Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Fakulta stavební

Přednáška z předmětu: Algoritmizace inženýrských výpočtů

Téma č.7: Numerické derivování

doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.

Obsah

Kapitola 1

Numerické derivování

Cíle

Kapitola studentům přiblíží:

- základní výpočetní postupy pro numerické stanovení přibližné hodnoty derivací funkce,
- pokročilý způsob numerického derivování,
- základy numerického řešení parciálních derivací funkce dvou proměnných.

Numerické derivování spočívá v určení hodnoty aproximace derivace funkce $f(x)$ v konkrétním bodě x s využitím funkčních hodnot v okolních bodech a interpolačních polynomů stupně m, pro něž platí:

$$f'(x) \approx p'_m(x) \ . \tag{1.1}$$

Derivace funkce $f(x)$ v bodě x udává směrnici tečny k funkci v daném bodě.

1.1. Metoda konečných diferencí

Nejjednodušší používané vzorce pro výpočet derivace funkce $f(x)$ v bodech x_0 a x_1 ($x_0 < x_1$) nabývají tvaru:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} \cdot f''(\xi_0) \tag{1.2}$$

a

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} + \frac{h}{2} \cdot f''(\xi_1) \tag{1.3}$$

kde $h = x_1 - x_0$ a $\xi_0, \xi_1 \in \langle x_0, x_1 \rangle$. Předpokladem výpočtu je existence druhé derivace $f''(x)$ v řešeném intervalu $\langle x_0, x_1 \rangle$. Posledním členem ve vztazích (1.2) a (1.3) je chyba vypočtené aproximace, která se při výpočtu $f'(x)$ zanedbává.

Oba body x_0 a x_1 jsou tedy vzdáleny o diferenci h. Vztah (1.2) lze zobecnit:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} \cdot f''(\xi) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\ , \tag{1.4}$$

kde ξ leží v intervalu $\langle x, x+h \rangle$. K určení derivace v bodě x podle (1.4) je tedy potřeba znát hodnotu funkce $f(x)$ i v druhém bodě $x + h$. Vztah (1.4) bývá označován jako *dvoubodová dopředná diferenční formule.*

Definice 1.1. Derivace funkce f v bodě x je definována předpisem:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\ . \tag{1.5}$$

Obsah
4. strana ze 22
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Podobně je možno zobecnit i vztah (1.3):

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2} \cdot f''(\xi) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}\ , \tag{1.6}$$

V tomto případě se jedná o tzv. *dvoubodovou zpětnou diferenční formuli*, protože k určení derivace v bodě x je potřeba znát také hodnotu funkce $f(x)$ v bodě $x - h$.

Příklad 1.2. Stanovte aproximaci derivace funkce:

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{1.7}$$

v bodě $x = 2$ s diferencí $h = 0,1$ pomocí vztahu (1.4).

Řešení. Použitím dvoubodové dopředné diferenční formule lze získat:

$$f'(x=2) \approx \frac{f(2+0,1) - f(2)}{0,1} = \frac{\frac{1}{2,1} - \frac{1}{2}}{0,1} \approx -0,238095238095238\ . \tag{1.8}$$

Analyticky určená první derivace funkce (1.7) je definovaná:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\ , \tag{1.9}$$

a pro $x = 2$ se přesná hodnota řešení tedy rovná:

$$f'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4} = -0,25\ , \tag{1.10}$$

takže odchylka dosažené aproximace od přesného analytického řešení a tedy chyba numerického výpočtu derivace je rovna:

$$-0,238095238095238 - (-0,25) \approx 0,011904761904762\ . \tag{1.11}$$

Ve vztahu (1.4) je chyba výpočtu vyjádřena vzorcem:

$$\frac{h}{2} \cdot f''(\xi)\ . \tag{1.12}$$

Druhá derivace funkce (1.7) je rovna:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}\ , \tag{1.13}$$

takže lze vztah (1.12) vyčíslit pro $\xi = 2$:

$$\frac{0,1}{2} \cdot \frac{2}{2^3} = 0,0125\ . \tag{1.14}$$

i $\xi = 2,1$:

$$\frac{0,1}{2} \cdot \frac{2}{(2,1)^3} \approx 0,010797969981643\ . \tag{1.15}$$

Chyba dosažená při výpočtu (1.11) skutečně leží v rozmezí hodnot (1.14) a (1.15). ▲

Příklad 1.3. Stanovte aproximaci derivace funkce:

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{1.16}$$

v bodě $x = 2$ s diferencí $h = 0,1$ pomocí vztahu (1.6).

