VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta stavební

Pružnost a plasticita II

3. ročník bakalářského studia

doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.
Katedra stavební mechaniky

Osnova cvičení

1. Složky tenzoru napětí a jejich transformace.
2. Řešení stěn pomocí Airyho funkce napětí.
   1. písemka transformace napětí
3. Řešení pravoúhlých stěn metodou sítí.
   zadání 1. programu
4. Řešení pravoúhlých stěn metodou sítí.
5. Řešení pravoúhlých desek metodou sítí.
   zadání 2. programu
6. Řešení pravoúhlých desek metodou sítí.
7. Řešení kruhových desek.
8. Řešení mezikruhových desek.
9. Skořepinové konstrukce, membránový stav.
   2. písemka, kruhové a mezikruhové desky
10. Nosník na pružném podkladu, numerické řešení.
11. Mezní plastická únosnost prutových konstrukcí.
12. Stabilita prutových konstrukcí, numerické řešení.
    3. písemka, mezní únosnost nosníků
13. Řešení nosníku Ritzovou metodou.

Hodnocení zápočtu

<u>Předpoklady pro získání zápočtu:</u>

- ✓ Uznaný zápočet z předmětu SSKI
- ✓ 70% účast na cvičení, neúčast musí být řádně omluvená
- ✓ Zvládnutí 3 písemných prací
- ✓ Zvládnutí 2 programů
- ✓ <u>Získání minimálně 18 bodů z 35 možných</u>

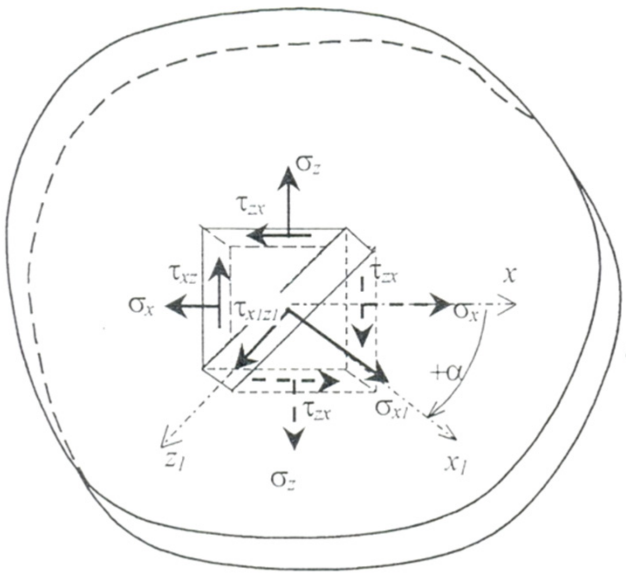
<u>Bodování na cvičení</u>:

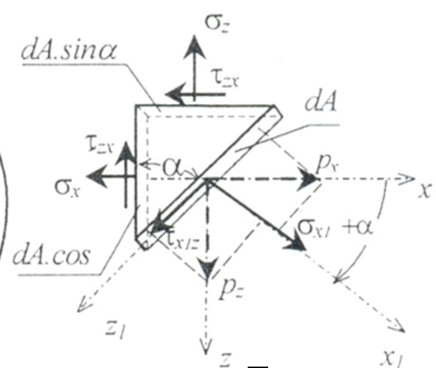
- 3 písemky
  - 7 až 4 bodů
  - první opravná - 6 až 4 body
  - další opravné – max. 4 body
- 2 programy
  - včas a správně 7 bodů,
  - včas a chybně po první správné opravě 5 bodů, po druhé správné opravě 4 body, po další správné opravě 3 body
  - pozdě a správně 5 bodů, po první správní opravě 4 body, po další správné opravě 3 body

1

Transformace složek napětí

Transformační vztahy pro rovinný stav napjatosti





$$[\sigma_1]=[L]\cdot[\sigma]\cdot[L]^T$$

$$[L]=\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ m_x & m_y & m_z \\ s_x & s_y & s_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Pro rovinnou napjatost lze zjednodušit:

$$[\sigma_1]=\begin{bmatrix} \sigma_{x_1} & \tau_{z_1x_1} \\ \tau_{x_1z_1} & \sigma_{z_1} \end{bmatrix} \qquad [L]=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad [\sigma]=\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Transformační vztahy pro rovinný stav napjatosti

Vyjde-li se z rovnice: $[\sigma_1]=[L]\cdot[\sigma]\cdot[L]^T$

$$[\sigma_1]=\begin{bmatrix}\sigma_{x_1} & \tau_{z_1x_1}\\ \tau_{x_1z_1} & \sigma_{z_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{zx}\\ \tau_{xz} & \sigma_z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{x_1} & \tau_{z_1x_1}\\ \tau_{x_1z_1} & \sigma_{z_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & s\\ -s & c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}(\sigma_x c+\tau_{zx}s) & (-\sigma_x s+\tau_{zx}c)\\ (\tau_{xz}c+\sigma_z s) & (-\tau_{xz}s+\sigma_z c)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{x_1} & \tau_{z_1x_1}\\ \tau_{x_1z_1} & \sigma_{z_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\sigma_x c^2+\tau_{zx}sc+\tau_{xz}sc+\sigma_z s^2) & (-\sigma_x sc+\tau_{zx}c^2-\tau_{xz}s^2+\sigma_z sc)\\ (-\sigma_x sc-\tau_{zx}s^2+\tau_{xz}c^2+\sigma_z s^2) & (\sigma_x s^2-\tau_{zx}sc-\tau_{xz}sc+\sigma_z c^2)\end{bmatrix}$$

kde $s=\sin\alpha$ a $c=\cos\alpha$

Transformační vztahy pro rovinný stav napjatosti

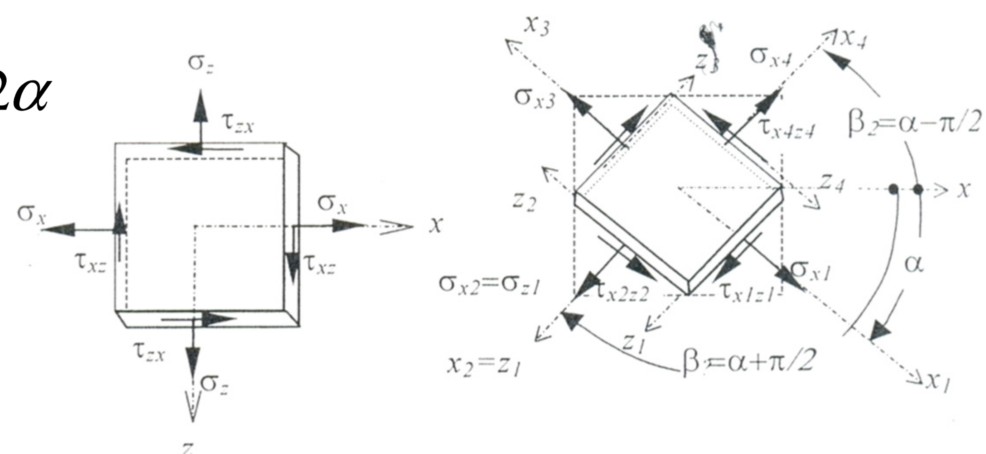
Po úpravě:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x_1} & \tau_{z_1x_1} \\ \tau_{x_1z_1} & \sigma_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\sigma_x c^2 + \tau_{zx} sc + \tau_{xz} sc + \sigma_z s^2\right) & \left(-\sigma_x sc + \tau_{zx} c^2 - \tau_{xz} s^2 + \sigma_z sc\right) \\ \left(-\sigma_x sc - \tau_{zx} s^2 + \tau_{xz} c^2 + \sigma_z sc\right) & \left(\sigma_x s^2 - \tau_{zx} sc - \tau_{xz} sc + \sigma_z c^2\right) \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_z \sin^2\alpha + \tau_{zx} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{x_1z_1} = \tau_{z_1x_1} = \tau_{xz} \cos 2\alpha - \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_{z_1} = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_z \cos^2\alpha - \tau_{xz} \sin 2\alpha$$



s_{z1} lze odvodit ze vzorce
pro s_{x1} je-li pootočení *b=a+p/2*

Hlavní normálová napětí

Je-li znám tenzor nebo vektor napětí v souřadném systému *x, y* , pak je často nutné určit směry a hodnoty extrémních normálových napětí.

