Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Fakulta stavební

Přednáška z předmětu: Algoritmizace inženýrských výpočtů

Téma č.6: Numerická integrace určitého integrálu

doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.

Obsah

Kapitola 1

Numerická integrace určitého integrálu

Při numerické integraci se provádí přibližné řešení určitého integrálu:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ , \tag{1.1}$$

kde $f(x)$ je spojitou funkcí v intervalu $\langle a, b\rangle$, a, b představují meze určitého integrálu.

Poznámka 1.1. Pro numerickou integraci se vžilo synonymum *kvadratura*, které je spojováno zejména s jednorozměrnými integrály. Dvojrozměrná integrace bývá někdy označovaná jako *kubatura*.

Interval $\langle a, b\rangle$ se rozdělí na n stejně velkých intervalů:

$$\langle a, b\rangle = \langle a \equiv x_0, x_1\rangle \cup \langle x_1, x_2\rangle \cup \ldots \cup \langle x_{n-1}, x_n \equiv b\rangle \ , \tag{1.2}$$

přičemž šířka všech subintervalů je stejná:

$$h = \frac{b-a}{n} \ . \tag{1.3}$$

V každém subintervalu se aproximuje integrovaná funkce $f(x)$ jednodušší interpolační nebo aproximační funkcí (polynomem stupně m) $\varphi_m(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x + R_m(f) \ , \tag{1.4}$$

kde $R_m(f)$ je chyba použité výpočetní formule.

1.1. Obdélníková metoda

V případě použití obdélníkové metody numerické integrace se integrovaná funkce $f(x)$ aproximuje v každém ze subintervalů polynomem nultého stupně, tedy konstantní funkcí $\varphi_0(x) = \text{konst}$. Potom platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + R_0(f) \ , \tag{1.5}$$

kde $R_0(f)$ je chyba výpočtu, kterou je možno minimalizovat zvýšením počtu subintervalů n.

Příklad 1.2. Stanovte aproximaci:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

s využitím obdélníkové metody. Při výpočtu postupně zvyšujte počet subintervalů $n = 5, 10, 20, 100$ a sledujte dosaženou přesnost řešení porovnáním s analytickým přesným řešením integrálu

Řešení. Řešení úlohy lze založit na vztahu (1.5), který lze v programu Matlab naprogramovat například následujícím způsobem:

```
function y=obd(f,a,b,n)
if n<1
  error('Počet intervalů n musí být > 0 !')
end;
if ~(a<b)
  error('Meze integrálu musí být a > b !')
end;
h=(b-a)/n;
y=0;
for x=a:h:b-h
    y=y+f(x);
end
y=y*h;
```

Funkci `obd` lze vyvolat s čtveřicí vstupních parametrů: f je předpis integrované funkce, kterou lze v programu Matlab definovat s pomocí příkazu `inline`, a, b jsou integrační meze $(a < b)$ a n počet subintervalů, kterými byl interval $\langle a; b\rangle$ rozdělen.

Výpočet pak lze vyvolat například následující sekvencí příkazů:

```
clc;
format long;
g=inline('log(x)');
int=obd(g,1,2,5)
```

Výsledek integrování obdélníkovou metodou s pěti subintervaly pak vychází:

```
int =
   0.315316817512604
```

Porovná-li se výsledek s přesnou hodnotou analytického řešení:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \ln(4) - 1 \approx 0,386294361119891\,. \tag{1.7}$$

například s pomocí příkazů

```
res=log(4)-1;
fprintf('Odchylka od přesného řešení = %8.6e\n\n',res-int)
```

