VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta stavební

Pružnost a plasticita II

3. ročník bakalářského studia

doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.
Katedra stavební mechaniky

2

Řešení nosných stěn pomocí Airyho funkce napětí a inverzní metody

Stěnová rovnice

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \qquad \Delta\Delta\Phi(x, y) = 0$$

Stěnová rovnice, nazývaná také **biharmonická**, je:

- parciální diferenciální rovnicí 4. řádu,
- lineární,
- homogenní (pravá strana je nulová).

Pro každou rovnici stěny lze odvodit stav napětí stěny odpovídající **podmínkám rovnováhy** a **spojitosti** (Airy, 1862) při respektování **okrajových podmínek**.

Platí za předpokladu nulových nebo konstantních objemových sil, pro homogenní a izotropní materiál.

V rovnici nevystupuje žádná materiálová konstanta, což je podkladem pro experimentální analyzování stěn na modelech.

Řešení nosných stěn, stěnová rovnice, složky napětí

George Biddell Airy
(1801-1892)

Stěnová rovnice: $$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0$$

Pomocí Laplaceova operátoru: $$\Delta\Delta\Phi(x, y) = 0$$

Φ je **Airyho funkce napětí**

Stěnová rovnice, nazývaná také **biharmonická**, je:

- parciální diferenciální rovnicí 4. řádu,
- lineární,
- homogenní (pravá strana je nulová).

Pro složky napětí platí:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

Inverzní metoda řešení

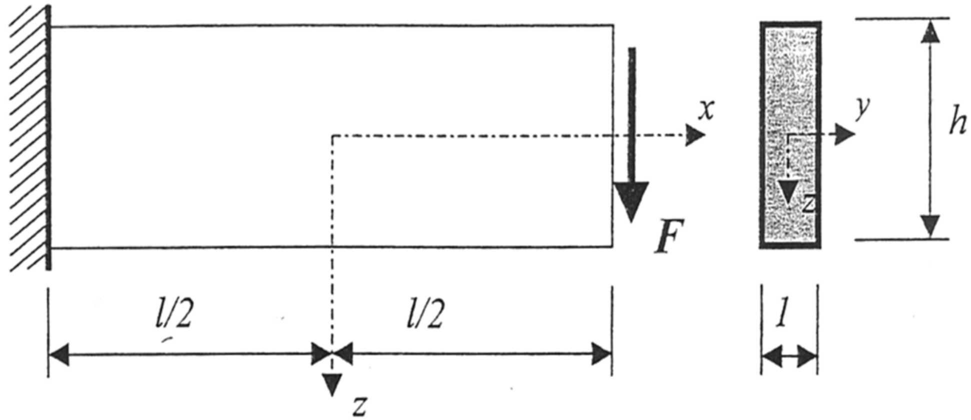
Podstatou inverzní metody řešení nosných stěn je:

- analýza zadané biharmonické (Airyho) funkce napětí (zjištění, zda-li zadaná funkce je skutečně biharmonická, tj. že splňuje stěnovou rovnici),
- hledání odpovídajících okrajových podmínek (silových, deformačních případně smíšených),
- analýza stavu napětí v dané stěně.

Řešení inverzní metodou vychází z předem známého tvaru Airyho funkce napětí, ke které se hledá odpovídající nosná stěna s příslušnými okrajovými podmínkami – z této skutečnosti vychází i název **inverzní metoda**.

Nosné stěny, řešení inverzní metodou

Zadání: Řešte stěnu podepřenou jako konzolu a zatíženou bodovou silou



Airyho funkci napětí zvolte ve tvaru:

$$\Phi = axz + bz^3 + cxz^3$$

Φ musí vyhovovat stěnové rovnici:

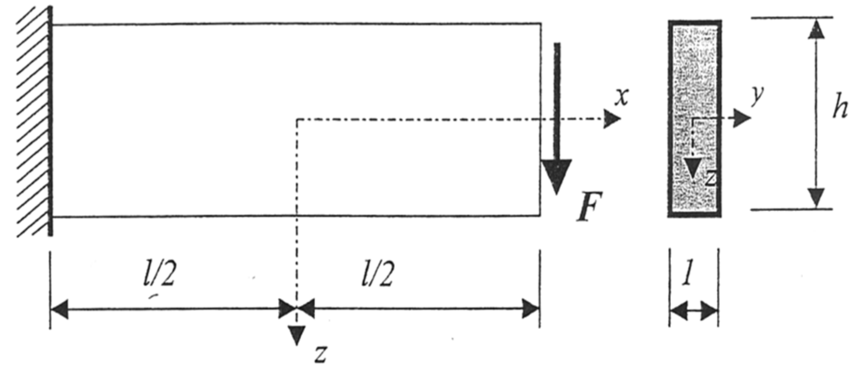
$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} = 0$$

což je splněno:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial z^2} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} = 0$$

Nosné stěny, řešení inverzní metodou, okrajové podmínky

Složky napětí pro funkci:



$$\Phi = axz + bz^3 + cxz^3$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 6bz + 6cxz \qquad \sigma_z = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}(az + cz^3) = -a - 3cz^2$$

Okrajové podmínky:

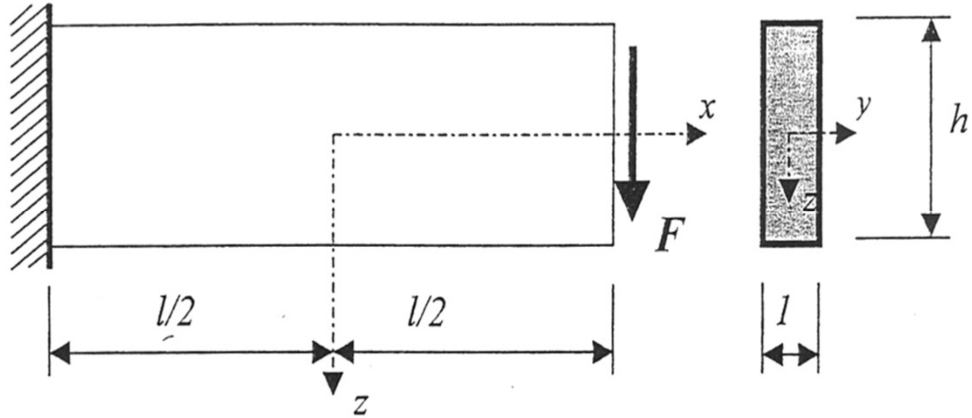
1. pro $z = \pm\frac{h}{2}$ $\quad \boxed{\tau_{xz} = -a - 3cz^2 = 0} \rightarrow \boxed{a = -3cz^2 = -\frac{3ch^2}{4}}$

2. pro $x \in \langle 0, l \rangle$ $\quad \boxed{\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \mathrm{d}z = F}$

$$\boxed{\int_{-h/2}^{h/2} \left(-a - 3cz^2\right)\mathrm{d}z = \left[-az - cz^3\right]_{-h/2}^{h/2} = -ah - c\frac{h^3}{4} = \frac{3ch^2}{4}h - c\frac{h^3}{4} = \frac{1}{2}ch^3 = F} \rightarrow \boxed{c = \frac{2F}{h^3}}$$

3. pro $x = \frac{l}{2}$ $\quad \boxed{\sigma_x = 6bz + 6cxz = 0} \rightarrow \boxed{b = -\frac{cl}{2} = -\frac{Fl}{h^3}} \rightarrow \boxed{a = -\frac{3F}{2h}}$

Nosné stěny, řešení inverzní metodou, funkce napětí



$$a = -\frac{3F}{2h} \qquad b = -\frac{Fl}{h^3} \qquad c = \frac{2F}{h^3}$$

Po vložení hodnot do Airyho funkce:

$$\Phi = axz + bz^3 + cxz^3 = F\left(-\frac{3}{2h}xz - \frac{l}{h^3}z^3 + \frac{2}{h^3}xz^3\right)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{12F}{h^3}z\left(-\frac{l}{2}+x\right) = \frac{F(-l/2+x)}{h^3/12}z = \frac{M_y(x)}{I_y}z \qquad \sigma_z = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

