

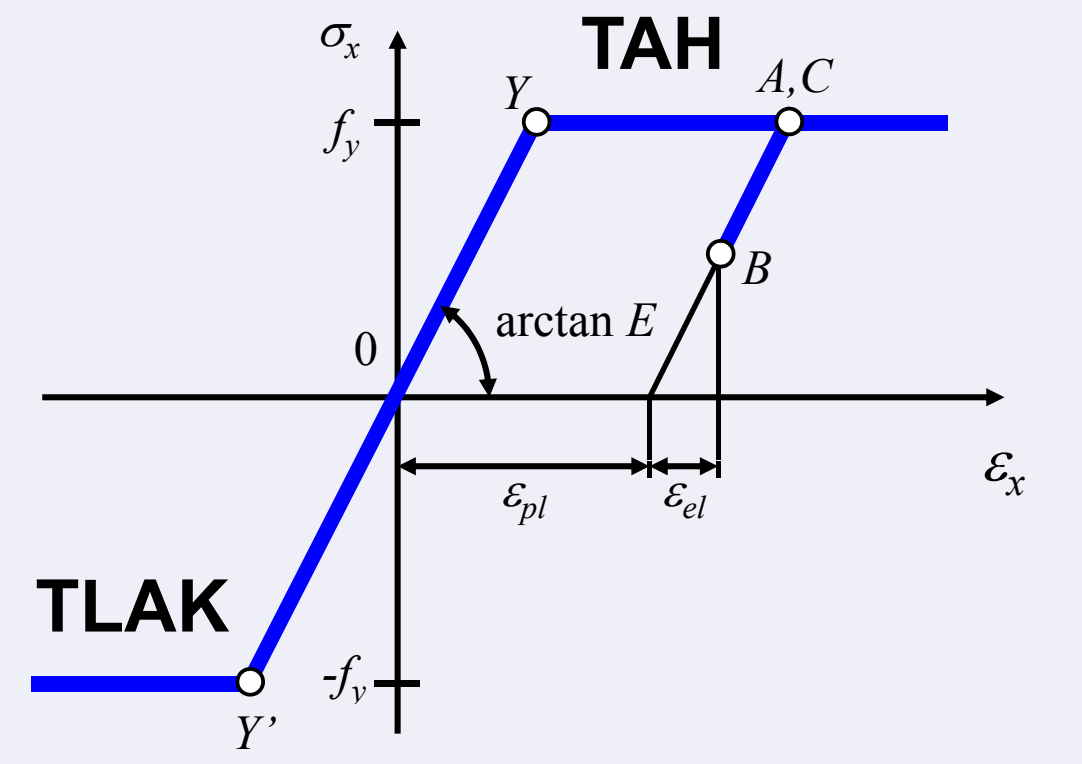
PRUŽNOST A PLASTICITA

Výpočty jednoduchých konstrukcí v plastickém oboru s uvažováním ideálně pružnoplastického chování materiálu

Ideálně pružno-plastický materiál

Pracovní diagram ideálně pružno-plastického materiálu v tahu i tlaku

úsek	popis
Y-Y'	Hookův zákon
Y-A	Plastický stav – volný nárůst deformací
A-B	Odlhčení
B-C	Opětovné zvýšení napětí



ϵ_{pl} ... plastická (trvalá) deformace
 ϵ_{el} ... pružná deformace

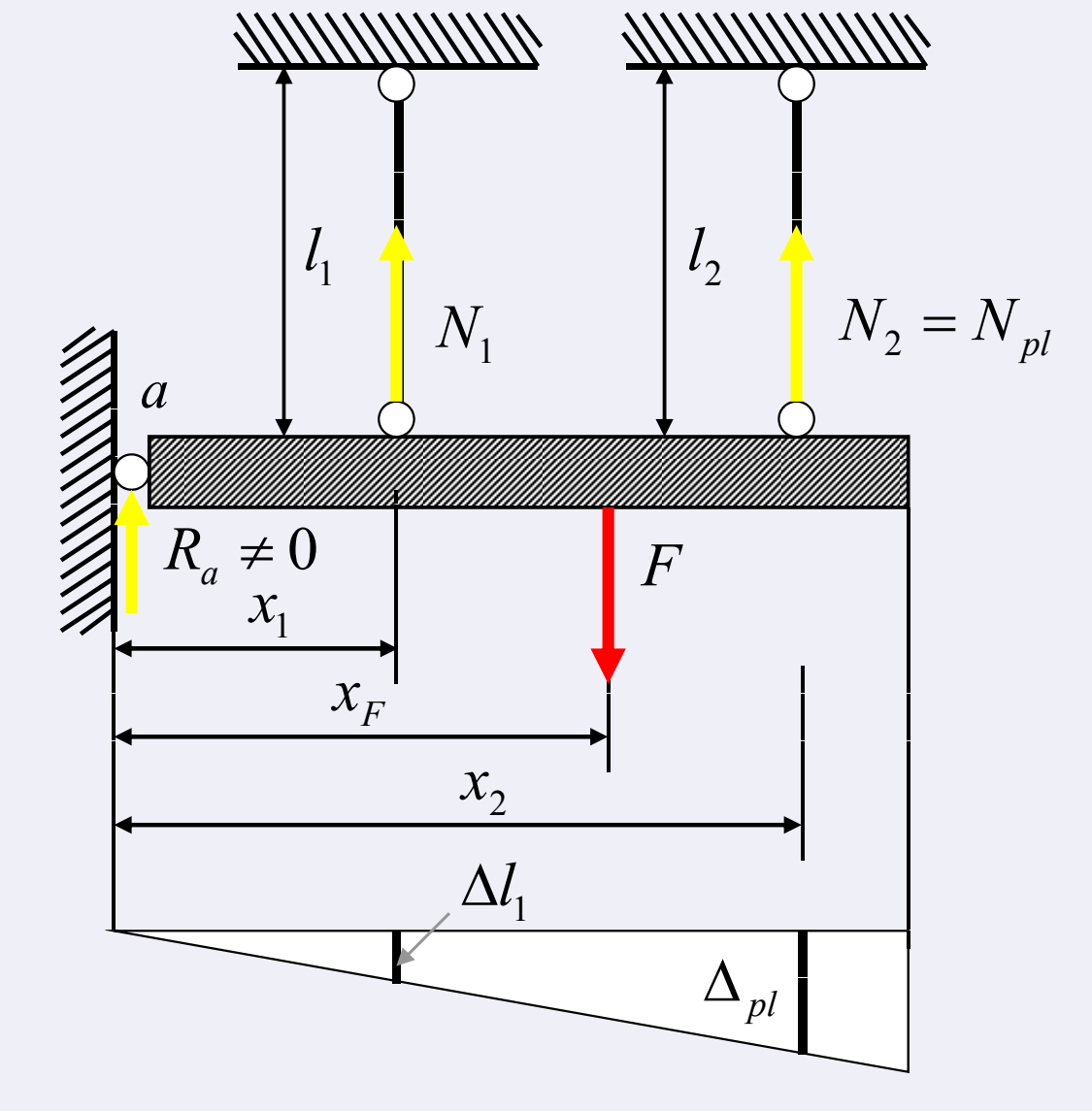
Statically indeterminate beam structures