Řešení. Použitím dvoubodové zpětné diferenční formule lze získat:

$$f'(x=2) \approx \frac{f(2) - f(2-0,1)}{0,1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{1,9}}{0,1} \approx -0,263157894736842\ . \tag{1.17}$$

Chyba dosažená při výpočtu je rovna:

$$-0,25 - (-0,263157894736842) \approx 0,013157894736842 \tag{1.18}$$

a leží v rozmezí hodnot:

$$\frac{0,1}{2} \cdot \frac{2}{2^3} = 0,0125\ . \tag{1.19}$$

a

$$\frac{0,1}{2} \cdot \frac{2}{(1,9)^3} \approx 0,014579384749964\ . \tag{1.20}$$

▲

Výpočet derivace podle (1.2) a (1.3) je založen na derivaci interpolačního polynomu prvního stupně p_1 v uzlech x_0 a $x_1 = x_0 + h$. Použitím polynomu druhého stupně p_2 lze získat:

$$f'(x_0) = \frac{-3 \cdot f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) - f(x_2)}{2 \cdot h} + \frac{h^2}{3} \cdot f'''(\xi_0)\ , \tag{1.21}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_0) - 4 \cdot f(x_1) + 3 \cdot f(x_2)}{2 \cdot h} + \frac{h^2}{3} \cdot f'''(\xi_1) \tag{1.22}$$

a

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2 \cdot h} - \frac{h^2}{12} \cdot f'''(\xi_0) - \frac{h^2}{12} \cdot f'''(\xi_1)\ , \tag{1.23}$$

kde $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$, $\xi_0 \in \langle x_0, x_1 \rangle$ a $\xi_1 \in \langle x_1, x_2 \rangle$. Předpokladem výpočtu je existence třetí derivace $f'''(x)$ v řešeném intervalu $\langle x_0, x_2 \rangle$.

Vztah (1.21) lze zobecnit:

$$f'(x) = \frac{-3 \cdot f(x) + 4 \cdot f(x+h) - f(x + 2 \cdot h)}{2 \cdot h} + \frac{h^2}{3} \cdot f'''(\xi_0) \approx \approx \frac{-3 \cdot f(x) + 4 \cdot f(x+h) - f(x + 2 \cdot h)}{2 \cdot h} . \qquad (1.24)$$

K určení derivace v bodě x podle (1.24) je tedy potřeba znát hodnotu funkce $f(x)$ i v dalších dvou bodech $x + h$ a $x + 2 \cdot h$. Vztah (1.24) lze označit jako *tříbodovou dopřednou diferenční formuli.*

Definice 1.4. Derivace funkce f v bodě x je definována předpisem:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-3 \cdot f(x) + 4 \cdot f(x+h) - f(x + 2 \cdot h)}{2 \cdot h} . \qquad (1.25)$$

Podobně je možno zobecnit i vztah (1.22):

$$f'(x) = \frac{f(x - 2 \cdot h) - 4 \cdot f(x-h) + 3 \cdot f(x)}{2 \cdot h} + \frac{h^2}{3} \cdot f'''(\xi_1) \approx \approx \frac{f(x - 2 \cdot h) - 4 \cdot f(x-h) + 3 \cdot f(x)}{2 \cdot h} . \qquad (1.26)$$

V tomto případě se jedná o tzv. *tříbodovou zpětnou diferenční formuli*, protože k určení derivace v bodě x je potřeba znát také hodnotu funkce $f(x)$ ve dvou dalších bodech $x - h$ a $x - 2 \cdot h$.