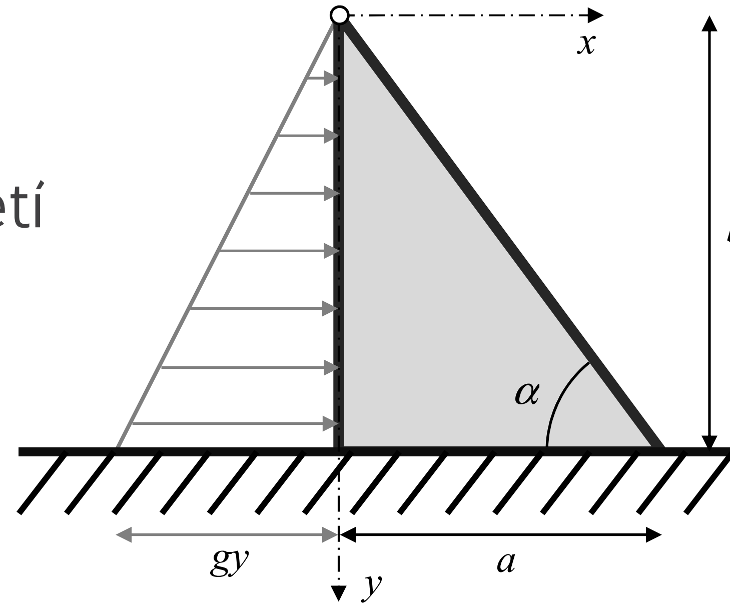
$$\tau_{xz} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} = \frac{3}{2}\frac{F}{h}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right) = \frac{V_z \cdot \bar{S}_y(z)}{I_y} \qquad \tau_{xz}(z=0) = \frac{3}{2}\frac{F}{h} \qquad \tau_{xz}\left(z=\pm\frac{h}{2}\right) = 0$$

Tyto vztahy odvozeny v PP - výpočet normálových a smykových napětí (Grashofův vzorec) pro obdélníkový průřez a jednotkovou šířku konzoly.

Nosné stěny, řešení inverzní metodou

Zadání:

Řešte trojúhelníkovou stěnu na obr. pomocí Airyho funkce napětí (ověřte, zda splňuje základní stěnovou rovnici, podmínky rovnováhy a okrajové podmínky)



Airyho funkci napětí zvolte ve tvaru:

$$\Phi(xy) = g\left[\frac{b^2}{a^3}\left(\frac{a}{2}x^2y - \frac{b}{3}x^3 + C_1x + ayC_2\right) - \frac{1}{6}y^3 + C_3y + C_4\right]$$

kde C_1 až C_4 jsou neznámé parametry

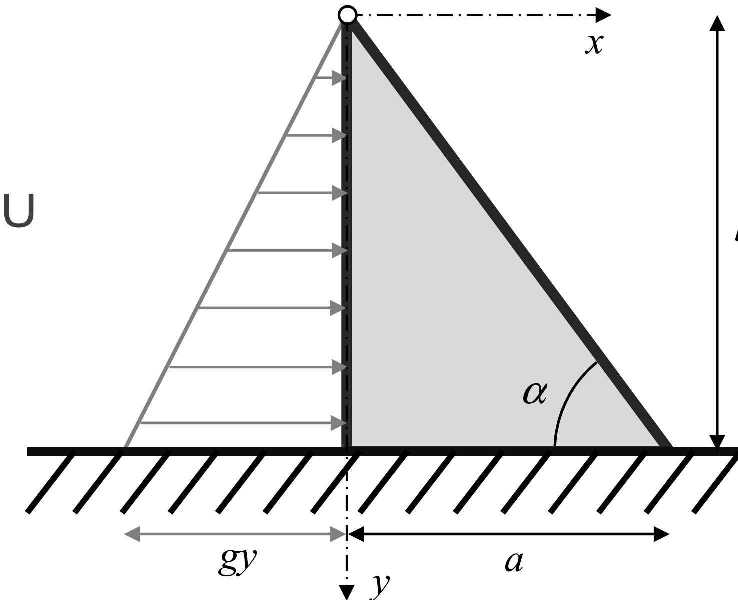
Další vstupní údaje:

tloušťka stěny h=1 m, zatížení g [kN/m^3], napětí [kN/m^2], vlastní tíha tj. X=Y=0