Příklad 2: Stanovení maximální zatížitelnosti staticky neurčité soustavy dvou táhel a zavěšené tuhé desky s uvažováním ideálně pružnoplastického chování materiálu. Průřez táhel: $d_1 = d_2 = 20$ mm

Zadání: $l_1 = l_2 = 2$ m $x_1 = 3$ m $x_2 = 5$ m $x_F = 4$ m
Materiál: ocel Fe360/S235 $\gamma_M = 1,15$ $E = 210$ GPa
 $A_1 = A_2 = 3,14 \cdot 10^4$ m²

Řešení: Mezní plastická únosnost v tahu $N_{pl} = f_{yd} \cdot A = 64,198$ kN $\rightarrow \Delta l = \frac{N_{pl} \cdot l}{E \cdot A} = 1,946$ mm

stav I. zplastizování prutu 2



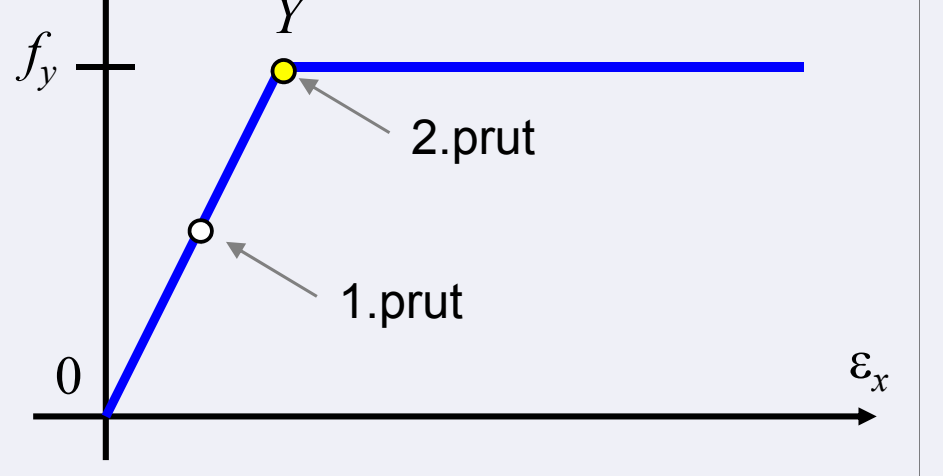
$$N_2 = N_{pl} \quad \Delta l_2 = \Delta l_{pl}$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_{pl} \cdot \frac{x_1}{x_2} = 1,168$$
 mm

