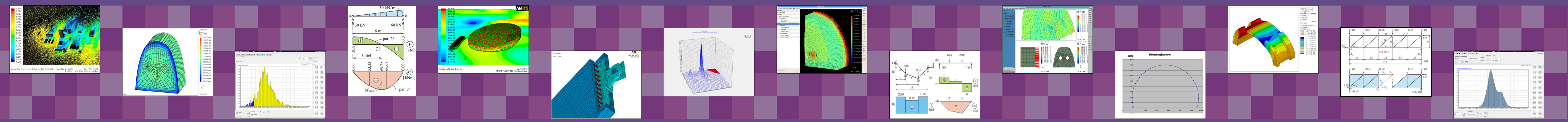
VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta stavební
Katedra stavební mechaniky - 228



PRUŽNOST A PLASTICITA

Úvod do řešení staticky neurčitých úloh

Staticky neurčité osově namáhané konstrukce

Předpoklad řešení: pružné chování materiálu

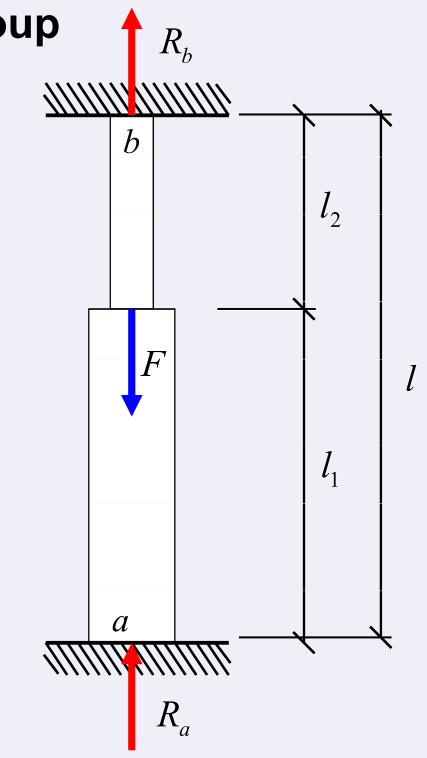
U staticky neurčitých úloh platí:

počet neznámých úlohy > počet podmínek rovnováhy

Řešení:

počet neznámých úlohy = podmínky rovnováhy + podmínky deformační

Úloha 1: Oboustranně vetknutý sloup



Neznámé veličiny v úloze: $R_a(=-N_1), R_b(=N_2)$

Řešení:

Podmínka rovnováhy:

$R_z=0:\qquad R_a+R_b-F=0$

Podmínka deformační:

$\Delta l=0:$

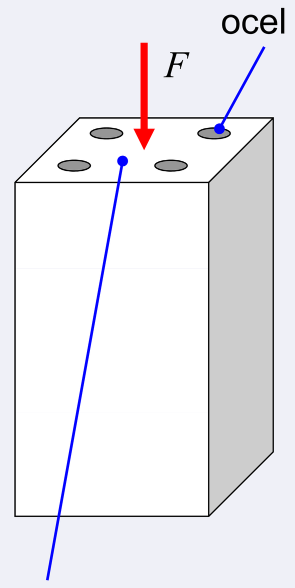
$$\Delta l_1+\Delta l_2=\frac{N_1 l_1}{E_1.A_1}+\frac{N_2 l_2}{E_2.A_2}=0$$

V daném případě vzejdou obě neznámé veličiny z řešení 2 rovnic o 2 neznámých

Úloha 2: Železobetonový sloup

(kombinace 2 a více materiálů v nosném průřezu)

Předpoklad řešení: rovnoměrného roznesení zatížení do průřezu



Neznámé veličiny v úloze:

N_s, N_c

Řešení:

Podmínka rovnováhy:

$F=N_s+N_c$

Podmínka deformační:

$$\Delta l_s=\Delta l_c\qquad \frac{N_s.l}{E_s.A_s}=\frac{N_c.l}{E_c.A_c}$$

V daném případě vzejdou obě neznámé veličiny z řešení 2 rovnic o 2 neznámých

Úloha 3: Zavěšená tuhá deska

(počet táhel >2, stupeň statické neurčitosti = počet táhel - 1)

Předpoklad řešení: dokonale tuhé chování zavěšené desky

Neznámé veličiny v úloze: N_1, N_2

Řešení:

Podmínka rovnováhy: $\sum M_a=0:$

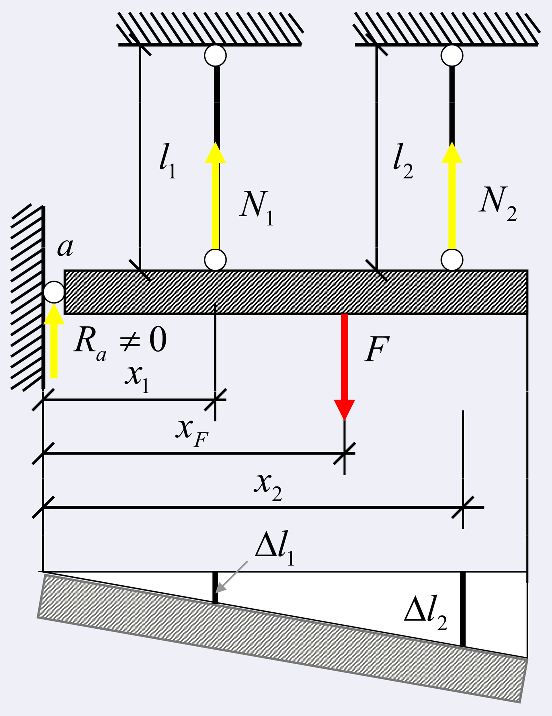
$N_1.x_1+N_2.x_2-F.x_F=0$

Podmínka deformační: $\dfrac{\Delta l_1}{x_1}=\dfrac{\Delta l_2}{x_2}$

$$\Delta l_1=\Delta l_2.\frac{x_1}{x_2}$$

$$\frac{N_1.l_1}{E_1.A_1}=\frac{N_2.l_2}{E_2.A_2}.\frac{x_1}{x_2}$$

V daném případě vzejdou obě neznámé veličiny z řešení 2 rovnic o 2 neznámých



Kontrola

$\sum M_c=0:\quad R_a=\dfrac{F.(x_2-x_F)-N_1.(x_2-x_1)}{x_2}$

$R_z=0:\quad R_a+N_1+N_2=F$

Staticky neurčité konstrukce namáhané ohybem

Metoda integrace diferenciální rovnice ohybové čáry 4.řádu

Řešení vychází ze **Schwedlerových vztahů**.

Neznámé statické a přetvárné veličiny lze určit postupným integrováním.

Úloha má 4 neznámé veličiny – **integrační konstanty**, které lze určit z **okrajových podmínek**.

Schwedlerovy vztahy	Integrace
$w_{(x)}=?$	$E.I_y.w^{IV}=q_{(x)}$
$\varphi_y=w'$	$E.I_y.w'''=\int q_{(x)}+C_1=-V_z$
$M_y=-E.I_y.w''$	$E.I_y.w''=\iint q_{(x)}+C_1.x+C_2=-M_y$
$V_z=-E.I_y.w'''$	$E.I_y.w'=\iiint q_{(x)}+C_1.\frac{x^2}{2}+C_2.x+C_3$
$q_z=E.I_y.w^{IV}$	$E.I_y.w=\iiiint q_{(x)}+C_1.\frac{x^3}{6}+C_2.\frac{x^2}{2}+C_3.x+C_4$

Řešení:

4 neznámé

C_1, C_2, C_3, C_4

$\downarrow$

4 okrajové podmínky

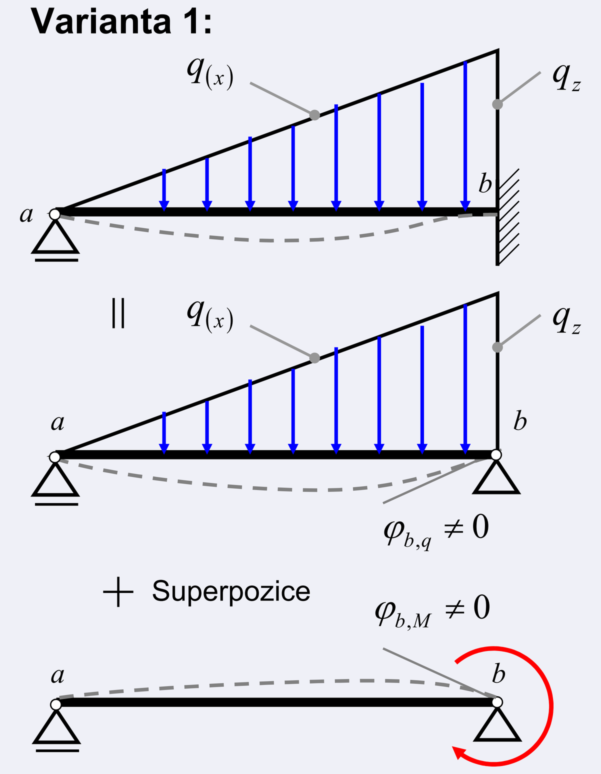
Statické a deformační okrajové podmínky

Typ okraje	Okrajové podmínky deformační	Okrajové podmínky statické
a volný okraj	$w\neq 0$ $\varphi\neq 0$	$M=0\rightarrow w''=0$ $V=0\rightarrow w'''=0$
a prostě podepřený okraj	$w=0$ $\varphi\neq 0$	$M=0\rightarrow w''=0$ $V\neq 0\rightarrow w'''\neq 0$
a vetknutí	$w=0$ $\varphi=0$	$M\neq 0\rightarrow w''\neq 0$ $V\neq 0\rightarrow w'''\neq 0$

Silová metoda

Princip silové metody:

Varianta 1:



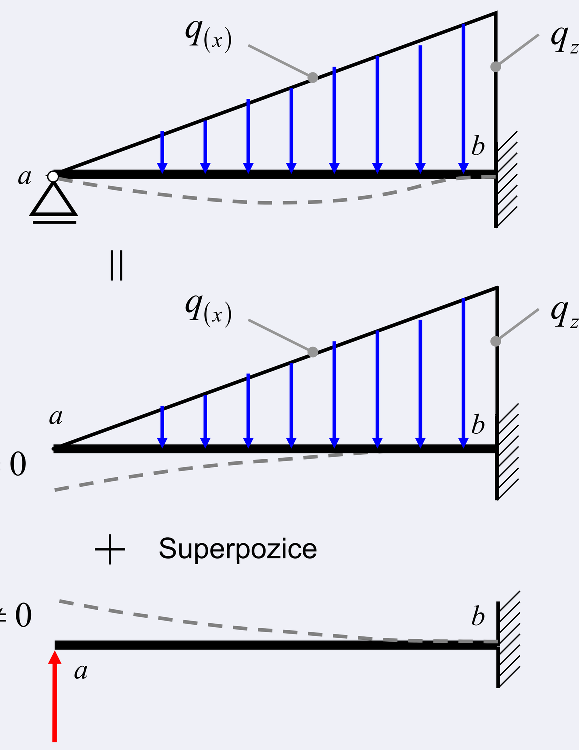
Deformační podmínka varianty řešení č.1

$\varphi_b=0\ \rightarrow\ \varphi_b=\varphi_{b,q}+\varphi_{b,M}=0$

Superpozice

- Uvolněním přebytečné vazby vznikne staticky určitá základní soustava, tímto je zvolena i staticky neurčitá veličina (např. momentová reakce ve vetknutí, silová reakce ve vnější vazbě)
- Superponované veličiny pak lze určit metodami pro staticky určité nosníky (přímá integrace, Clebschova nebo Mohrova metoda)