Nosné stěny, řešení inverzní metodou

Řešení:

1. ověření, zda Airyho funkce napětí splňuje základní stěnovou rovnici



Airyho funkce napětí:

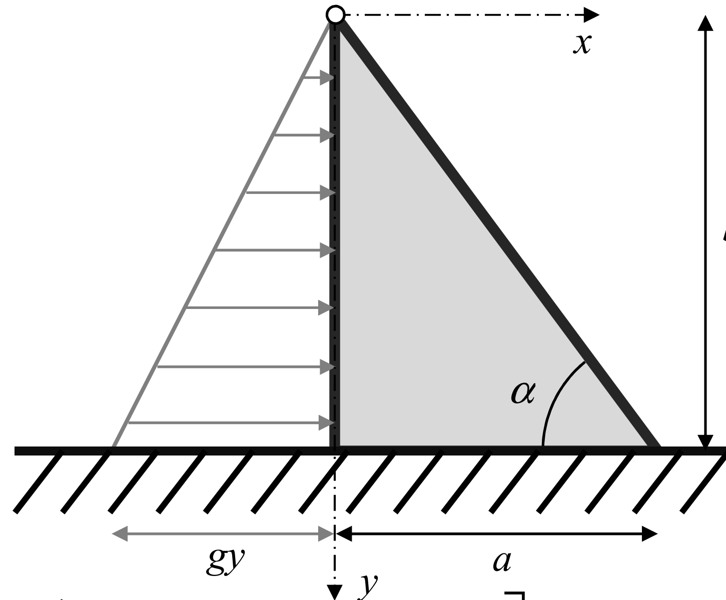
$$\Phi(xy) = g\left[\frac{b^2}{a^3}\left(\frac{a}{2}x^2y - \frac{b}{3}x^3 + C_1x + ayC_2\right) - \frac{1}{6}y^3 + C_3y + C_4\right]$$

musí splňovat:

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} = 0 \qquad \frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = 0 \qquad \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} = 0 \qquad \Delta\Delta\Phi(x, y) = 0$$

aby byla **biharmonická**.

Nosné stěny, řešení inverzní metodou



Řešení:

2. ověření podmínek rovnováhy

Airyho funkce napětí:

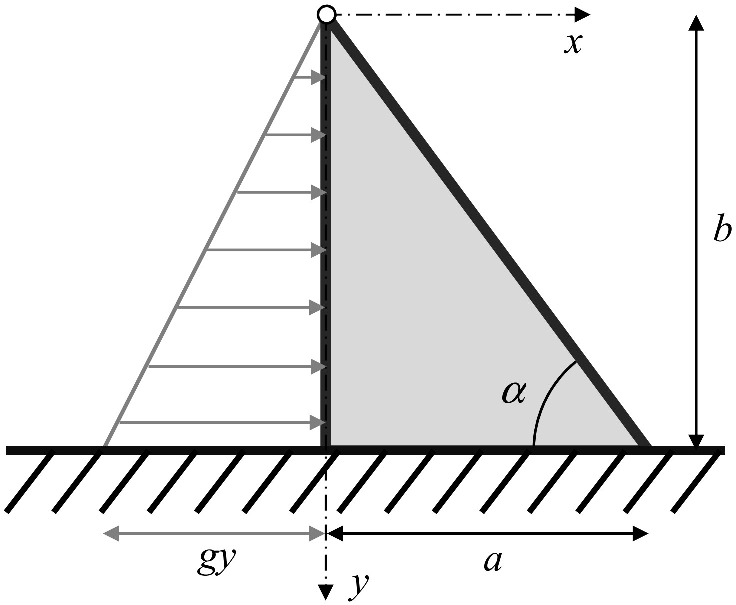
$$\Phi(xy) = g\left[\frac{b^2}{a^3}\left(\frac{a}{2}x^2y - \frac{b}{3}x^3 + C_1x + ayC_2\right) - \frac{1}{6}y^3 + C_3y + C_4\right]$$

musí splňovat:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \qquad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

kde $\sigma_x = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ $\qquad \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ $\qquad \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$