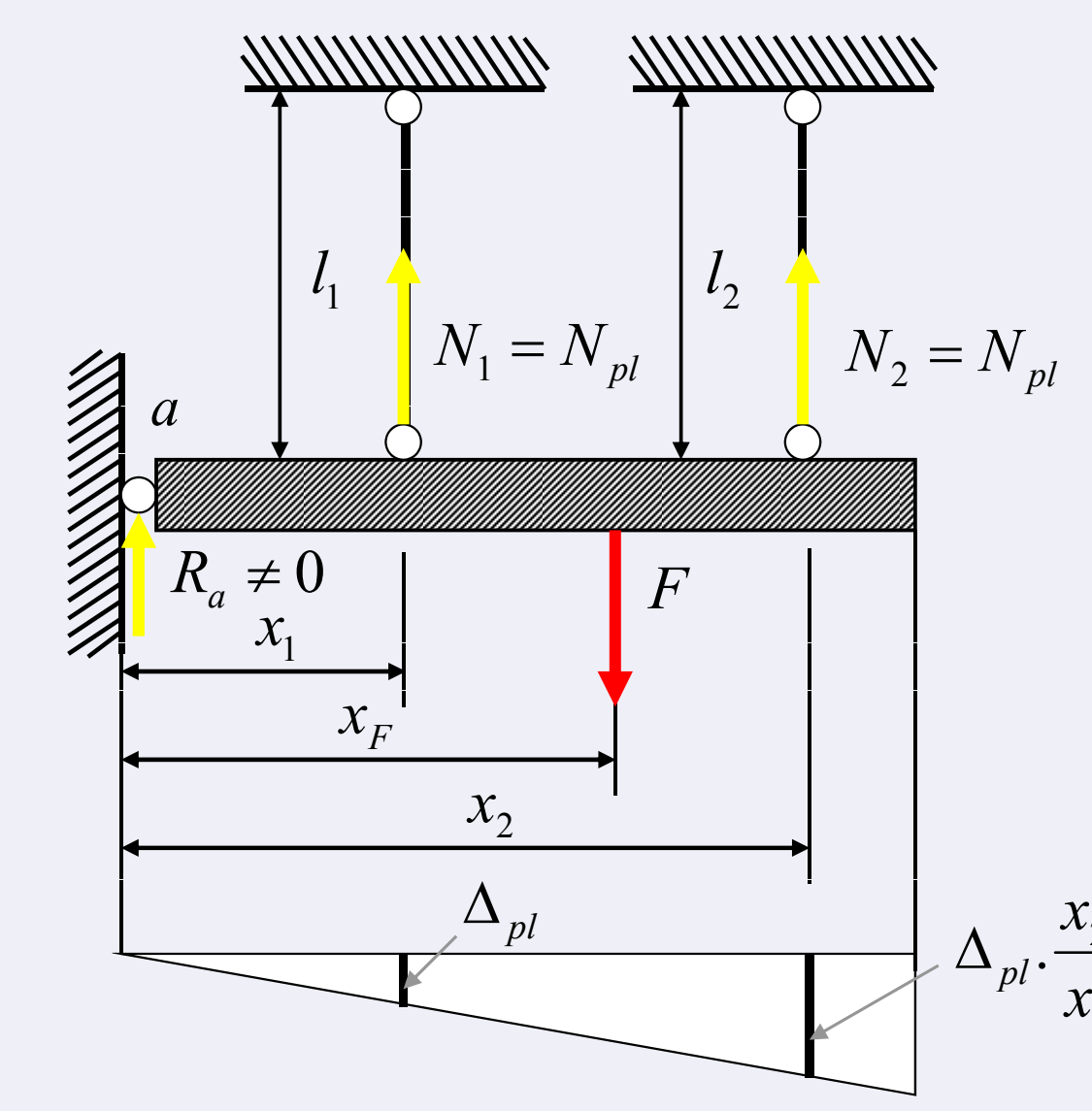
$$N_1 = \Delta l_1 \cdot \frac{E \cdot A}{l} = 38,519$$
 kN

$$F = \frac{N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2}{x_F} = 109,136$$
 kN

Pracovní diagram



stav II. zplastizování prutů 1 i 2



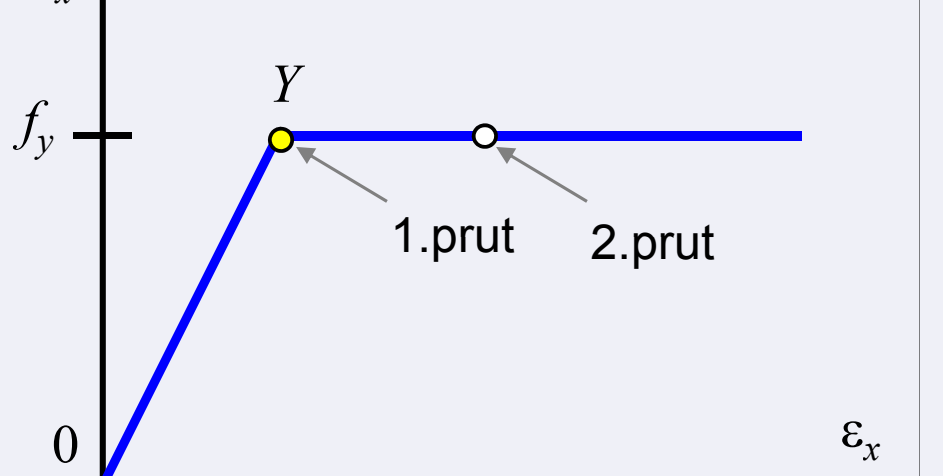
$$N_1 = N_{pl} \quad N_2 = N_{pl}$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_{pl} = 1,946$$
 mm

$$\Delta l_2 = \Delta l_{pl} \cdot \frac{x_2}{x_1} = 3,244$$
 mm

$$F = \frac{N_{pl} \cdot x_1 + N_{pl} \cdot x_2}{x_F} = 128,396$$
 kN

Pracovní diagram



Výsledky numericky:

stav	F [kN]	N ₁ [kN]	Δl ₁ [mm]	N ₂ [kN]	Δl ₂ [mm]
I.	109,136	38,519	1,168	64,198	1,946
II.	128,396	64,198	1,946	64,198	3,244

Příklad 1: Stanovení trvalé deformace osově namáhaného prutu s uvažováním ideálně pružnoplastického chování materiálu.

Zadání: Určete trvalou deformaci ocelového táhla délky $l = 2$ m, které bylo protaženo o $\Delta l = 24$ mm. Napětí na mezi kluzu oceli $f_y = 235$ MPa, modul pružnosti v tahu a tlaku $E = 210$ 000 MPa.