Lze vyjít ze vzorce: $$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_z \sin^2\alpha + \tau_{xz} \sin 2\alpha$$

Platí: $$\frac{\mathrm{d}\sigma_{x_1}}{\mathrm{d}\alpha} = 2\sigma_x \cos\alpha(-\sin\alpha) + 2\sigma_z \sin\alpha\cos\alpha + 2\tau_{xz}\cos 2\alpha = 0$$

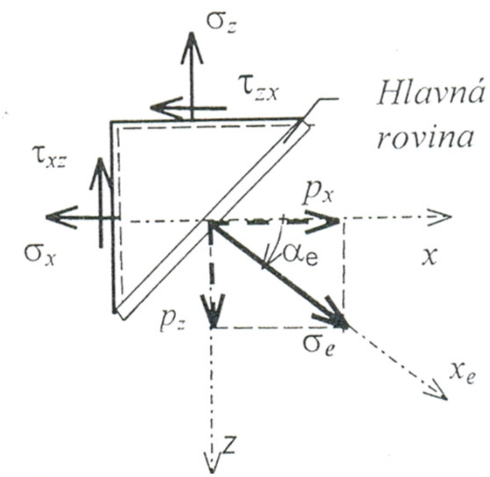
$$\tau_{x_1 z_1} = \tau_{xz}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)\sin 2\alpha = 0 \qquad \tau_{xz}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)\sin 2\alpha = 0$$

Největší normálové napětí je v rovině, v níž je smykové napětí nulové - **hlavní rovina** s příslušným **hlavním normálovým napětím**.

Úhel potočení α_e roviny *xz* do hlavní roviny neurčuje jednoznačně směr maximálního
a minimálního napětí:

$$tg 2\alpha_e = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z}$$

Hlavní normálová napětí



s_e hlavní normálové napětí

Z rovnic rovnováhy ve směru *x* a *z* vyplývá:

$$p_x = \sigma_e \cos\alpha_e = \sigma_x \cos\alpha_e + \tau_{zx} \sin\alpha_e$$

$$p_z = \sigma_e \sin\alpha_e = \sigma_z \sin\alpha_e + \tau_{xz} \cos\alpha_e$$

Řešení těchto dvou rovnic vede ke kvadratické rovnici s řešením:

$$\sigma_e = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}$$

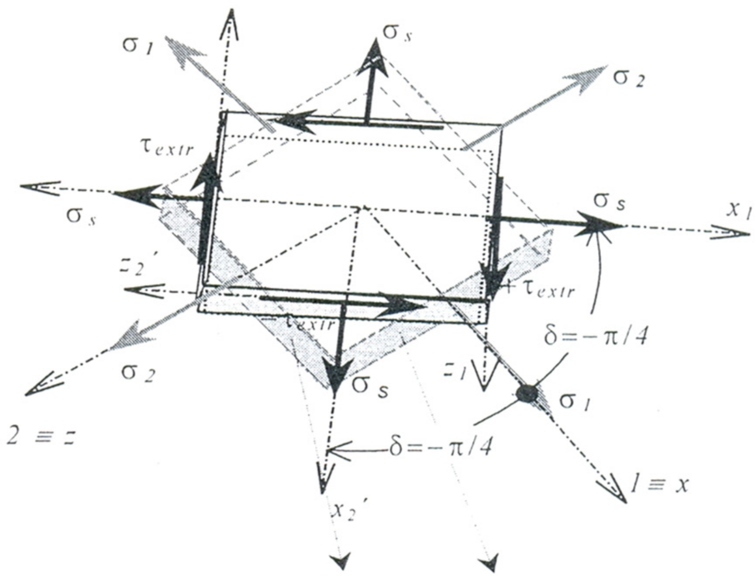
Hlavním napětím přiřazujeme zpravidla indexy $s_1 > s_2$

Směry a_1, a_2 hlavních napětí s_1 a s_2 lze jednoznačně určit ze vztahů:

$$\tan\alpha_1 = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_1 - \sigma_z} \qquad \tan\alpha_2 = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_2 - \sigma_z}$$

Maximální smyková napětí

Pokud jsou maximální normálová napětí s_1, s_2 známy, lze normálové napětí $s_{x'}$ a smykové napětí $t_{x\acute{z}'}$ vyjádřit:



Hlavní roviny

$$\sigma_{x'} = \sigma_1 \cos^2 \delta + \sigma_2 \sin^2 \delta$$

$$\tau_{x'z'} = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\delta$$

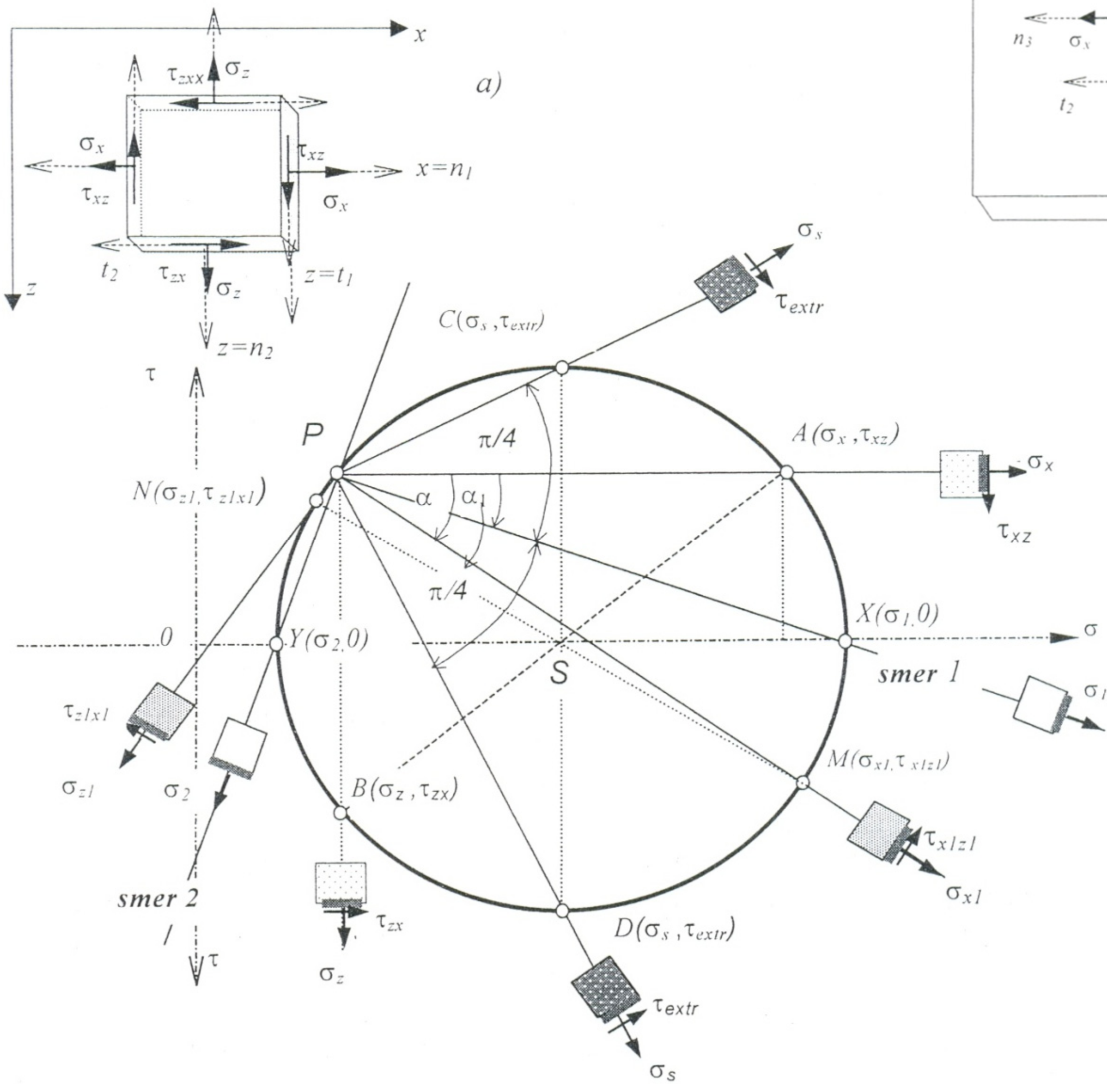
Maximální (extrémní) smyková napětí budou na plochách hlavních smyků při hodnotách d vyplývajících z rovnice:

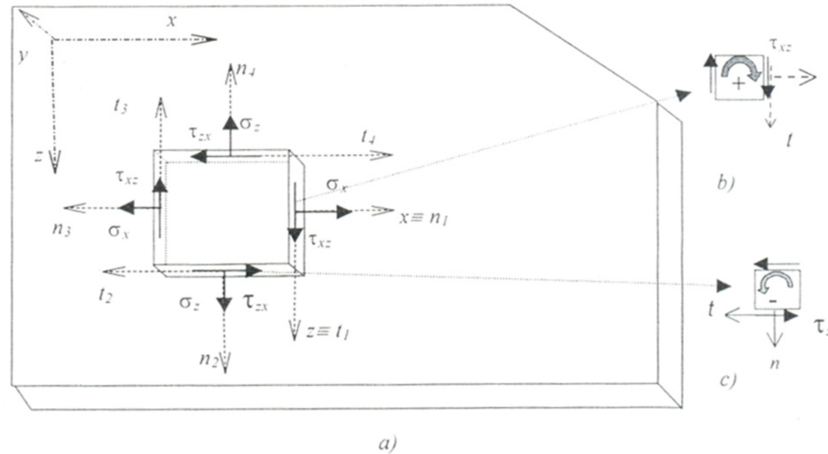
$$\frac{\mathrm{d}\tau_{x'z'}}{\mathrm{d}\delta} = 0 \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)2\cos 2\delta = 0 \rightarrow \cos 2\delta = 0 \Rightarrow \delta = -\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}$$

Na těchto plochách budou působit maximální smyková napětí t_{extr} a normálové napětí s_s:

$$\tau_{extr} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad \sigma_s = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Mohrova kružnice

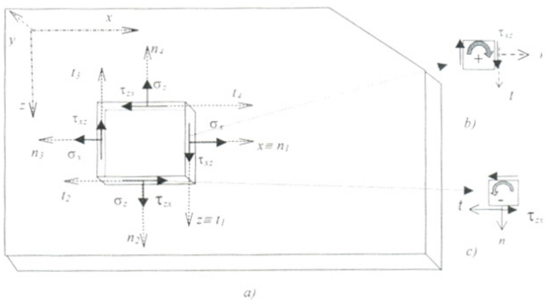




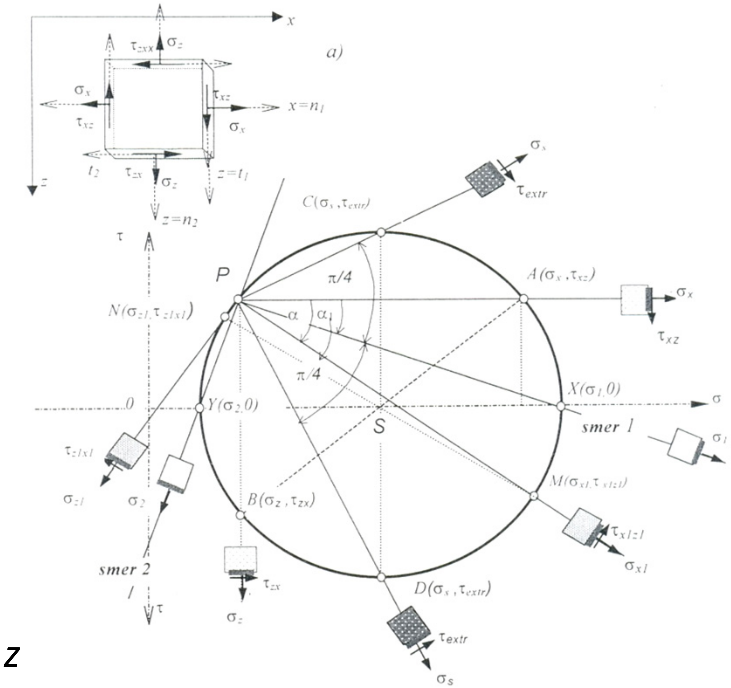
$$\tan \alpha_1 = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_1 - \sigma_z}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_2 - \sigma_z}$$

Mohrova kružnice



Orientace podle směru otáčení



1. Souřadný systém zvolit tak, že osa *σ* odpovídá *x*, osa *τ* pak ose *z*
2. Vynést bod A (σ_x, τ_{xz}) - τ_{xz} má stejnou orientaci jako t_1, je proto kladné (nahoru).
3. Vynést bod B (σ_z, τ_{zx}) - τ_{zx} má opačnou orientaci jako t_1, je proto záporné (dolů).

Poznámka: pro orientaci je rozhodující směr otáčení! Pozor na volbu os *xz* případně *xy*.

4. Střed kružnice S je průsečík spojnice AB s osou *s*, poloměr odpovídá úsečce AS a BS,

maximální napětí je v bodě X(σ_1, 0) kružnice, minimální v bodě Y(σ_2, 0) kružnice. Extrémní hodnoty smykových napětí určují body C a D.

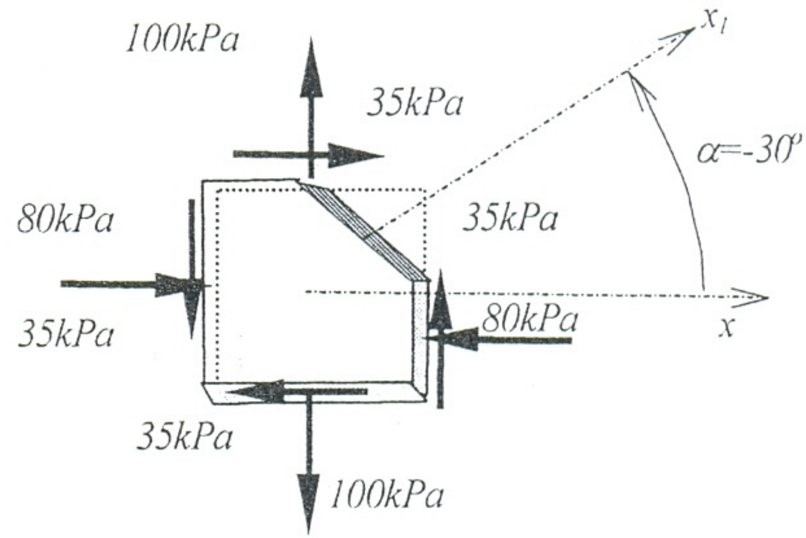
5. Pól Mohrovy kružnice P je průsečík kružnice a rovnoběžky s osou *x* (*σ*) vedenou bodem A, respektive průsečík kružnice s přímkou rovnoběžnou s osou *z* (*τ*) vedenou bodem B.
6. Spojnice PX určuje směr hlavního napětí σ_1, spojnice PY směr hlavního napětí s_2.
7. V případě určení napětí na plošce s normálou x_1 pootočenou od *x* o *a*, nutno vést rovnoběžky s osami x_1 a z_1 z pólu P – body M a N.

Příklad 1

Napěťový stav v okolí bodu

je definován tenzorem napětí:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -80 & -35 \\ -35 & 100 \end{vmatrix}$$



Vypočtěte a určete i graficky pomocí Mohrovy kružnice:

1. Napjatost na plošce, jejíž normála síla svírá s osou *x* orientovaný úhel *α* =-30°.
2. Velikost a směr hlavních normálových napětí a maximální smykové napětí.