Výpočet derivace funkce $f(x)$ lze provést i s pomocí zobecněného vztahu (1.23):

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2 \cdot h} - \frac{h^2}{12} \cdot f'''(\xi_0) - \frac{h^2}{12} \cdot f'''(\xi_1) \approx$$
$$\approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2 \cdot h} - \frac{h^2}{6} \cdot f'''(\xi) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2 \cdot h} \;, \qquad (1.27)$$

kde $\xi \in \langle x+h, x-h \rangle$. V tomto případě se jedná o *tříbodovou středovou diferenční formuli.* Bod x přitom leží uprostřed výpočetního intervalu $\langle x+h, x-h \rangle$.

Příklad 1.5. Stanovte aproximaci derivace funkce:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad (1.28)$$

v bodě $x = 2$ s diferencí $h = 0,1$ pomocí vztahu (1.24).

Řešení. Použitím tříbodové dopředné diferenční formule lze získat:

$$f'(x=2) \approx \frac{-3 \cdot f(2) + 4 \cdot f(2+0,1) - f(2+2 \cdot 0,1)}{2 \cdot 0,1} =$$
$$= \frac{-\frac{3}{2} + \frac{4}{2,1} - \frac{1}{2,2}}{0,2} \approx -0,248917748917749 \;. \qquad (1.29)$$

Chyba numerického výpočtu derivace je rovna:

$$-0,248917748917749 - (-0,25) \approx 0,001082251082251 \;. \qquad (1.30)$$

Obsah

9. strana ze 22

Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Ve vztahu (1.24) je chyba výpočtu vyjádřena vzorcem:

$$-\frac{h^2}{3} \cdot f'''(\xi_0)\ . \tag{1.31}$$

Třetí derivace funkce (1.28) je rovna:

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4}\ , \tag{1.32}$$

takže lze vztah (1.31) vyčíslit pro $\xi = 2$:

$$-\frac{(0,1)^2}{3} \cdot -\frac{6}{2^4} = 0,00125\ . \tag{1.33}$$

i $\xi = 2,1$:

$$-\frac{(0,1)^2}{3} \cdot -\frac{6}{(2,1)^4} \approx 0,001028378093490\ . \tag{1.34}$$

Chyba dosažená při výpočtu (1.30) skutečně leží v rozmezí hodnot (1.33) a (1.34). ▲

Příklad 1.6. Stanovte aproximaci derivace funkce:

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{1.35}$$

v bodě $x = 2$ s diferencí $h = 0,1$ pomocí vztahu (1.26).

Řešení. Použitím tříbodové zpětné diferenční formule lze získat:

$$f'(x=2) \approx \frac{f(2-2\cdot 0,1) - 4\cdot f(2-0,1) + 3\cdot f(2)}{2\cdot 0,1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{1,8} - \frac{4}{1,9} + \frac{3}{2}}{0,2} \approx -0,248538011695906\ . \qquad (1.36)$$

Chyba numerického výpočtu derivace je rovna:

$$-0,248538011695906 - (-0,25) \approx 0,001461988304094\ . \qquad (1.37)$$

Chybu ve vztahu (1.26) lze vyčíslit pro $\xi = 2$:

$$-\frac{(0,1)^2}{3} \cdot -\frac{6}{2^4} = 0,00125\ . \qquad (1.38)$$

i $\xi = 1,9$:

$$-\frac{(0,1)^2}{3} \cdot -\frac{6}{(1,9)^4} \approx 0,001534672078944\ . \qquad (1.39)$$

Chyba dosažená při výpočtu (1.37) leží v rozmezí hodnot (1.38) a (1.39). ▲

Příklad 1.7. Stanovte aproximaci derivace funkce:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad (1.40)$$

v bodě $x = 2$ s diferencí $h = 0,1$ pomocí vztahu (1.27).