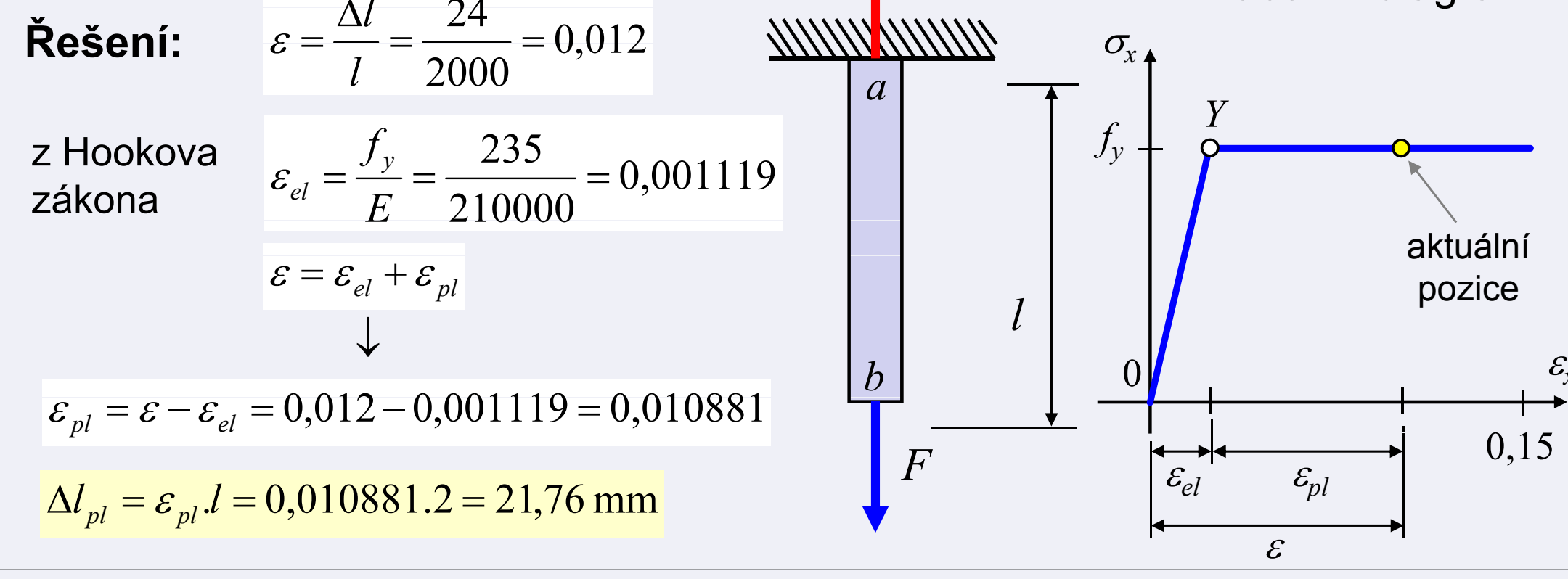
Řešení: $\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{24}{2000} = 0,012$

z Hookova zákona $\epsilon_{el} = \frac{f_y}{E} = \frac{235}{210000} = 0,001119$

$\epsilon = \epsilon_{el} + \epsilon_{pl}$

$\epsilon_{pl} = \epsilon - \epsilon_{el} = 0,012 - 0,001119 = 0,010881$

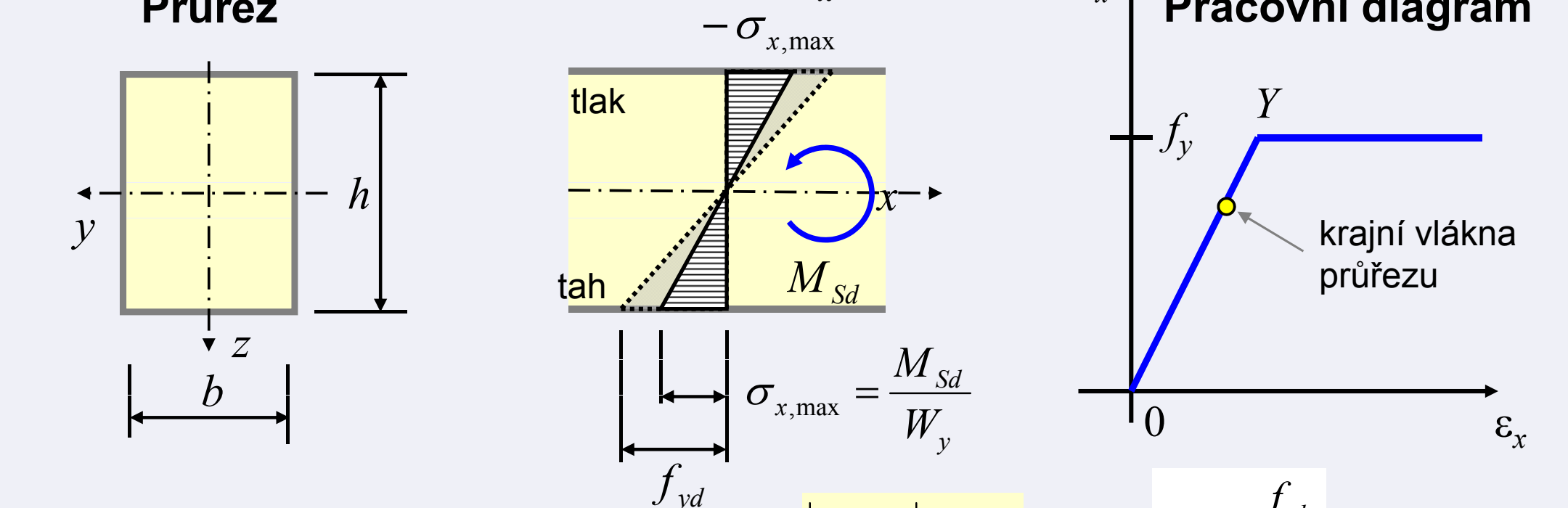
$\Delta l_{pl} = \epsilon_{pl} \cdot l = 0,010881 \cdot 2 = 21,76$ mm