Varianta 2:



Deformační podmínka varianty řešení č.2

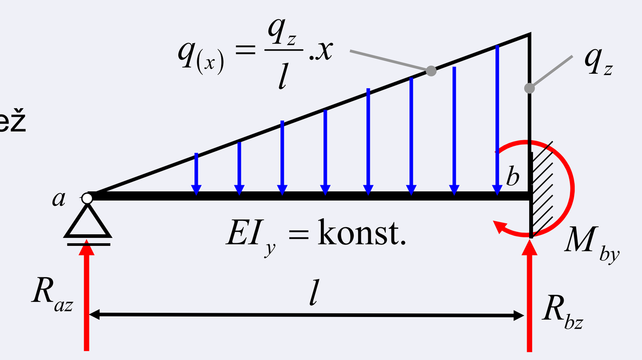
$w_a=0\ \rightarrow\ w_a=w_{a,q}+w_{a,R}=0$

Superpozice

Příklad 1:

Zadání: Určení statických a přetvárných veličin staticky neurčitého nosníku metodou integrace diferenciální rovnice ohybové čáry 4.řádu

Řešení: 4x integrace, ze které vzejdou 4 neznámé integrační konstanty, jež lze určit z okrajových podmínek



Zatížení	$E.I_y.w^{IV}=q_{(x)}=\frac{q_z}{l}.x$
Posouvající síla	$E.I_y.w'''=\int q_{(x)}+C_1=\int\frac{q_z}{l}.x.\mathrm{d}x+C_1=\frac{q_z}{l}.\frac{x^2}{2}+C_1=-V_z$
Ohybový moment	$E.I_y.w''=\iint q_{(x)}+C_1.x+C_2=\frac{q_z}{l}.\frac{x^3}{6}+C_1.x+C_2=-M_y$
Pootočení	$E.I_y.w'=\iiint q_{(x)}+C_1.\frac{x^2}{2}+C_2.x+C_3=\frac{q_z}{l}.\frac{x^4}{24}+C_1.\frac{x^2}{2}+C_2.x+C_3$
Ohybová čára	$E.I_y.w=\iiiint q_{(x)}+C_1.\frac{x^3}{6}+C_2.\frac{x^2}{2}+C_3.x+C_4=\frac{q_z}{l}.\frac{x^5}{120}+C_1.\frac{x^3}{6}+C_2.\frac{x^2}{2}+C_3.x+C_4$

Okrajové podmínky: 2 na obou okrajích nosníku

Levý okraj $x=0$: $w_{(x=0)}=0$ (Deformační), $M_{y(x=0)}=0$ (Statická)

Pravý okraj $x=l$: $w'_{(x=l)}=0$ (Deformační), $w_{(x=l)}=0$ (Deformační)

Řešení integračních konstant:

1. $w_{(x=0)}=0\ \rightarrow\ E.I_y.w_{(x=0)}=\frac{q_z}{l}.\frac{0^5}{120}+C_1.\frac{0^3}{6}+C_2.\frac{0^2}{2}+C_3.0+C_4=0\ \rightarrow\ C_4=0$
2. $M_{y(x=0)}=0\ \rightarrow\ M_{y(x=0)}=-\frac{q_z}{l}.\frac{0^3}{6}-C_1.0-C_2=0\ \rightarrow\ C_2=0$

2 rovnice o 2 neznámých C_1 a C_3

3. $w'_{(x=l)}=0\ \rightarrow\ E.I_y.w'_{(x=l)}=\frac{q_z}{l}.\frac{l^4}{24}+C_1.\frac{l^2}{2}+0.l+C_3=0$
4. $w_{(x=l)}=0\ \rightarrow\ E.I_y.w_{(x=l)}=\frac{q_z}{l}.\frac{l^5}{120}+C_1.\frac{l^3}{6}+0.\frac{l^2}{2}+C_3.l+0=0$