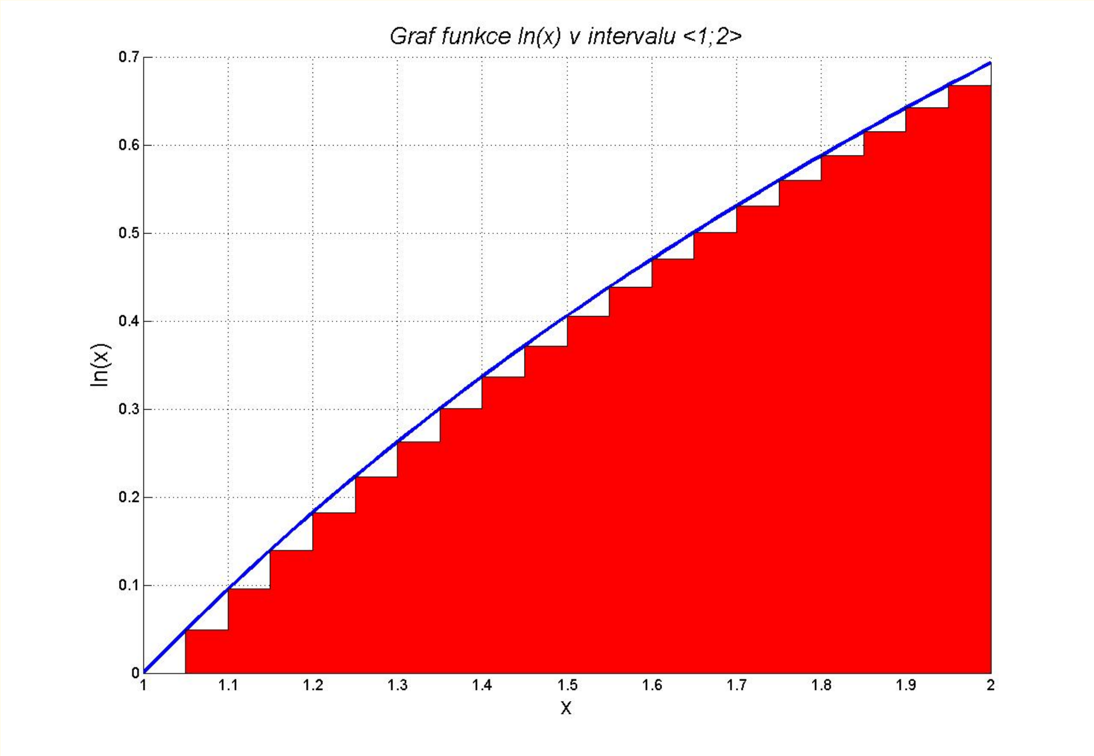
odchylka dosažené aproximace od přesného analytického řešení činí:

```
Odchylka od přesného řešení = 7.097754e-002
```

Pro zvýšený počet subintervalů $n = 10, 20, 100$ pak výsledná hodnota aproximace řešeného integrálu i s odchylkou od přesného analytického řešení vychází:

```
int =
   0.351220577717757

Odchylka od přesného řešení = 3.507378e-002

int =
   0.368861530118207

Odchylka od přesného řešení = 1.743283e-002

int =
   0.382824458574729

Odchylka od přesného řešení = 3.469903e-003
```

což svědčí o velké nepřesnosti a neefektivitě obdélníkové metody, jejíž princip lze schématicky pro $n = 20$ zobrazit na obrázku 1.1 (aproximace řešeného integrálu se rovná červeně zbarvené ploše). ▲



Obr. 1.1 Princip výpočtu integrálu obdélníkovou metodou s počtem subintervalů $n = 20$

Poznámka 1.3. Analytické řešení integrálu (1.6) lze pro kontrolu získat např. v programu MATLAB příkazem

```
int(log(sym('x')),1,2)
```

který se používá pro výpočet tzv. symbolické integrace. Výsledkem je pak

```
log(4) - 1
```

1.2. Lichoběžníková metoda

Pokud se k numerickému integrování použije lichoběžníková metoda numerické integrace, na jednotlivých subintervalech se integrovaná funkce $f(x)$ aproximuje polynomem prvního stupně, tedy lineární funkcí $\varphi_1(x) = k \cdot x + q$. Potom platí:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h \cdot \Bigg(\frac{f(a \equiv x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + \\ + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n \equiv b)}{2} \Bigg) + R_1 = \\ = h \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(a \equiv x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} \cdot f(x_n \equiv b) \right) + R_1 \,, \qquad (1.8)\end{aligned}$$

kde $R_1(f)$ je chyba výpočtu, pro kterou platí:

$$R_1(f) = -\frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\xi) \,, \qquad (1.9)$$

pro $\xi \in \langle a, b \rangle$. Má-li integrovaná funkce spojitou druhou derivaci, pak lze vhodnou volbou počtu subintervalů n docílit libovolně malé chyby výpočtu.