Nosné konstrukce namáhané ohybem

Analýza normálového napětí ohybaného nosníku s obdélníkovým průřezem
Předpoklad: Ideálně pružnoplastické chování materiálu

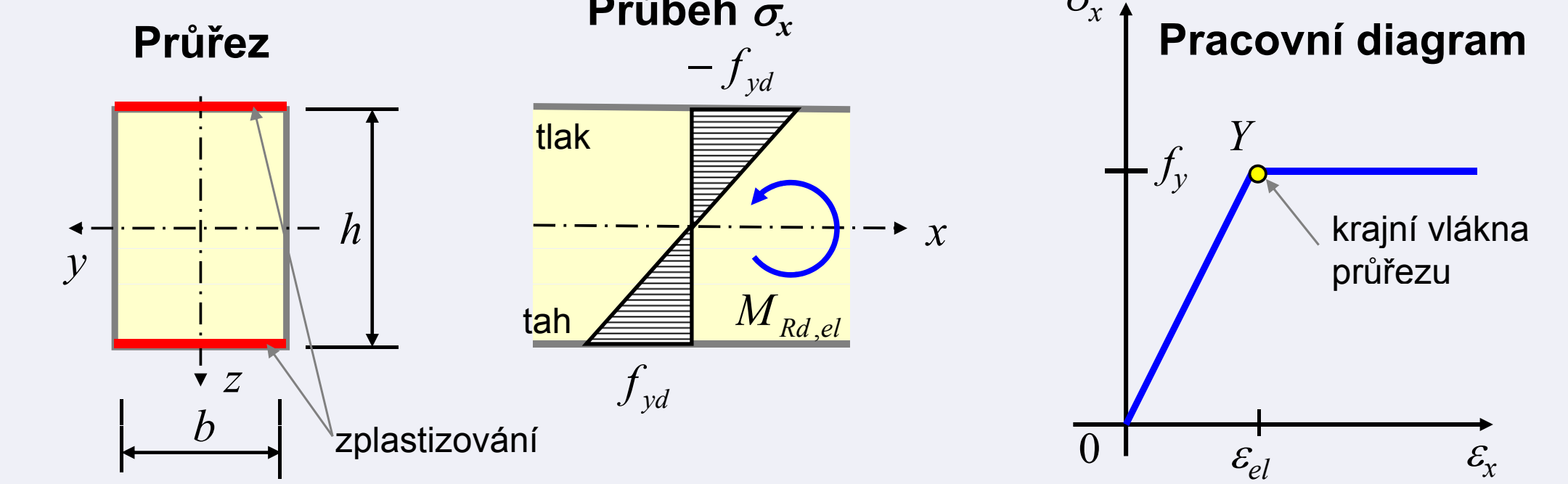
stav I. Normálové napětí nedosahuje hodnoty meze kluzu f_{yd}



Normálové napětí v krajních vláknech $|\sigma_{x,max}| < f_{yk}$ kde $f_{yk} = \frac{f_y}{\gamma_M}$

Posudek spolehlivosti $M_{Ed} < M_{Rd,el} = W_y \cdot f_{yk} = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 \cdot f_{yk}$ nebo $\frac{M_{Ed}}{M_{Rd,el}} < 1$

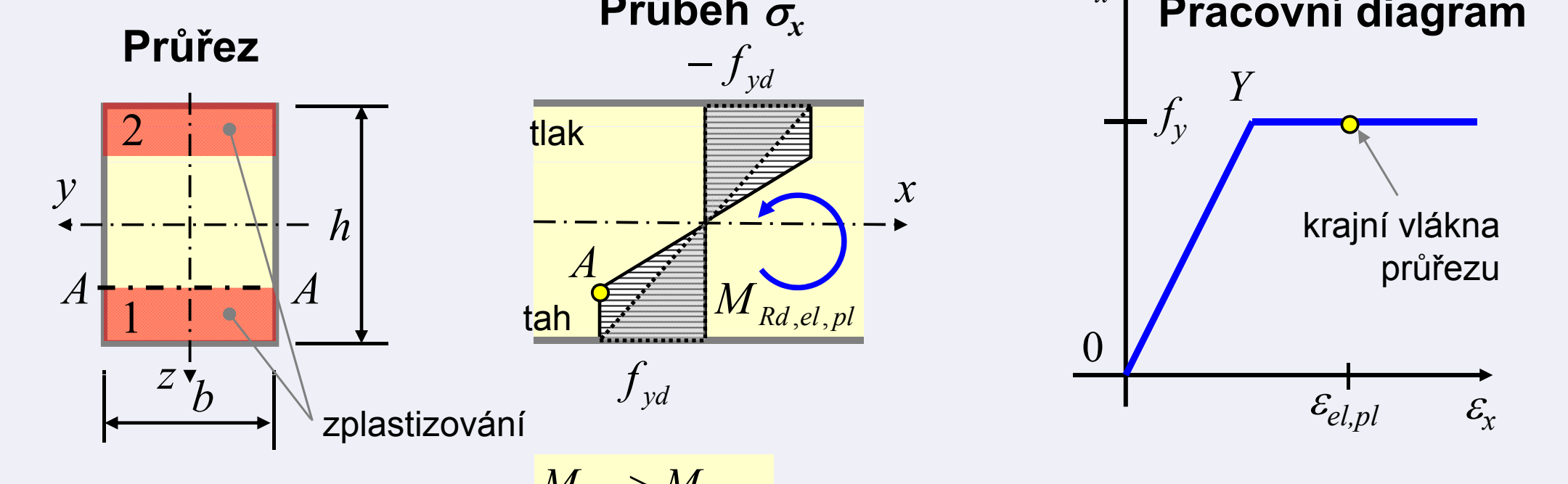
stav II. Normálové napětí v krajních vláknech dosahuje hodnoty meze kluzu f_{yd} , průřez má stále pružné chování.