$\rightarrow\ C_1=-\frac{q_z.l}{10}$, $C_3=\frac{q_z.l^3}{120}$

Výsledné vztahy:

Posouvající síla:

$$V_z=-\frac{q_z}{l}.\frac{x^2}{2}-C_1=-\frac{q_z}{l}.\frac{x^2}{2}+\frac{q_z.l}{10}=q_z.\left(-\frac{x^2}{2.l}+\frac{l}{10}\right)=\frac{q_z}{10.l}.\left(l^2-5.x^2\right)$$

Rovnice po dosazení vypočtených integračních konstant

Silové reakce:

$$R_{az}=V_{z(x=0)}=\frac{1}{10}.q_z.l\qquad R_{bz}=-V_{z(x=l)}=-\frac{q_z}{10.l}.\left(l^2-5.l^2\right)=\frac{2}{5}.q_z.l$$

Kontrola: $R_z=0:\quad R_{az}+R_{bz}-\frac{q_z.l}{2}=q_z.l.\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)=0$

Ohybový moment:

$$M_y=-\frac{q_z}{l}.\frac{x^3}{6}-C_1.x-C_2=-\frac{q_z}{l}.\frac{x^3}{6}+\frac{q_z.l}{10}.x=\frac{q_z.x}{30.l}.\left(3.l^2-5.x^2\right)$$

Rovnice po dosazení vypočtených integračních konstant

Momentová reakce (koncové M_y):

$$M_{ay}=M_{y(x=0)}=0\qquad M_{by}=-M_{y(x=l)}=-\frac{q_z.l}{30.l}.\left(3.l^2-5.l^2\right)=\frac{1}{15}.q_z.l^2$$

Kontrola: $\sum M_{i,b}=0:\quad -R_{az}.l+\frac{q_z.l}{2}.\frac{l}{3}-M_{by}=-\frac{q_z.l^2}{10}+\frac{q_z.l^2}{6}-\frac{q_z.l^2}{15}=0$

Pootočení:

$$E.I_y.w'=\frac{q_z}{l}.\frac{x^4}{24}+C_1.\frac{x^2}{2}+C_2.x+C_3=\frac{q_z}{l}.\frac{x^4}{24}-\frac{q_z.l}{10}.\frac{x^2}{2}+\frac{q_z.l^3}{120}=q_z.\left[\frac{x^4}{24.l}-\frac{l.x^2}{20}+\frac{l^3}{120}\right]$$

Rovnice po dosazení vypočtených integračních konstant

Průhyb (rovnice ohybové čáry) : Maximální průhyb $\rightarrow\ w'_{(x)}=0$

$$E.I_y.w=\frac{q_z}{l}.\frac{x^5}{120}+C_1.\frac{x^3}{6}+C_2.\frac{x^2}{2}+C_3.x+C_4=\frac{q_z}{l}.\frac{x^5}{120}-\frac{q_z.l}{10}.\frac{x^3}{6}+\frac{q_z.l^3}{120}.x=q_z.\left[\frac{x^5}{120.l}-\frac{l.x^3}{60}+\frac{l^3.x}{120}\right]$$

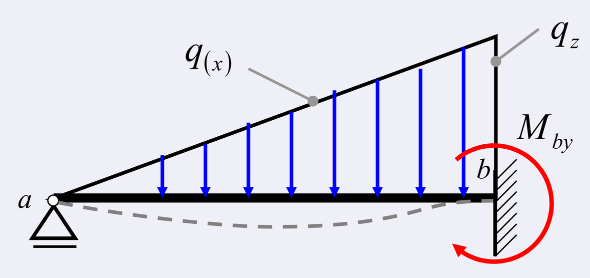
Rovnice po dosazení vypočtených integračních konstant

Příklad 2:

Zadání: Určení staticky neurčité veličiny M_{by} silovou metodou

Řešení:

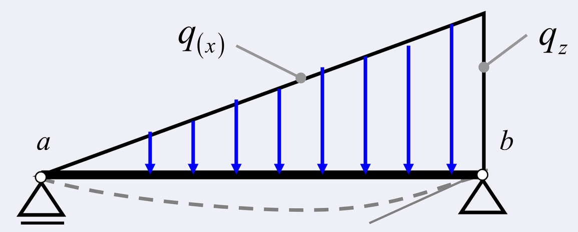
Základní staticky určitá soustava vznikne uvolněním např. momentové vazby ve vetknutí – staticky neurčitou veličinou je pak M_{by}.



Deformační podmínka: $\varphi_b=\varphi_{b,q}+\varphi_{b,M}=0$

Nutno stanovit vztahy pro výpočet pootočení základní soustavy v bodě b od obou zatěžovacích stavů a dosadit do deformační podmínky – 1 neznámá M_{by}.

Stav 1: $\varphi_{b,q}\neq 0=?$ Pro řešení zvolena metoda přímé integrace



Zatížení: $q_{(x)}=\frac{q_z}{l}.x$ Reakce: $R_{az}=\frac{q_z.l}{6}$

Ohybový moment:

$$M_y=\frac{q_z.l}{6}.x-\frac{q_z.x^3}{6.l}=\frac{q_z}{6.l}.\left(l^2.x-x^3\right)$$

Diferenciální rovnice 2.řádu: $E.I_y.w''=-M_y=\frac{q_z}{6.l}.\left(x^3-l^2.x\right)$

2x integrace: $E.I_y.w'=\frac{q_z}{6.l}.\left(\frac{x^4}{4}-\frac{l^2.x^2}{2}\right)+C_1\qquad E.I_y.w=\frac{q_z}{6.l}.\left(\frac{x^5}{20}-\frac{l^2.x^3}{6}\right)+C_1.x+C_2$

Integrační konstanty z okrajových podmínek: $w_{(x=0)}=0\ \rightarrow\ C_2=0$

$w_{(x=l)}=0\ \rightarrow\ E.I_y.w(x=l)=\frac{q_z}{6.l}\left(\frac{l^5}{20}-\frac{l^2.l^3}{6}\right)+C_1.l=0\ \rightarrow$

$\rightarrow\ C_1=\frac{q_z.l^5}{6.l^2}.\left(-\frac{1}{20}+\frac{1}{6}\right)=\frac{q_z.l^3}{6}.\left(\frac{-3+10}{60}\right)\ \rightarrow\ C_1=\frac{7}{360}.q_z.l^3$

Rovnice pro pootočení po dosazení C_1:

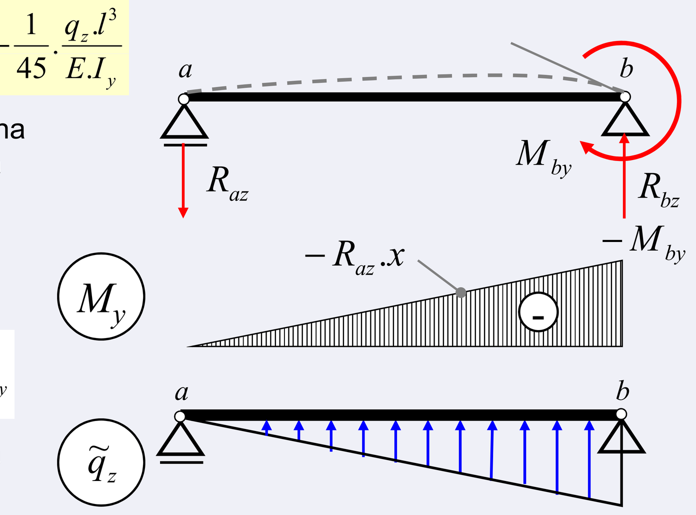
$$E.I_y.w'=\frac{q_z}{6.l}.\left(\frac{x^4}{4}-\frac{l^2.x^2}{2}\right)+\frac{7}{360}.q_z.l^3=\frac{q_z}{360.l}.\left(15.x^4-30.l^2.x^2+7.l^4\right)$$