Nosné stěny, řešení inverzní metodou



Řešení:

2. ověření podmínek rovnováhy

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -gy$$

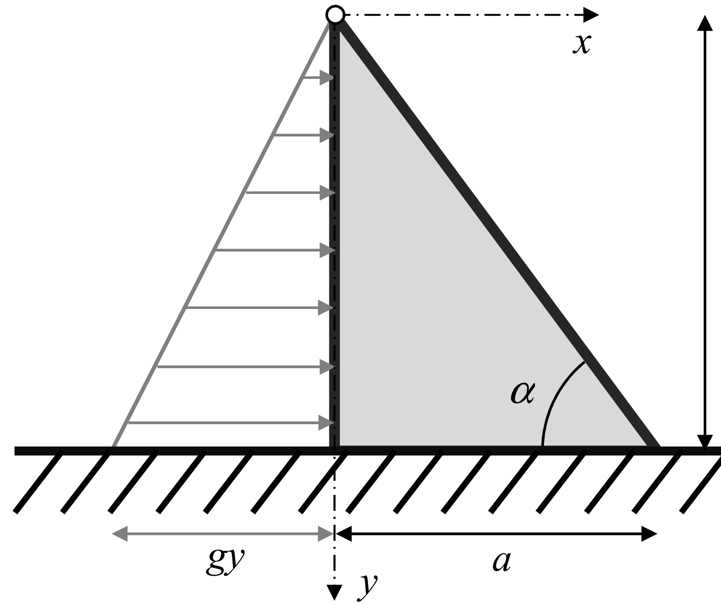
$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = g\frac{b^2}{a^3}(ay - 2bx)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -g\frac{b^2}{a^3}ax = -g\frac{b^2}{a^2}x$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 + 0 = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -g\frac{b^2}{a^2} + g\frac{b^2}{a^2} = 0$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Nosné stěny, řešení inverzní metodou



Řešení:

3. ověření okrajových podmínek

Funkce složek napětí:

$$\sigma_x = -gy$$

$$\sigma_y = g\frac{b^2}{a^3}(ay - 2bx) \qquad \tau_{xy} = -g\frac{b^2}{a^2}x$$

Okraje:

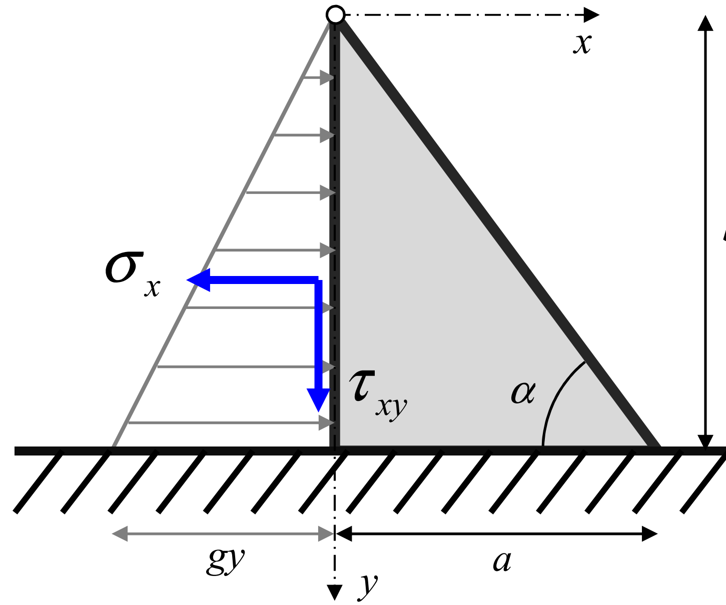
1. svislý: $x = 0$ $\quad y \in \langle 0, b \rangle$
2. šikmý: $x = \frac{a}{b}y$ $\quad$ možno ověřit statické okrajové podmínky na šikmém okraji
3. vodorovný: $x \in \langle 0, a \rangle$ $\quad y = b$