Příklad 1, řešení

Výpočet normálového a smykového napětí pro *a*=30°:

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_z \sin^2\alpha + \tau_{xz} \sin 2\alpha =$$

$$-80\cos^2(-30) + 100\sin^2(-30) - 35\sin 2(-30) = -4{,}69\mathrm{kPa}$$

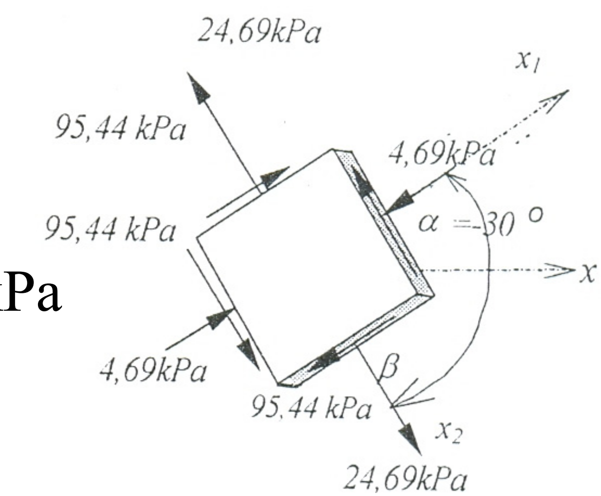
$$\tau_{x_1 z_1} = \tau_{xz}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)\sin 2\alpha =$$

$$-80\cos 2(-30) - \frac{1}{2}(-80-100)\sin 2(-30) = -95{,}44\mathrm{kPa}$$

Výpočet normálového napětí pro *b*=60°:

$$\sigma_{x_2} = \sigma_x \cos^2\beta + \sigma_z \sin^2\beta + \tau_{xz} \sin 2\beta =$$

$$-80\cos^2 60 + 100\sin^2 60 - 35\sin 2\cdot 60 = 24{,}69\mathrm{kPa}$$



Příklad 1, pokračování řešení

Výpočet hlavních normálových napětí:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2} =$$

$$= \frac{-80+100}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-80-100)^2 + 4(-35)^2} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= 106{,}566\,\mathrm{kPa} \\ \sigma_2 &= -86{,}566\,\mathrm{kPa} \end{aligned}$$

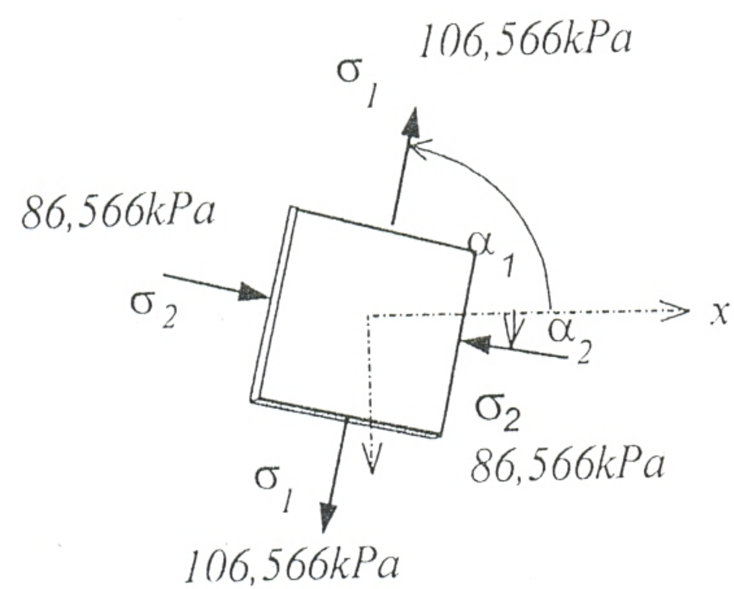
Úhel směru hlavních napětí od osy *x*:

$$\alpha_1 = \arctan\frac{\tau_{xz}}{\sigma_1 - \sigma_z} =$$

$$= \arctan\frac{-35}{106{,}566 - 100} = -79{,}375^o$$

$$\alpha_2 = \arctan\frac{\tau_{xz}}{\sigma_2 - \sigma_z} =$$

$$= \arctan\frac{-35}{-86{,}566 - 100} = 10{,}625^o$$



Příklad 1, pokračování řešení

Výpočet maximálních smykových napětí:

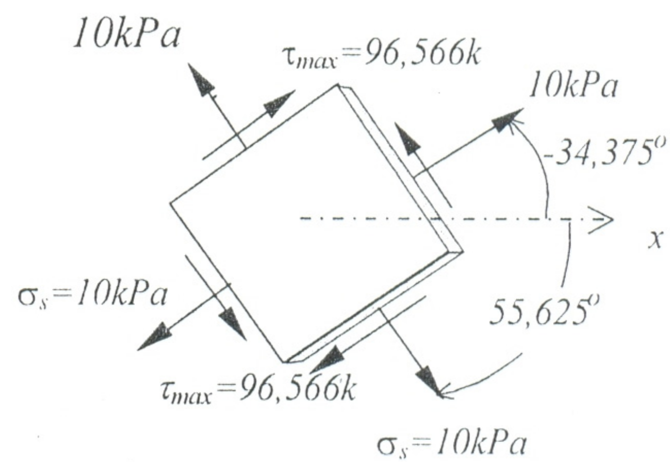
$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 96{,}566 kPa$$

Úhel směru hlavních normálových napětí

a maximálních smykových napětí: $\delta = \pm 45^{\circ}$

Úhel směru maximálních

smykových napětí od osy *x*:



$$\alpha_{\tau_{1,2}} = \alpha_2 \pm \delta \Rightarrow$$

$$\alpha_{\tau_1} = 55{,}625^{\circ} \quad \alpha_{\tau_2} = -34{,}375^{\circ}$$

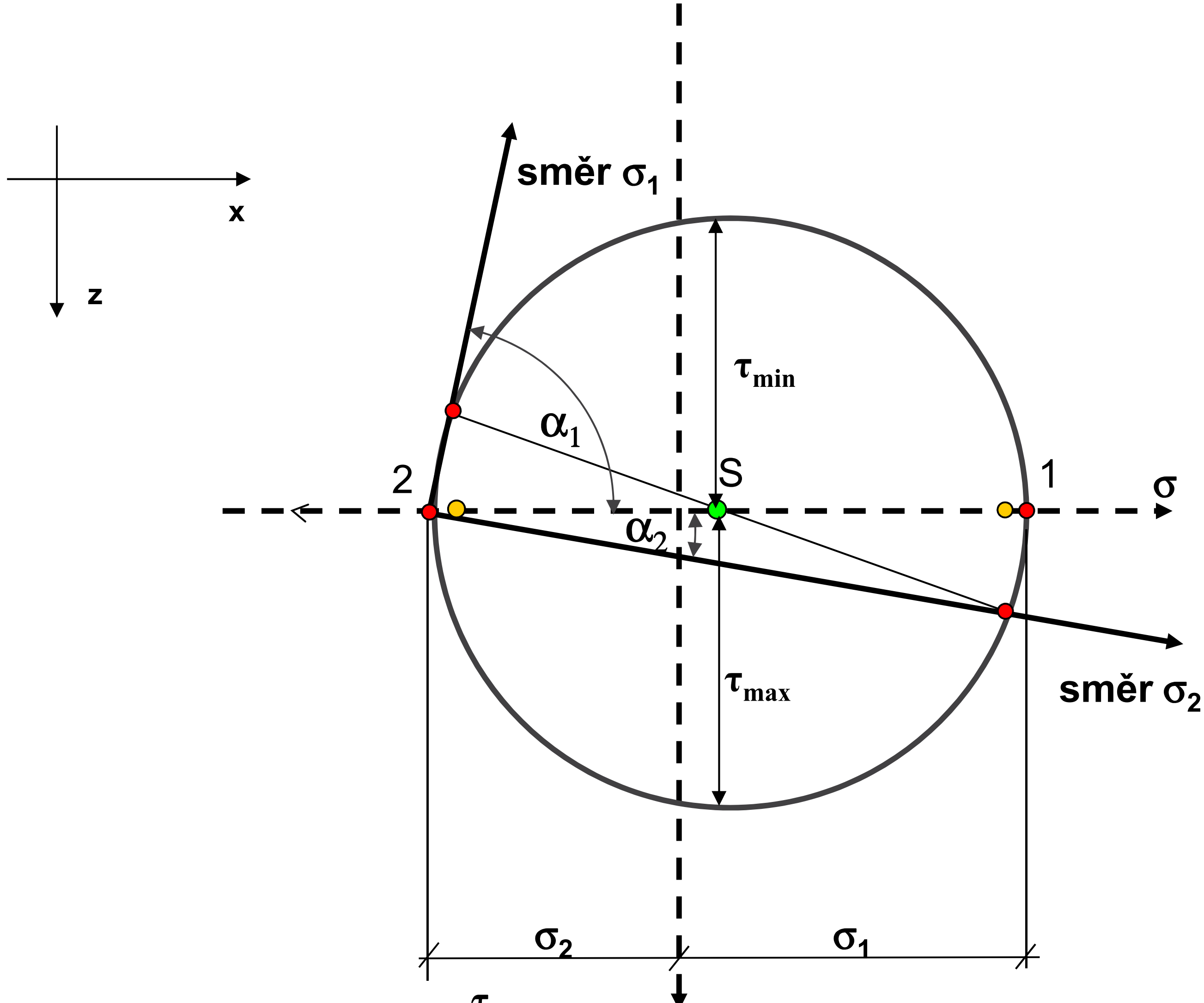
Normálové napětí na ploškách maximálního smykového napětí