Rovnice pro pootočení po dosazení $x=l$:

$$E.I_y.w'_{(x=l)}=\frac{q_z}{360.l}.\left(15.l^4-30.l^2.l^2+7.l^4\right)=-\frac{q_z.l^3}{45}$$

Výsledné pootočení v bodě b: $\varphi_{b,q}=-\frac{1}{45}.\frac{q_z.l^3}{E.I_y}$

Stav 2: $\varphi_{b,M}\neq 0=?$ Pro řešení zvolena Mohrova metoda



Reakce: $R_{az}=\frac{M_{by}}{l}(\downarrow)$

Ohybový moment:

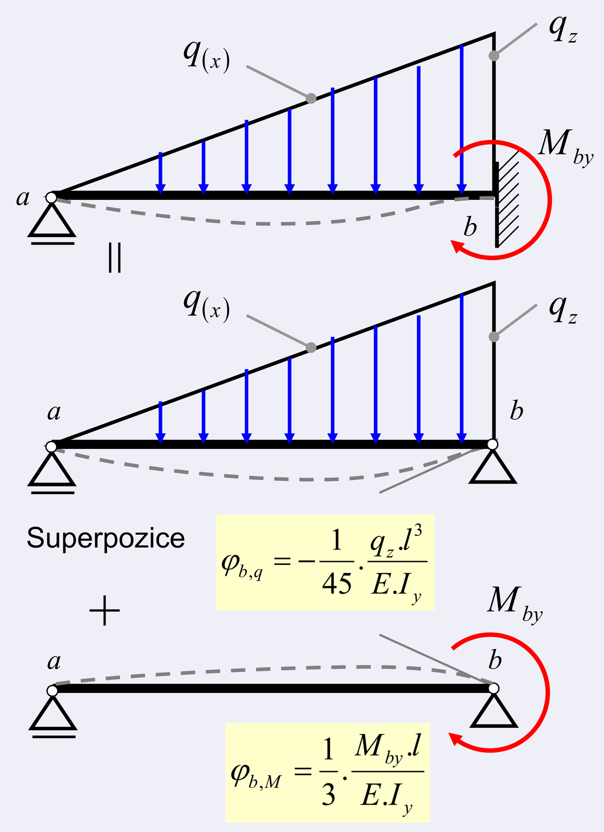
$$M_{\max}=-R_{az}.l=-\frac{M_{by}}{l}.l=-M_{by}$$

Pootočení v bodě b (fiktivní posouvající síla na fiktivním nosníku od fiktivního zatížení – fiktivní reakce) :

$$\varphi_{b,M}=\tilde{R}_{bz}=\frac{2.\tilde{Q}}{3}=\frac{1}{EI_y}.\frac{2}{3}.\frac{M_{by}.l}{2}=\frac{M_{by}.l}{3.EI_y}$$

Výsledné pootočení v bodě b:

$$\varphi_{b,M}=\frac{1}{3}.\frac{M_{by}.l}{E.I_y}$$



Deformační podmínka:

$$\varphi_b=\varphi_{b,q}+\varphi_{b,M}=0$$

Po dosazení:

$$-\frac{1}{45}.\frac{q_z.l^3}{E.I_y}+\frac{1}{3}.\frac{M_{by}.l}{E.I_y}=0$$

Výsledná staticky neurčitá veličina:

$$M_{by}=\frac{\frac{1}{45}.\frac{q_z.l^3}{E.I_y}}{\frac{1}{3}.\frac{l}{E.I_y}}=\frac{1}{15}.q_z.l^2$$

Zbývající statické veličiny R_{az}, R_{bz}, V_z a M_y již lze dopočítat z podmínek rovnováhy.