Napětí na všech třech okrajích lze nakonec ověřit podmínkami rovnováhy v rovině

Nosné stěny, řešení inverzní metodou

Řešení:

3. ověření okrajových podmínek

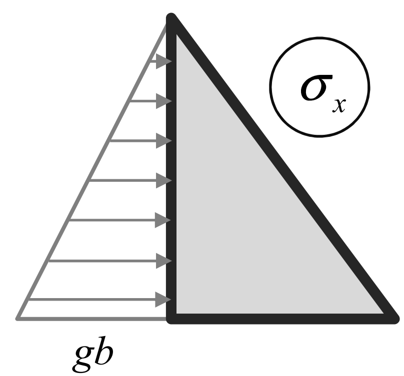


Funkce složek napětí:

$$\sigma_x = -gy$$

$$\sigma_y = g\frac{b^2}{a^3}(ay - 2bx) \qquad \tau_{xy} = -g\frac{b^2}{a^2}x$$

1. Okraj svislý: $x = 0$ $\quad y \in \langle 0, b \rangle$

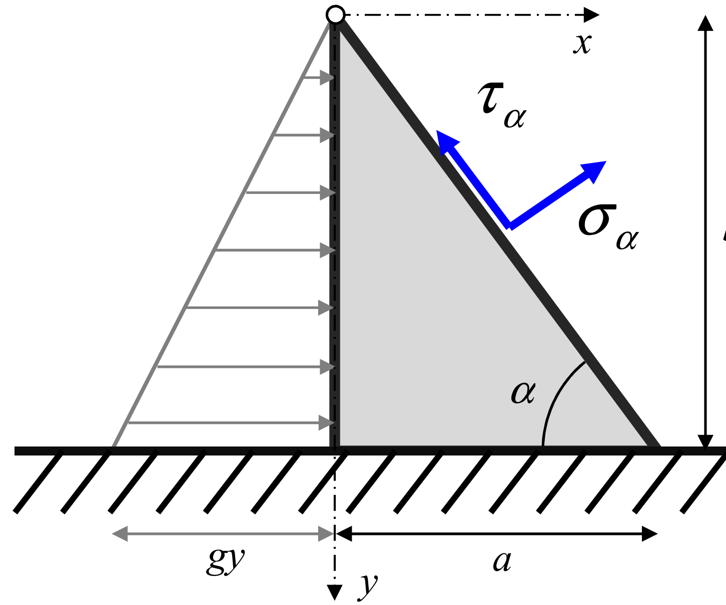


Výsledná napětí:

$$\sigma_x = -gy \qquad \tau_{xy} = -g\frac{b^2}{a^2}0 = 0$$

Odpovídá danému zatížení, okraj není tečně zatížen

Nosné stěny, řešení inverzní metodou



Řešení:

3. ověření okrajových podmínek

Funkce složek napětí:

$$\sigma_x = -gy$$

$$\sigma_y = g\frac{b^2}{a^3}(ay - 2bx) \qquad \tau_{xy} = -g\frac{b^2}{a^2}x$$

2. Okraj šikmý: $x = \frac{a}{b}y$

Výsledná napětí:

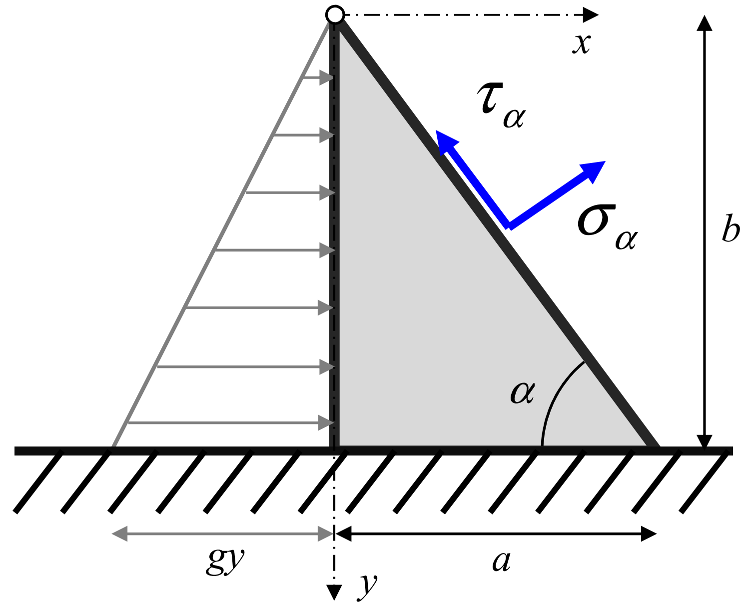
$$\sigma_x = -gy \qquad \sigma_y = g\frac{b^2}{a^3}(ay - 2ay) = -g\frac{b^2}{a^2}y \qquad \tau_{xy} = -g\frac{b^2}{a^2}\frac{a}{b}y = -g\frac{b}{a}y$$