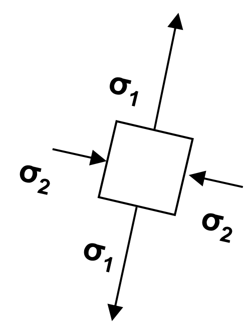
$$\sigma_s = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{106{,}566 - 86{,}566}{2} = 10\mathrm{kPa}$$

Příklad 1, Mohrova kružnice

σ_x=-80 MPa, σ_z=100 MPa, τ_{xz}=-35 MPa

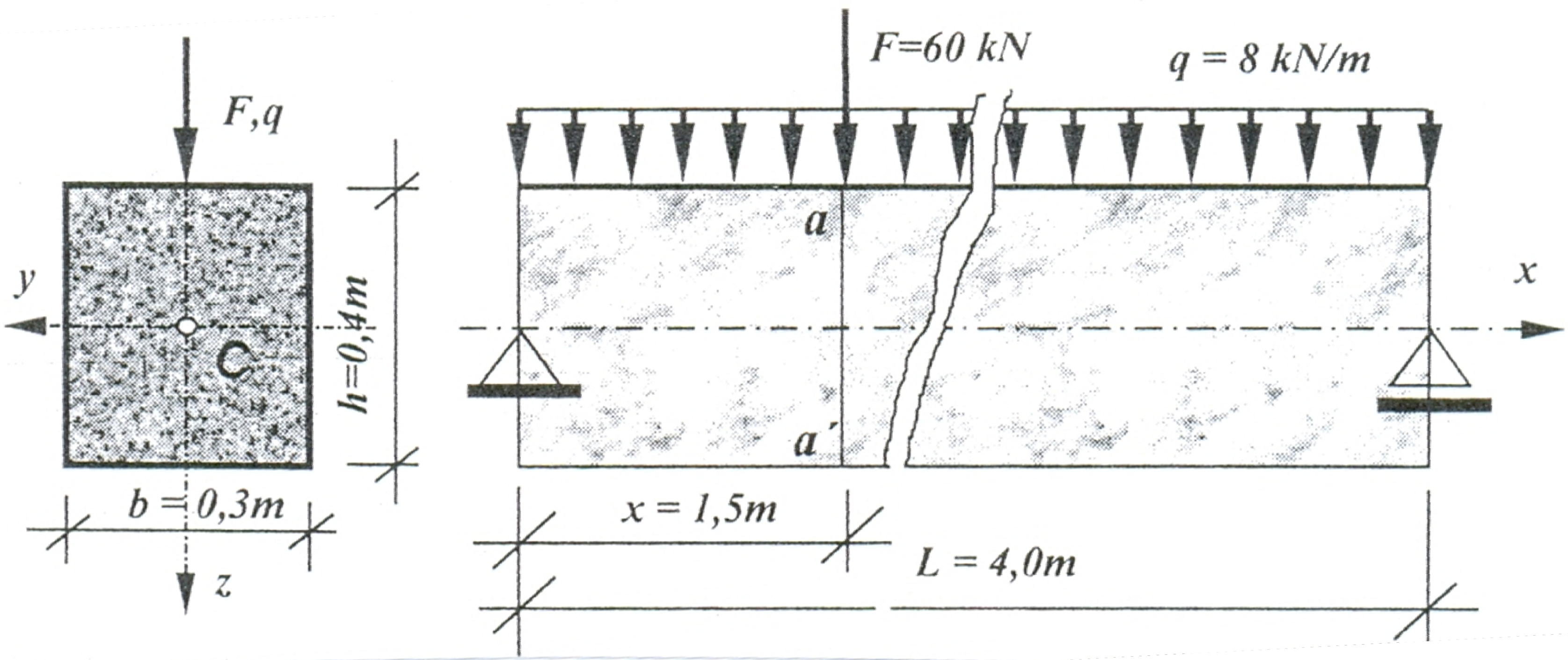
$$\sigma_1 = 106{,}566\text{kPa}$$
$$\sigma_2 = -86{,}566\text{kPa}$$
$$\tau_{\max,\min} = 96{,}566\,kPa$$
$$a_1 = -79{,}375°$$
$$a_2 = 10{,}625°$$



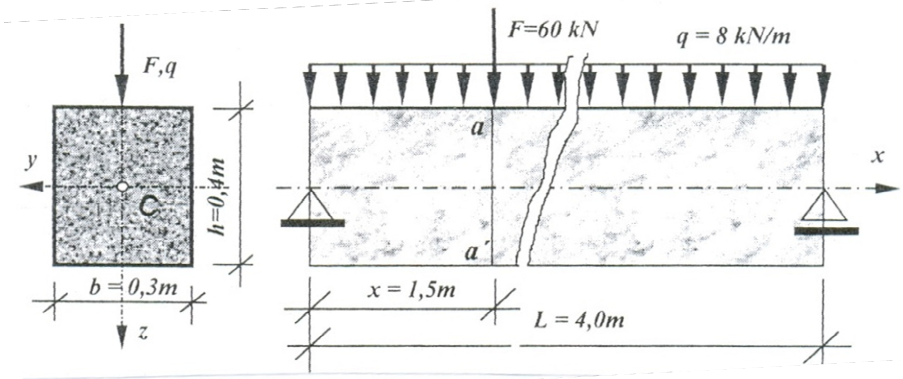


Příklad 2

Určete velikosti a směry hlavních napětí vlevo od průřezu *a*-*a*´ pro *z*=-0,2, -0,1, 0, 0,1 a 0,2.



Příklad 2 řešení



1. Reakce R_A:

$$R_A = \left(2{,}5 \cdot 60 + 8 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} = 53{,}5\text{kN}$$

2. Vnitřní síly v řezu *a–a´*:

$$M_y = R_A \cdot 1{,}5 - \frac{1}{2} q \cdot 1{,}5^2 = 71{,}25\text{kNm}$$

$$V_z = R_A - q \cdot 1{,}5 = 41{,}5\text{kN}$$

3. Výpočet normálových a smykových napětí v řezu *a–a´*:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z = \frac{71{,}25}{\frac{1}{12} 0{,}3 \cdot 0{,}4^3} \cdot z = 44531{,}25 \cdot z$$

$$\tau_{xz} = \frac{V_z}{I_y \cdot b(z)} S_y(z) = \frac{41{,}5}{\frac{1}{12} 0{,}3 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}3} \cdot S_y(z) = 86458{,}33 \cdot S_y(z)$$

Příklad 2 řešení, pokračování

3. Výpočet normálových a smykových napětí v řezu *a – a´*:

$z=-0{,}2 \Rightarrow \sigma_x^{(1)} = 44531{,}25\cdot(-0{,}2) = -8906{,}25\,\text{kPa}; \quad \tau_{xz}^{(1)} = 86458{,}33\cdot 0 = 0$

$z=-0{,}1 \Rightarrow \sigma_x^{(2)} = 44531{,}25\cdot(-0{,}1) = -4453{,}13\,\text{kPa}; \quad \tau_{xz}^{(2)} = 86458{,}33\cdot 0{,}3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}15 = 389{,}06\,\text{kPa}$

$z=0 \Rightarrow \sigma_x^{(3)} = 44531{,}25\cdot 0 = 0; \ \tau_{xz}^{(3)} = 86458{,}33\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 = 518{,}78\,\text{kPa}$

$z=0{,}1 \Rightarrow \sigma_x^{(4)} = 44531{,}25\cdot(0{,}1) = 4453{,}13\,\text{kPa}; \ \tau_{xz}^{(4)} = 86458{,}33\cdot 0{,}3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}15 = 389{,}06\,\text{kPa}$

$z=0{,}2 \Rightarrow \sigma_x^{(1)} = 44531{,}25\cdot(0{,}2) = 8906{,}25\,\text{kPa}; \ \tau_{xz}^{(5)} = 86458{,}33\cdot 0 = 0$

4. Výpočet hlavních napětí a jejich směrů:

$z=-0{,}2 \Rightarrow \sigma_1^{(1)} = 0; \sigma_2^{(1)} = -8906{,}25\,\text{kPa}; \alpha_1^{(1)} = 90^\circ; \ \alpha_2^{(1)} = 0^\circ$