Normálové napětí v krajních vláknech $|\sigma_{x,max}| = f_{yk}$ kde $f_{yk} = \frac{f_y}{\gamma_M}$

Posudek spolehlivosti $M_{Ed} = M_{Rd,el} = W_y \cdot f_{yk} = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 \cdot f_{yk}$ nebo $\frac{M_{Ed}}{M_{Rd,el}} = 1$

stav III. V průřezu vznikají plastické oblasti.



Zvyšuje-li se stále zatížení $M_{Ed} > M_{Rd,el}$, vznikají plastické oblasti: 1 – v tahu, 2 – v tlaku. Zbytek průřezu stále pružné chování.

Bernoulliho hypotéza platí i nadále, ϵ_x je stále lineární. Ve vláknu A-A je $\epsilon_x = \frac{f_{yd}}{E}$

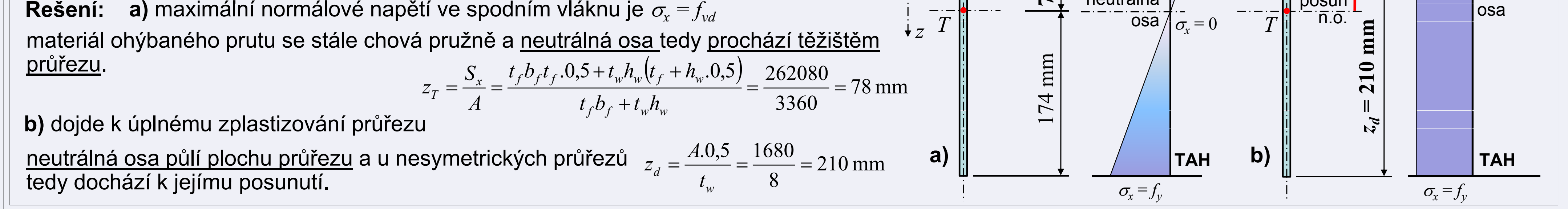
Příklad 3: Stanovení posunutí neutrálné osy při plastizování nesymetrického průřezu s uvažováním ideálně pružnoplastického chování materiálu.

Zadání: Určete polohu neutrálné osy nesymetrického průřezu tvaru T ohybaného prutu za předpokladu:
a) normálové napětí v krajních vláknech je $\sigma_x = f_{yd}$
b) dojde k úplnému zplastizování průřezu

Vstupní údaje: rozměry pásnice (flange) a stojiny (web) $t_f = 12$ mm $b_f = 120$ mm $t_w = 8$ mm $h_w = 280$ mm

Řešení: a) maximální normálové napětí ve spodním vláknu je $\sigma_x = f_{yd}$ materiál ohybaného prutu se stále chová pružně a neutrální osa tedy prochází těžištěm průřezu.

b) dojde k úplnému zplastizování průřezu neutrální osa pólí plochu průřezu a u nesymetrických průřezů tedy dochází k jejímu posunutí.

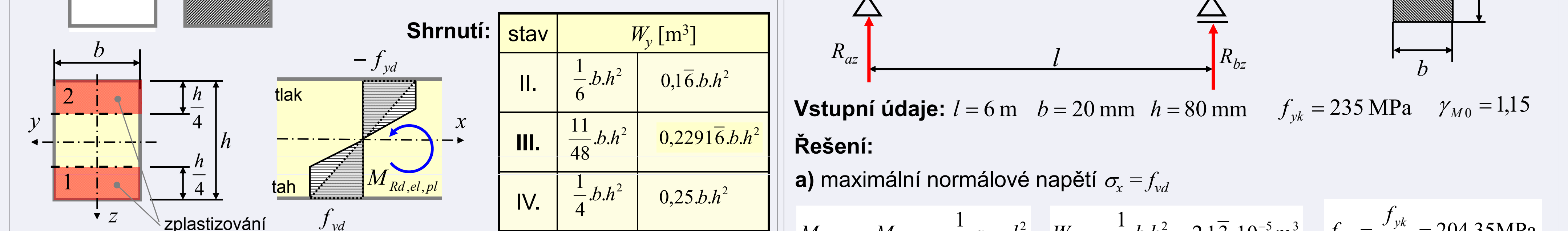


Příklad 4: Stanovení průřezového modulu obdélníkového průřezu s uvažováním ideálně pružnoplastického chování materiálu.