Lze ověřit statické okrajové podmínky na šikmém okraji (viz dále)

$$\sigma_\alpha = \tau_\alpha = ?$$

Nosné stěny, řešení inverzní metodou

2. Okraj šikmý: $x = \frac{a}{b} y$



Výsledná napětí:

$$\sigma_x = -gy$$

$$\sigma_y = g\frac{b^2}{a^3}(ay - 2ay) = -g\frac{b^2}{a^2}y$$

$$\tau_{xy} = -g\frac{b^2}{a^2}\frac{a}{b}y = -g\frac{b}{a}y \qquad \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

Ověření statických okrajových podmínek na šikmém okraji

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha = -gy\sin^2\alpha - gy\frac{b^2}{a^2}\cos^2\alpha + 2gy\frac{b}{a}\sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= -gy\cos^2\alpha\left(\tan^2\alpha + \tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha\right) = 0$$

$$\tau_\alpha = \tau_{xy}\cos 2\alpha - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha = gy\left[\frac{b}{a}\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right) + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha\right] =$$

$$= gy\cos^2\alpha\left[\tan\alpha\left(\tan^2\alpha - 1\right) - \tan\alpha\left(\tan^2\alpha - 1\right)\right] = 0$$

Podmínky splněny, šikmý okraj není zatížen

Nosné stěny, řešení inverzní metodou

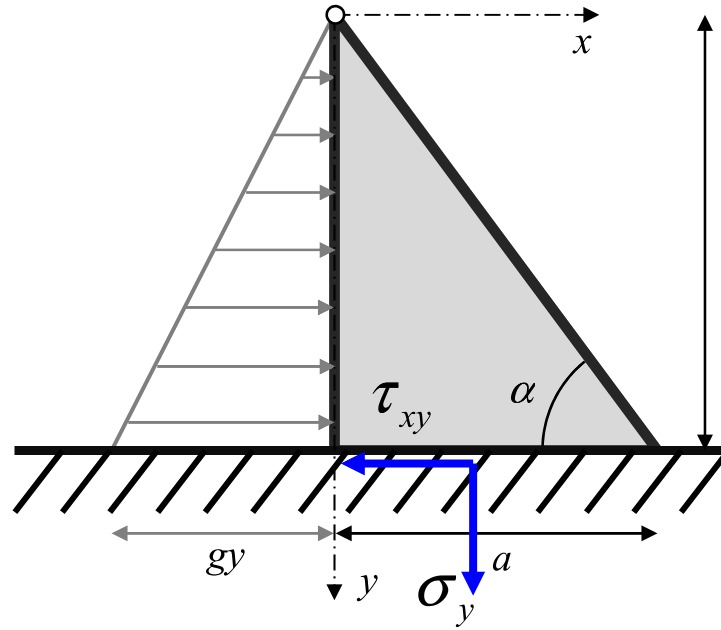
Řešení:

3. ověření okrajových podmínek

Funkce složek napětí:

$$\sigma_x = -gy$$

$$\sigma_y = g\frac{b^2}{a^3}(ay - 2bx) \qquad \tau_{xy} = -g\frac{b^2}{a^2}x$$

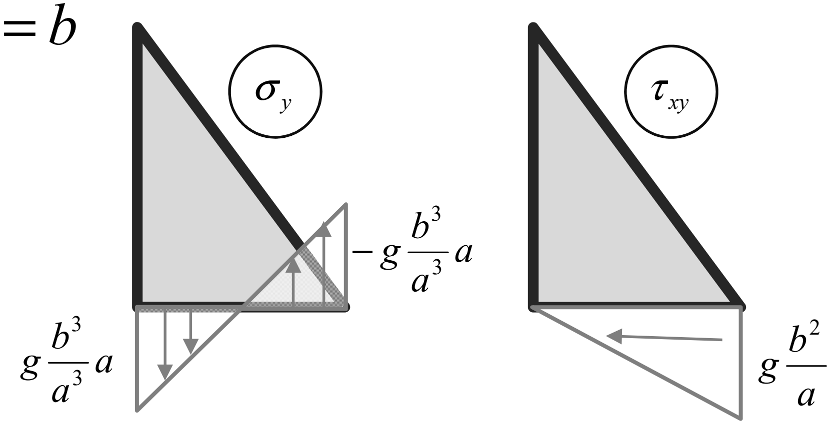


3. Okraj vodorovný: $x \in \langle 0, a \rangle \quad y = b$

Výsledná napětí:

$$\sigma_y = g\frac{b^2}{a^3}(ab - 2bx) = g\frac{b^3}{a^3}(a - 2x)$$

$$\tau_{xy} = -g\frac{b^2}{a^2}x$$

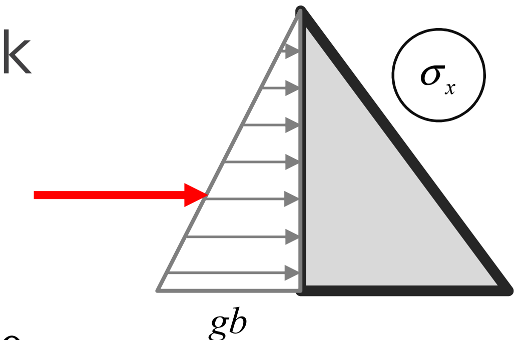


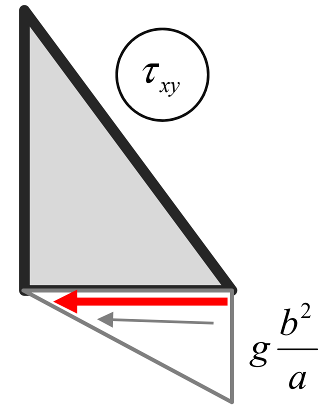
odpovídají napětím v kontaktní ploše (spojité podepření)

Nosné stěny, řešení inverzní metodou

Řešení:

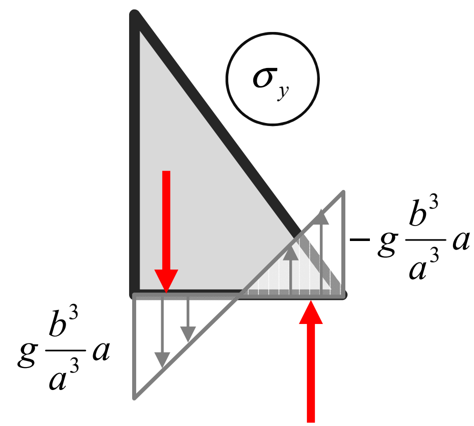
4. kontrola pomocí podmínek rovnováhy v rovině





$$\sum F_x = 0:$$

$$gb\cdot b\cdot\frac{1}{2} - g\frac{b^2}{a^2}a\cdot a\cdot\frac{1}{2} = \frac{gb^2}{2} - \frac{gb^2}{2} = 0$$



$$\sum F_y = 0:$$

$$g\frac{b^3}{a^3}(a-2\cdot 0)\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2} + g\frac{b^3}{a^3}(a-2\cdot a)\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0$$

$$\sum M_{z,D} = 0:$$

$$-gb\cdot b\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{3} + g\frac{b^3}{a^3}\cdot a\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}a - g\frac{b^3}{a^3}\cdot a\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}a = gb^3\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{5}{24}\right) = 0$$