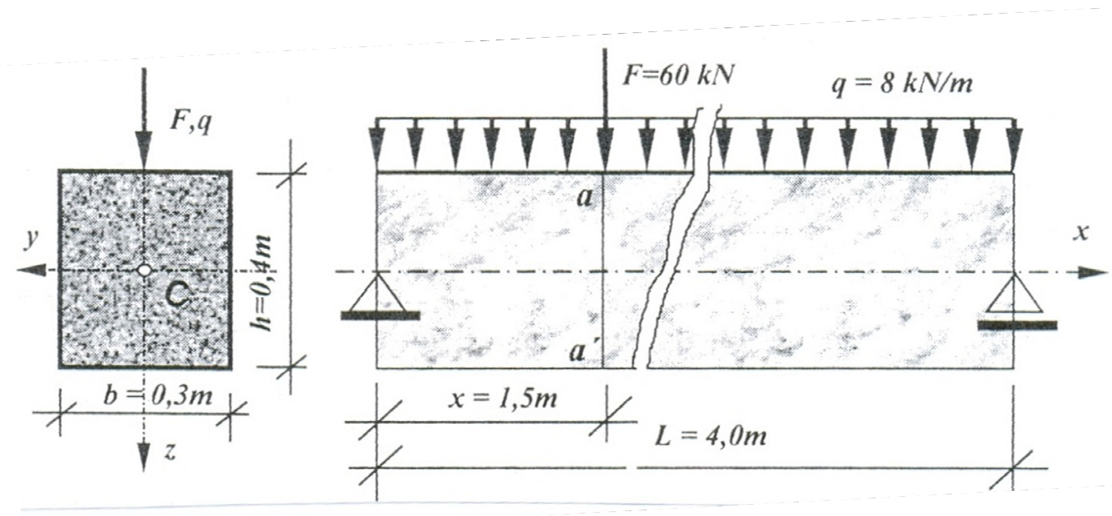
$z=-0{,}1 \Rightarrow \sigma_1^{(2)} = 33{,}725\,\text{kPa}; \sigma_2^{(2)} = -4486{,}855\,\text{kPa}; \alpha_1^{(2)} = 85{,}05^\circ; \alpha_2^{(2)} = -4{,}95^\circ$

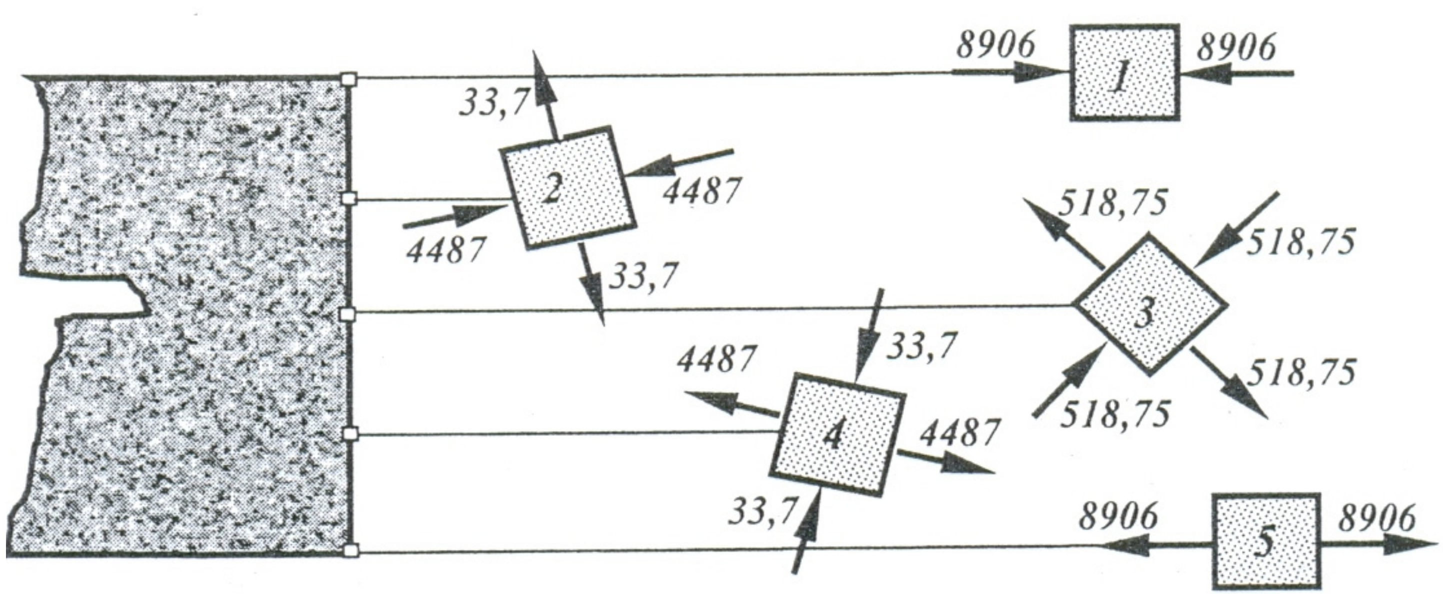
$z=0 \Rightarrow \sigma_1^{(3)} = 518{,}75\,\text{kPa}; \sigma_2^{(3)} = -518{,}75\,\text{kPa}; \alpha_1^{(3)} = 45^\circ; \ \alpha_2^{(3)} = -45^\circ$

$z=0{,}1 \Rightarrow \sigma_1^{(4)} = 4486{,}855\,\text{kPa}; \sigma_2^{(4)} = -33{,}725\,\text{kPa}; \alpha_1^{(4)} = 4{,}95^\circ; \alpha_2^{(4)} = -85{,}05^\circ$

$z=0{,}2 \Rightarrow \sigma_1^{(5)} = 8906{,}25\,\text{kPa}; \sigma_2^{(5)} = 0; \alpha_1^{(5)} = 0^\circ; \ \alpha_2^{(5)} = 90^\circ$