Řešení. Derivaci funkce (1.40) lze určit s pomocí tříbodové středové diferenční formule:

$$f'(x=2) \approx \frac{f(2+0,1)-f(2-0,1)}{2\cdot 0,1} = \frac{\dfrac{1}{2,1}-\dfrac{1}{1,9}}{0,2} \approx -0,250626566416040\,. \tag{1.41}$$

Chyba dosažená při výpočtu je rovna:

$$-0,25-(-0,250626566416040) \approx 6,265664160400863\cdot 10^{-4}\,. \tag{1.42}$$

Ve vztahu (1.27) je chyba výpočtu vyjádřena vzorcem:

$$-\frac{h^2}{6}\cdot f'''(\xi)\,. \tag{1.43}$$

Třetí derivace funkce (1.40) se podle (1.32) rovná:

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4}\,, \tag{1.44}$$

takže lze vztah (1.43) vyčíslit nejprve pro $\xi = 1,9$:

$$-\frac{(0,1)^2}{6}\cdot -\frac{6}{(1,9)^4} \approx 7,673360394717661\cdot 10^{-4}\,. \tag{1.45}$$

a pak pro $\xi = 2,1$:

$$-\frac{(0,1)^2}{6}\cdot -\frac{6}{(2,1)^4} \approx 5,141890467449263\cdot 10^{-4}\,. \tag{1.46}$$

Chyba dosažená při výpočtu (1.42) skutečně leží v rozmezí hodnot (1.45) a (1.46).

▲

Má-li řešená funkce čtvrtou derivaci $f''''(x)$, lze pak s využitím polynomu druhého stupně p_2 stanovit i druhou derivaci $f''(x)$ v bodě x_1:

$$f''(x_1) = \frac{f(x_0) - 2 \cdot f(x_1) + f(x_2)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \cdot f''''(\xi)\ , \tag{1.47}$$

pro $\xi \in \langle x_0, x_2 \rangle$.

Příklad 1.8. Stanovte aproximaci druhé derivace funkce:

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{1.48}$$

v bodě $x = 2$ s diferencí $h = 0,1$ pomocí vztahu (1.47).

Řešení. Aproximaci druhé derivace funkce (1.48) lze určit dosazením příslušných hodnot do výrazu (1.47):

$$f''(2) = \frac{f(2 - 0,1) - 2 \cdot f(2) + f(2 + 0,1)}{(0,1)^2} \approx 0,250626566416034 \tag{1.49}$$

Analyticky určená druhá derivace funkce (1.48) je definovaná podle (1.13):

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}\ , \tag{1.50}$$

a pro $x = 2$ se přesná hodnota řešení tedy rovná:

$$f''(2) = \frac{2}{2^3} = \frac{2}{8} = 0,25\ , \tag{1.51}$$

takže chyba dosažená při výpočtu podle (1.49) je rovna:

$$0,250626566416034 - 0,25 \approx 6,265664160344797 \cdot 10^{-4} \; . \tag{1.52}$$

Ve vztahu (1.47) je chyba výpočtu vyjádřena vzorcem:

$$\frac{h^2}{12} \cdot f''''(\xi) \; . \tag{1.53}$$

Čtvrtá derivace funkce (1.48) je rovna:

$$f''''(x) = \frac{24}{x^5} \; , \tag{1.54}$$

takže lze vztah (1.53) vyčíslit nejprve pro $\xi = 1,9$:

$$\frac{(0,1)^2}{12} \cdot \frac{24}{(1,9)^5} \approx 8,077221468123856 \cdot 10^{-4} \; . \tag{1.55}$$

a pak pro $\xi = 2,1$:

$$\frac{(0,1)^2}{12} \cdot \frac{24}{(2,1)^5} \approx 4,897038540427868 \cdot 10^{-4} \; . \tag{1.56}$$

Chyba dosažená při výpočtu (1.52) se nachází v rozmezí hodnot (1.55) a (1.56).

▲

Vztah (1.47) lze získat rovněž jako derivaci z prvních derivací:

$$f''(x) \approx \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} =$$

$$= \frac{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h) - 2 \cdot f(x) + f(x-h)}{h^2} \,, \qquad (1.57)$$

kde derivace $f'(x)$ je určena pomocí dvoubodové dopředné diferenční formule (1.4).

