-1,00	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	



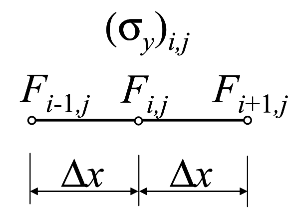
6. Výpočet složek napětí

Po určení hodnot Airyho funkce napětí v bodech sítě i, j lze z diferenčních vztahů stanovit také **složky napětí** $[\mathrm{N/m^2}]$:

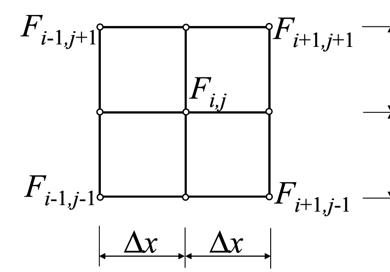
$$\sigma_{x_{i,j}} = \frac{1}{t} \cdot \frac{\partial^2 F_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{F_{i,j+1} - 2F_{i,j} + F_{i,j-1}}{t \Delta y^2}$$



$$\sigma_{y_{i,j}} = \frac{1}{t} \cdot \frac{\partial^2 F_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{F_{i+1,j} - 2F_{i,j} + F_{i-1,j}}{t \Delta x^2}$$



$$\tau_{xy_{i,j}} = -\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial^2 F_{i,j}}{\partial x \partial y} = -\frac{F_{i+1,j+1} + F_{i-1,j-1} - F_{i+1,j-1} - F_{i-1,j+1}}{4t \Delta x \Delta y}$$



kde t je tloušťka nosné stěny

8,9,10 Výpočet hlavních složek napětí

Maximální normálová napětí

$$\sigma_e = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}$$

Směry hlavních napětí

$$\tan\alpha_1 = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_1 - \sigma_z} \qquad \tan\alpha_2 = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_2 - \sigma_z}$$

Maximální (minimální) smykové napětí

$$\tau_{extr} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$