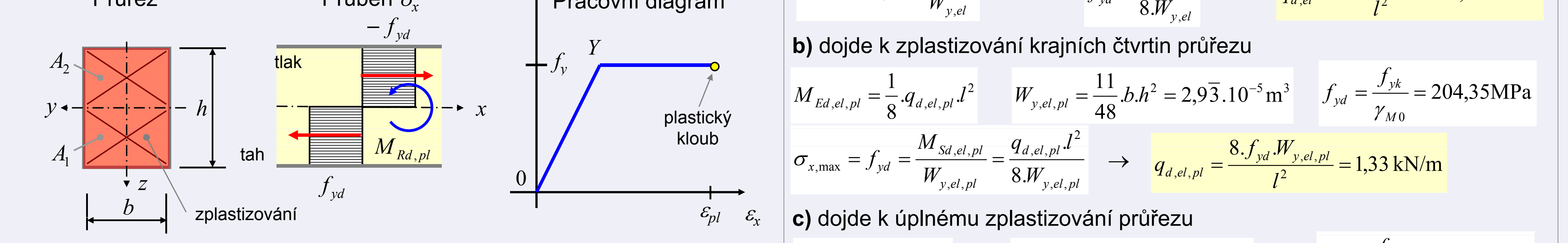
Zadání: Určete $W_{y,el,pl}$ pro průřez se zplastizovanými krajními čtvrtinami

Řešení: $W_{y,el,pl} = W_{y,el} + W_{y,pl} = \frac{1}{6} \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left[b \cdot \frac{h}{4} \cdot \left(\frac{h}{4} + \frac{h}{8}\right) \right] = \frac{1}{24} \cdot b \cdot h^2 + \frac{3}{16} \cdot b \cdot h^2$

Výsledek: (platí pouze pro případ zplastizování krajních čtvrtin!!!) $W_{y,el,pl} = \frac{11}{48} \cdot b \cdot h^2$



stav IV.



$$N = \int_A \sigma_x dA = 0 \rightarrow \int_{A_1} f_{yd} dA + \int_{A_2} -f_{yd} dA = f_{yd} \cdot (A_1 - A_2) = 0$$

A_1, A_2 ... plochy průřezu v plastickém stavu. Neutrální osa pólí plochu průřezu. (u nesymetrických průřezů se při plastizování posouvá) $A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$

Únosnost za ohybu s uvažováním plastického chování materiálu: $M_{Rd,pl} = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA = \int_{A_1} f_{yd} \cdot z \cdot dA + \int_{A_2} -f_{yd} \cdot z \cdot dA = f_{yd} \cdot (S_{1y} - S_{2y})$

$$S_{1y} = -S_{2y} \rightarrow S_{1y} + S_{2y} = 0 \rightarrow M_{Rd,pl} = f_{yd} \cdot 2 \cdot S_{1y} = f_{yd} \cdot W_{y,pl}$$

$W_{y,pl} = 2 \cdot S_{1y}$... plastický průřezový modul [m³]

Konkrétně: $S_{1y} = A_1 \cdot \frac{h}{4} = \frac{h}{2} \cdot b \cdot \frac{h}{4} = \frac{1}{8} \cdot b \cdot h^2$

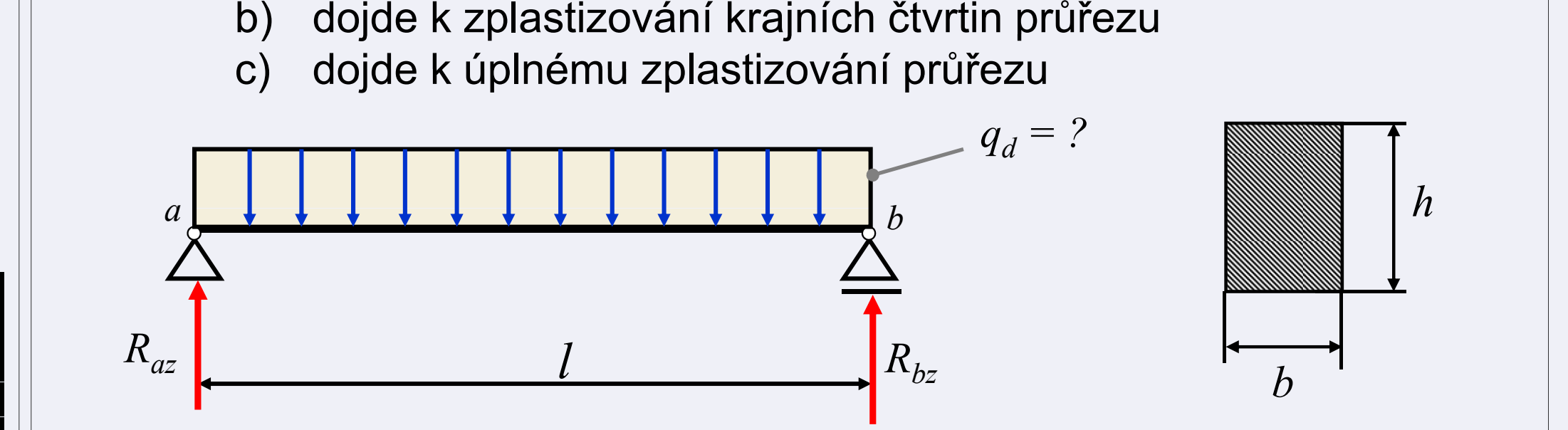
$$\frac{W_{y,pl}}{W_{y,el}} = \frac{4}{6} \cdot \frac{b \cdot h^2}{b \cdot h^2} = \frac{6}{4} = 1,5 \rightarrow 50\%$$

$W_{y,pl} = 2 \cdot S_{1y} = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot b \cdot h^2 = \frac{1}{4} \cdot b \cdot h^2$

Průřez je zplastizován, vznik tzv. **plastického kloubu**, únosnost v ohybu je vyčerpaná.