Podobně lze stanovit i třetí derivaci funkce $f(x)$, např. pomocí tříbodové středové diferenční formule (1.27):

$$f'''(x) \approx \frac{f''(x+h) - f''(x-h)}{2 \cdot h} =$$

$$= \frac{\dfrac{f(x+2\cdot h) - 2 \cdot f(x+h) + f(x)}{h^2} - \dfrac{f(x) - 2 \cdot f(x-h) + f(x-2\cdot h)}{h^2}}{2 \cdot h} =$$

$$= \frac{f(x+2\cdot h) - 2 \cdot f(x+h) + 2 \cdot f(x-h) - f(x-2\cdot h)}{2 \cdot h^3} \,, \qquad (1.58)$$

nebo čtvrtou derivaci funkce $f(x)$, např. pomocí diferenční formule (1.47):

$$f''''(x) \approx \frac{f''(x+h) - 2 \cdot f''(x) + f''(x-h)}{h^2} =$$

$$= \frac{\frac{f(x+2\cdot h) - 2\cdot f(x+h) + f(x)}{h^2} - 2 \cdot \frac{f(x+h) - 2\cdot f(x) + f(x-h)}{h^2} +}{h^2}$$

$$\frac{+\frac{f(x) - 2\cdot f(x-h) + f(x-2\cdot h)}{h^2}}{h^2} =$$

$$= \frac{f(x+2\cdot h) - 4\cdot f(x+h) + 6\cdot f(x) - 4\cdot f(x-h) + f(x-2\cdot h)}{h^4}\,. \quad (1.59)$$

Příklady k procvičení

1. Vztahy pro numerické určení první, druhé, třetí a čtvrté derivace využijte pro výpočet pootočení, ohybového momentu, posouvající síly a zatížení derivováním ohybové čáry konstrukce z příkladů

   a) 2.1

   b) 2.2

   c) 2.3.

   Uvedené veličiny stanovte nejprve tabelizací v průřezech s roztečí 10 cm a nakonec graficky zobrazte. Porovnejte s přesným řešením.

1.2. Numerické derivování s proměnnou diferencí

U numerického výpočtu derivace vyvstane otázka, jak velkou volit diferenci h. Řešením je tzv. Nevillův algoritmus (podobný Rombergově integraci), který byl definován anglickým matematikem Ericem Haroldem Nevillem. Výpočetní postup vychází z tříbodové středové diferenční formule 1.27.

Výpočet probíhá v cyklu s řídící proměnnou i celkem n-krát, přičemž se vždy změní krok h na hodnotu:

$$h_i = \frac{h_0}{10^{i-1}} \ , \tag{1.60}$$

kde h_0 je počáteční hodnota diference.

Velikost derivace je pak rovna:

$$a_{i,1} = \frac{f(x+h_i) - f(x-h_i)}{2 \cdot h_i} \ , \tag{1.61}$$

což lze dále zpřesňovat:

$$a_{i,j} = \frac{a_{i,j-1} \cdot 10^{2 \cdot j-2} - a_{i-1,j-1}}{10^{2 \cdot j-2} - 1} \ , \tag{1.62}$$

pro $j = 2, 3, \ldots, n$. Nejpřesnější odhad požadované derivace je na konci výpočtu obsažen v proměnné $a_{n,n}$. Tento výpočetní postup lze schématicky znázornit algoritmem 1.

Vstup : f, x, h_0, n

Výstup: **a**

$h_1 = h_0$

$a_{1,1} = \dfrac{f(x+h_1) - f(x-h_1)}{2 \cdot h_1}$

for $i \leftarrow 2, 3, \ldots, n$ **do**

$\quad h_i = \dfrac{h_0}{10^{i-1}}$

$\quad a_{i,1} = \dfrac{f(x+h_i) - f(x-h_i)}{2 \cdot h_i}$

$\quad$ **for** $j \leftarrow 2, 3, \ldots, i$ **do**

$\quad\quad a_{i,j} = \dfrac{a_{i,j-1} \cdot 10^{2 \cdot j-2} - a_{i-1,j-1}}{10^{2 \cdot j-2} - 1}$

$\quad$ **end**

end

Algoritmus 1: Nevillův algoritmus numerického derivování

Příklad 1.9. Vypočtěte aproximaci derivace:

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{1.63}$$

v bodě $x = 2$ s využitím Nevillova algoritmu numerického derivování. Výslednou aproximaci porovnejte s výsledkem přesného analytického řešení.