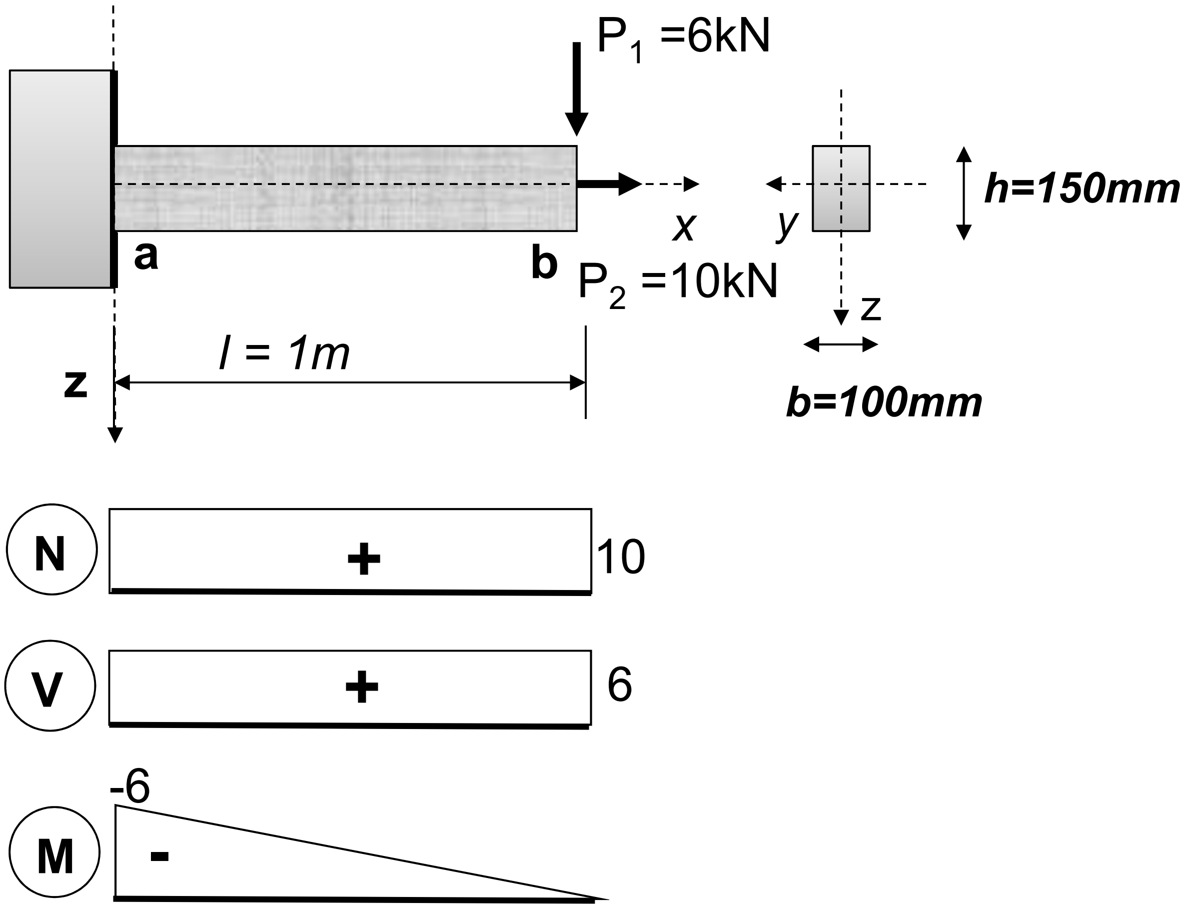
Příklad 2, řešení





Příklad 3, řešení

1. Určete největší normálové a smykové napětí u dřevěného nosníku obdélníkového průřezu v místě vetknutí.
2. Určete velikost a směr hlavního napětí v horní čtvrtině průřezu v místě vetknutí (početně a graficky).

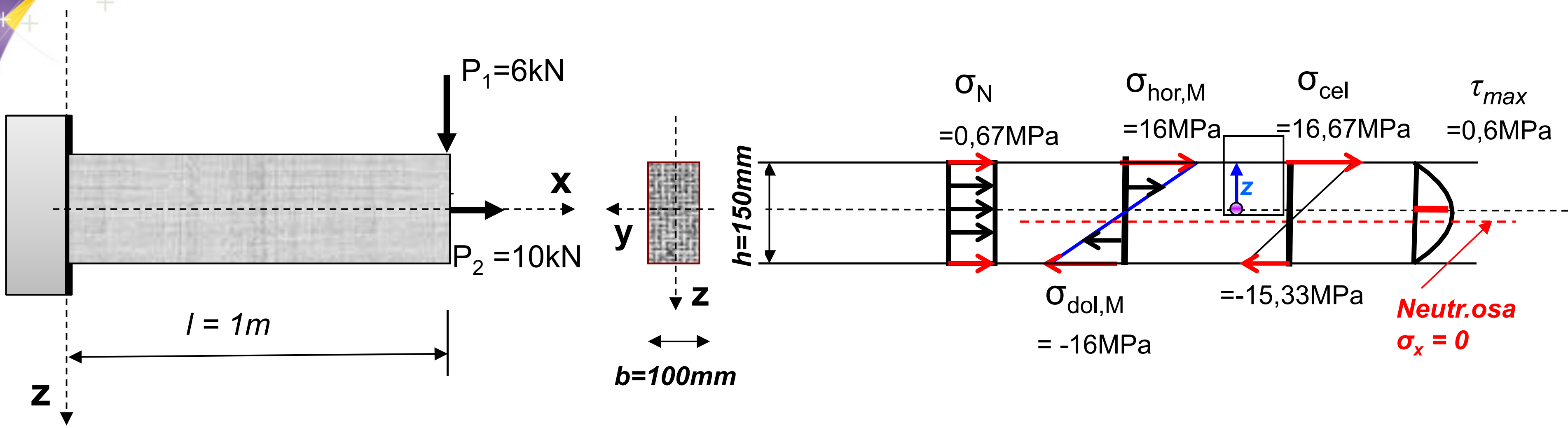


$$\sigma_{x,M} = \frac{M}{I_y} z = \frac{M}{W_y}$$

$$\sigma_{x,N} = \frac{N}{A}$$

$$\tau_{xz} = \frac{V \cdot \overline{S}_y}{I_y \cdot b}$$

Příklad 3, maximální normálové a smykové napětí



$$\sigma_N = konst = \frac{N}{A} = 0{,}67\,MPa$$

$$\sigma_{M,\max,horní} = \frac{M}{I_y} e = \frac{M}{W_y} = \frac{M}{bh^2/6} = 16\,MPa = -\sigma_{\max,dolní}$$

$$\overline{S}_{y,\max} = A_{části} \cdot z_T = \frac{bh}{2}\frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

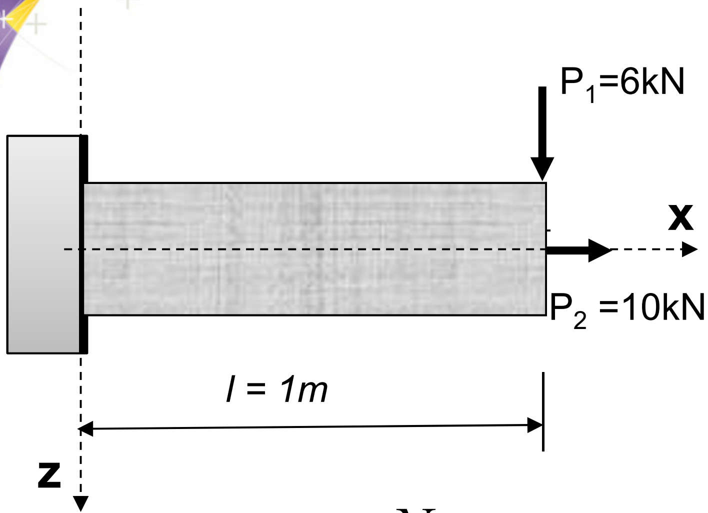
$$\tau_{zx,\max} = \tau_{xz,\max} = \frac{V \cdot bh^2/8}{bh^3/12 \cdot b} = \frac{3V}{2A} = 0{,}6\,MPa$$

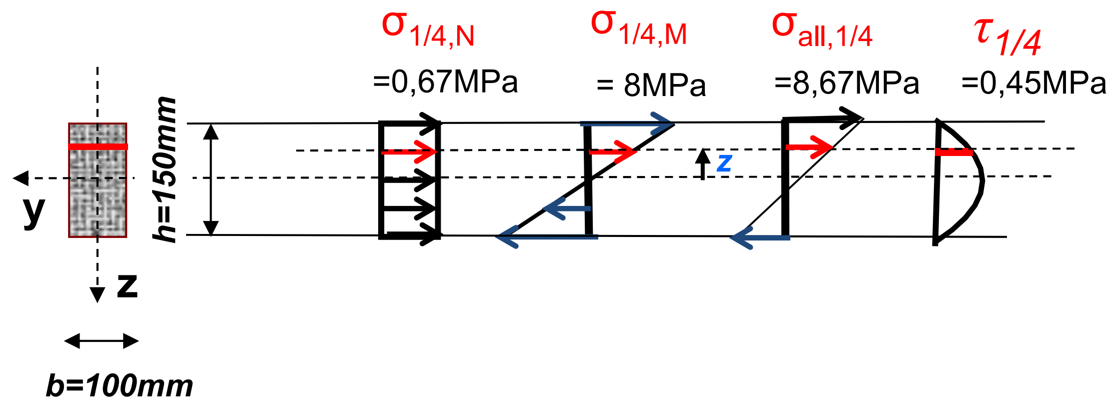
$$\sigma_{x,M} = \frac{M}{I_y} z = \frac{M}{W_y}$$

$$\sigma_{x,N} = \frac{N}{A}$$

$$\tau_{xz} = \frac{V \cdot \overline{S}_y}{I_y \cdot b}$$

Příklad 3, normálové a smykové napětí – 1/4h





$$\sigma_N = konst = \frac{N}{A} = 0{,}67\,MPa$$

$$\sigma_{M,1/4} = \frac{M}{I_y} z = \frac{M}{I_y} \frac{h}{4} = \frac{M}{bh^3/12} \frac{h}{4} = 8\,MPa$$

(nebo z podobnosti trojúhelníků)

$$\overline{S}_{y(1/4)} = A_{\check{c}\acute{a}sti} \cdot z_T \quad = b.h/4.3h/8$$