Příklad 5: Stanovení zatížitelnosti ohybaného nosníku obdélníkového průřezu s uvažováním ideálně pružnoplastického chování materiálu.

Zadání: Určete maximální zatížitelnost nosníku q_d [kN/m] za předpokladu:
a) maximální normálové napětí $\sigma_x = f_{yk}$
b) dojde k zplastizování krajních čtvrtin průřezu
c) dojde k úplnému zplastizování průřezu



Vstupní údaje: $l = 6$ m $b = 20$ mm $h = 80$ mm $f_{yk} = 235$ MPa $\gamma_{M0} = 1,15$

Řešení: a) maximální normálové napětí $\sigma_x = f_{yk}$

$$M_{Ed,el} = M_{y,max} = \frac{1}{8} \cdot q_d \cdot el \cdot l^2 \quad W_{y,el} = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 = 2,13 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \quad f_{yk} = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = 204,35 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,max} = f_{yk} = \frac{M_{Ed,el}}{W_{y,el}} \rightarrow f_{yk} = \frac{q_d \cdot el \cdot l^2}{8 \cdot W_{y,el}} \rightarrow q_{d,el} = \frac{8 \cdot f_{yk} \cdot W_{y,el}}{l^2} = 0,97 \text{ kN/m}$$

b) dojde k zplastizování krajních čtvrtin průřezu

$$M_{Ed,el,pl} = \frac{1}{8} \cdot q_d \cdot el \cdot l^2 \quad W_{y,el,pl} = \frac{11}{48} \cdot b \cdot h^2 = 2,93 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \quad f_{yk} = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = 204,35 \text{ MPa}$$

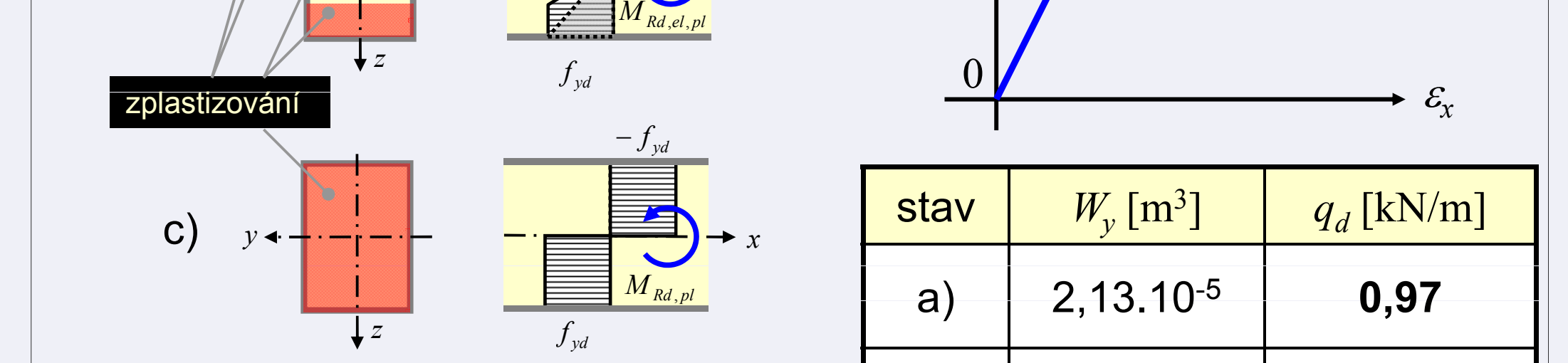
$$\sigma_{x,max} = f_{yk} = \frac{M_{Ed,el,pl}}{W_{y,el,pl}} \rightarrow q_{d,el,pl} = \frac{8 \cdot f_{yk} \cdot W_{y,el,pl}}{l^2} = 1,33 \text{ kN/m}$$

c) dojde k úplnému zplastizování průřezu

$$M_{Ed,pl} = \frac{1}{8} \cdot q_d \cdot pl \cdot l^2 \quad W_{y,pl} = \frac{1}{4} \cdot b \cdot h^2 = 3,20 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \quad f_{yk} = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = 204,35 \text{ MPa}$$

$$f_{yk} = \frac{M_{Ed,pl}}{W_{y,pl}} = \frac{q_d \cdot pl \cdot l^2}{8 \cdot W_{y,pl}} \rightarrow q_{d,pl} = \frac{8 \cdot f_{yk} \cdot W_{y,pl}}{l^2} = 1,45 \text{ kN/m}$$

Shrnutí:



stav	W _y [m ³]	q _d [kN/m]
a)	2,13 · 10 ⁻⁵	0,97
b)	2,93 · 10 ⁻⁵	1,33
c)	3,20 · 10 ⁻⁵	1,45

Plastická rezerva obdélníkového průřezu: $\frac{q_{d,pl}}{q_{d,el}} = \frac{1,45}{0,97} = 1,5 \rightarrow 50\%$