Řešení. Výpočet derivace pomocí Nevillova výpočetního postupu lze v programu MATLAB naprogramovat např. následujícím způsobem:

```
function a=neville(f,x,h0,n)
h(1)=h0;
a(1,1)=(f(x+h(1))-f(x-h(1)))/(2*h(1));
for i=2:n
  h(i)=h0/(10^(i-1));
  a(i,1)=(f(x+h(i))-f(x-h(i)))/(2*h(i));
  for j=2:i
    a(i,j)=(a(i,j-1)*10^(2*j-2)-a(i-1,j-1))/(10^(2*j-2)-1);
  end
end
```

Výsledek pro $n = 3$ pak nabývá hodnot:

```
deriv =
  -0.250626566416040                   0                   0
  -0.250006250156248  -0.249999984335442                   0
  -0.250000062499978  -0.249999999998399  -0.249999999999966

Odchylka od přesného řešení = 3.438916e-014
```

▲

1.3. Parciální derivace

Při řešení funkce dvou proměnných:

$$z = f(x, y) \tag{1.64}$$

lze stanovit parciální derivace. Pokud bude y považováno za konstantu, parciální derivaci podle x lze definovat:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \,. \tag{1.65}$$

Naopak parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle y nabývá tvaru:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \,. \tag{1.66}$$

Druhé parciální derivace funkce $f(x, y)$ pak mohou být určeny pomocí vztahů:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - 2 \cdot f(x, y) + f(x - \Delta x, y)}{\Delta x^2} \tag{1.67}$$

a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - 2 \cdot f(x, y) + f(x, y - \Delta y)}{\Delta y^2} \,. \tag{1.68}$$

Lze rovněž definovat smíšenou parciální derivaci funkce $f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y - \Delta y) -}{4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y} \\ \frac{- f(x - \Delta x, y + \Delta y) + f(x - \Delta x, y - \Delta y)}{4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y} \,. \tag{1.69}$$

Obsah
20. strana ze 22
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Třetí parciální derivace funkce $f(x,y)$ je možno určit podobně jako v (1.58):

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+2\cdot\Delta x,y) - 2\cdot f(x+\Delta x,y) +}{2\cdot\Delta x^3}$$
$$\frac{+2\cdot f(x-\Delta x,y) - f(x-2\cdot\Delta x,y)}{2\cdot\Delta x^3} \tag{1.70}$$

a

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+2\cdot\Delta y) - 2\cdot f(x,y+\Delta y) +}{2\cdot\Delta y^3}$$
$$\frac{+2\cdot f(x,y-\Delta y) - f(x,y-2\cdot\Delta y)}{2\cdot\Delta y^3}\,. \tag{1.71}$$

Stejným způsobem lze postupovat i u čtvrtých parciálních derivací funkce $f(x,y)$, např. podobně jako v (1.59):

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+2\cdot\Delta x,y) - 4\cdot f(x+\Delta x,y) + 6\cdot f(x,y) -}{\Delta x^4}$$
$$\frac{-4\cdot f(x-\Delta x,y) + f(x-2\cdot\Delta x,y)}{\Delta x^4} \tag{1.72}$$

a

$$\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+2\cdot\Delta y) - 4\cdot f(x,y+\Delta y) + 6\cdot f(x,y) -}{\Delta y^4}$$
$$\frac{-4\cdot f(x,y-\Delta y) + f(x,y-2\cdot\Delta y)}{\Delta y^4}\,. \tag{1.73}$$

Obsah
21. strana ze 22
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Rovněž lze definovat smíšenou čtvrtou parciální derivaci funkce $f(x, y)$:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - 2 \cdot f(x+\Delta x, y) + f(x+\Delta x, y-\Delta y) -}{\Delta x^2 \cdot \Delta y^2}$$

$$\frac{-2 \cdot (f(x, y+\Delta y) - 2 \cdot f(x, y) + f(x, y-\Delta y)) +}{\Delta x^2 \cdot \Delta y^2}$$

$$\frac{+f(x-\Delta x, y+\Delta y) - 2 \cdot f(x-\Delta x, y) + f(x-\Delta x, y-\Delta y)}{\Delta x^2 \cdot \Delta y^2} . \quad (1.74)$$