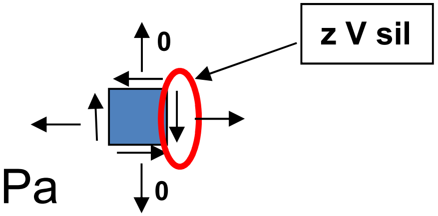
$$\tau_{zx(1/4)} = \tau_{xz(1/4)} = \frac{V \quad 3bh^2/32}{1/12 \quad bh^3 \cdot b} = \frac{9V}{8A} = 0{,}45\,MPa$$

$$\sigma_{x,M} = \frac{M}{I_y} z$$

$$\sigma_{x,N} = \frac{N}{A}$$

$$\tau_{xz} = \frac{V \cdot \overline{S}_y}{I_y \cdot b}$$

σ_x=8,67 MPa, σ_z=0 MPa, τ_{xz}=0,45 MPa



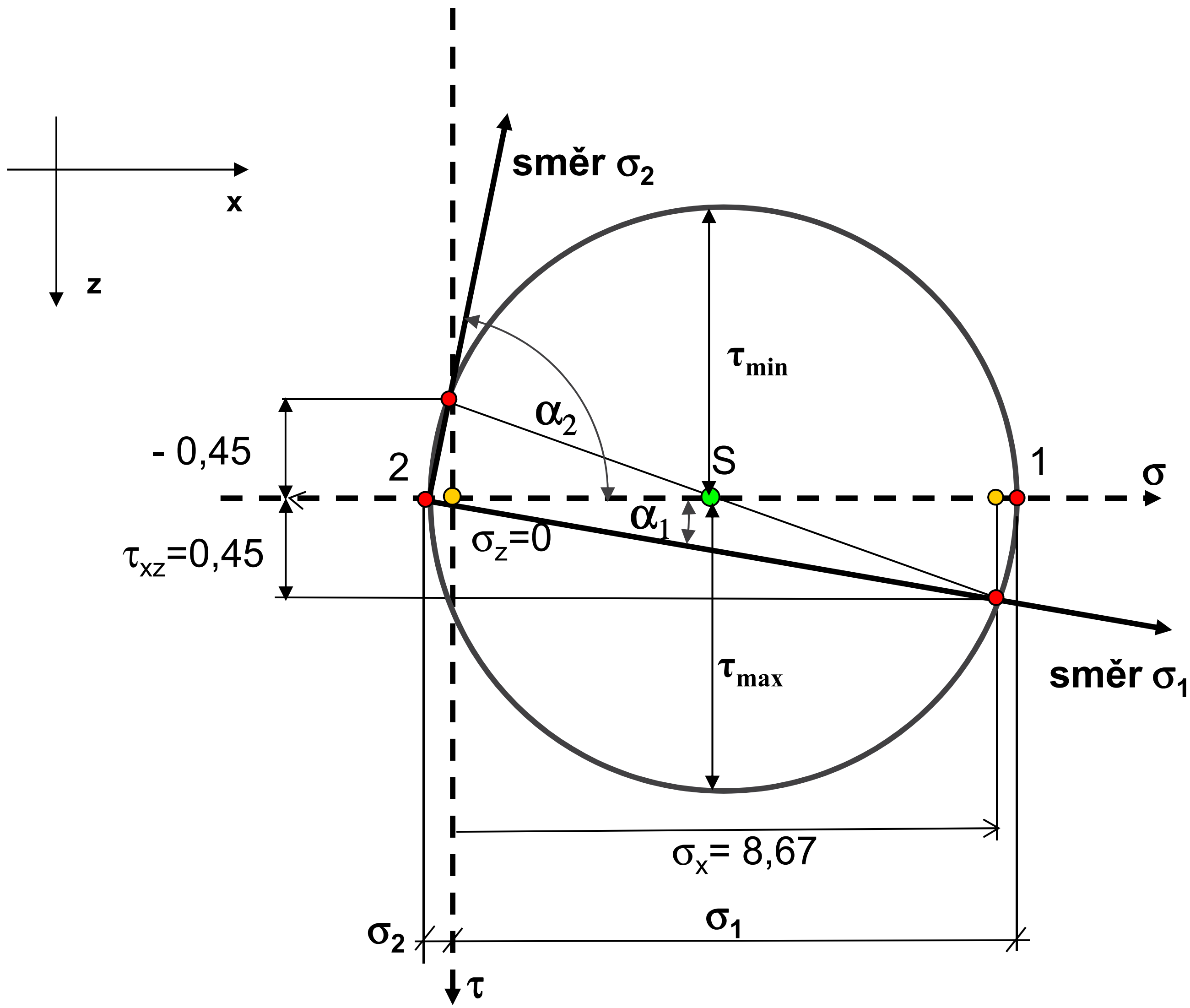
$$\sigma_1 = 8{,}69\,MPa$$

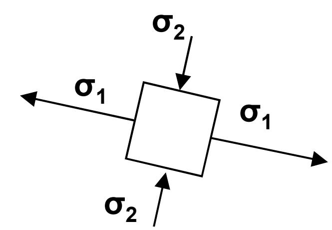
$$\sigma_2 = -0{,}02\,MPa$$

$$\tau_{\max,\min} = \pm 4{,}35\,MPa$$

$$a_1 = 2{,}96\deg$$

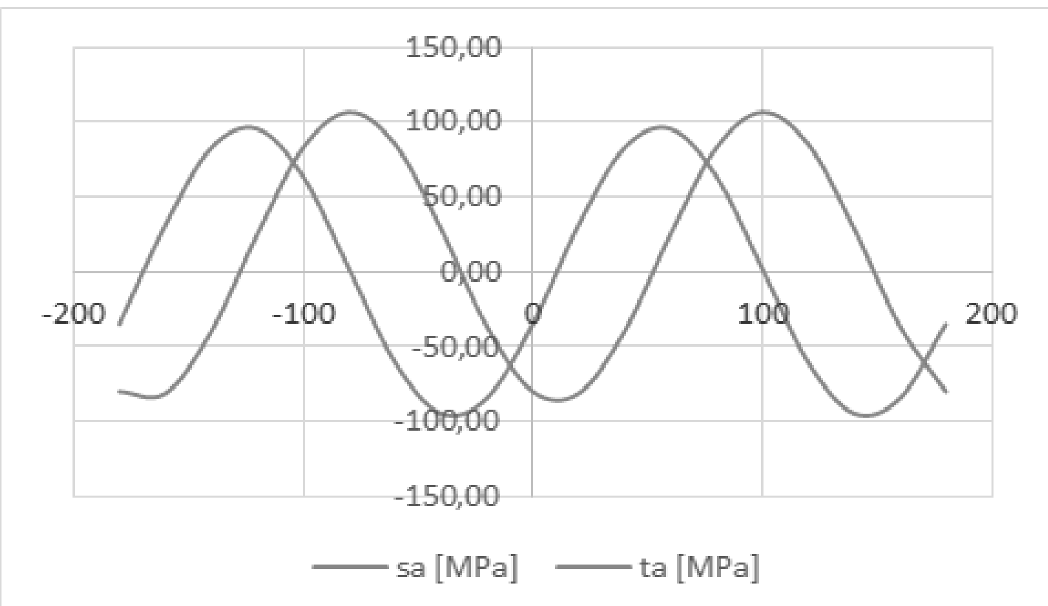
$$a_2 = -87{,}04\deg$$





Výpočet napětí - Excel

Normálové napětí σ_x [MPa]:	-80,00	
Normálové napětí σ_y [MPa]:	100,00	
Smykové napětí τ_{xy} [MPa]:	-35,00	
Hlavní napětí σ_1 [MPa]:	106,5660	
Hlavní napětí σ_2 [MPa]:	-86,5660	
Extrémní smykové napětí τ_{max} [MPa]:	96,5660	
Směr hlavních napětí α_1 [deg]:	-79,3747	-79,3747
Směr hlavních napětí α_2 [deg]:	10,6253	10,62525



Úhel α :	σ_α [MPa]	τ_α [MPa]
-180	-80,00	-35,00
-160	-81,44	31,04
-140	-40,10	82,56
-120	24,69	95,44
-100	82,60	63,67
-80	106,54	2,11
-60	85,31	-60,44
-40	28,84	-94,71
-20	-36,45	-84,66
0	-80,00	-35,00
20	-81,44	31,04
40	-40,10	82,56
60	24,69	95,44
80	82,60	63,67
100	106,54	2,11
120	85,31	-60,44
140	28,84	-94,71
160	-36,45	-84,66
180	-80,00	-35,00