V případě, že meze integrálu tvoří x_0, x_1 a $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1)$ jsou jejich příslušné funkční hodnoty $(n = 1)$, lze definovat tzv. lichoběžníkové pravidlo:

Definice 1.4. Lichoběžníkové pravidlo (Trapezoid Rule):

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\cdot(y_0+y_1) - \frac{h^3}{12}\cdot f''(c)\ , \tag{1.10}$$

kde $h = x_1 - x_0$ a c leží mezi x_0 a x_1.

Příklad 1.5. Využijte lichoběžníkového pravidla ke stanovení aproximace integrálu z příkladu 1.2:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.11}$$

pro $n = 1$ subinterval a určete maximální odchylku této aproximace od přesného řešení.

Řešení. Uplatněním lichoběžníkového pravidla lze získat:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\cdot(y_0+y_1) = \frac{1}{2}\cdot(\ln 1 + \ln 2) \approx 0,346573590279973\ . \tag{1.12}$$

Chyba výpočtu s využitím Lichoběžníkového pravidla je dána pro $1 < c < 2$:

$$R_1(f) = -\frac{h^3}{12}\cdot f''(c)\ . \tag{1.13}$$

Platí:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \tag{1.14}$$

a

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}\ , \tag{1.15}$$

takže chyba výpočtu činí:

$$R_1(f) = \frac{1^3}{12 \cdot c^2} \; . \tag{1.16}$$

Největší nepřesnost výpočtu tedy bude:

$$R_1(f) \leqq \frac{1^3}{12 \cdot 1^2} = \frac{1}{12} = 0,08\overline{3} \; . \tag{1.17}$$

Jinými slovy lichoběžníkové pravidlo říká:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = 0,346573590279973 \pm 0,08\overline{3} \; , \tag{1.18}$$

což lze porovnat s přesným řešením úlohy:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \ln(4) - 1 \approx 0,386294361119891 \; . \tag{1.19}$$

▲

Poznámka 1.6. Analytické řešení derivací (1.15) a (1.16) lze v programu MATLAB provést příkazy

```
diff(log(sym('x')),1)
diff(log(sym('x')),2)
```

jenž se používají pro výpočet tzv. symbolické derivace (řád požadované derivace je obsažen ve 2. vstupním parametru). Výsledný výpis obou analytických vztahů pak vypadá následovně:

```
1/x
-1/x^2
```

Příklad 1.7. Stanovte aproximace integrálu z příkladu 1.2:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.20}$$

lichoběžníkovou metodou pro $n = 5, 10, 20, 100$ subintervalů a porovnejte dosažené výsledky s přesným analytickým řešením.

Řešení. Výpočet integrálu lichoběžníkovou metodou lze založit na vztahu (1.8), který lze aplikovat v programu MATLAB následovně:

```
function y=lichobeznik(f,a,b,n)
if n<1
  error('Počet intervalů n musí být > 0 !')
end;
if ~(a<b)
  error('Meze integrálu musí být a > b !')
end;
h=(b-a)/n;
y=f(a)/2+f(b)/2;
for x=a+h:h:b-h
    y=y+f(x);
end
y=y*h;
```

Funkci `lichobeznik` lze vyvolat se stejnou čtveřicí vstupních parametrů, jak tomu bylo i v případě obdélníkové metody: f je předpis integrované funkce, kterou lze v programu Matlab definovat s pomocí příkazu `inline`, a, b jsou integrační meze $(a < b)$ a n počet subintervalů, kterými byl interval $\langle a; b\rangle$ rozdělen.

Výpočet i porovnání přesnosti s přesným analytickým řešením pak lze podobně jako v případě příkladu 1.2 vyvolat například následující sekvencí příkazů:

```
clc;
format long;
g=inline('log(x)');
int=lichobeznik(g,1,2,5)
res=log(4)-1;
fprintf('Odchylka od přesného řešení = %8.6e\n\n',res-int)
```

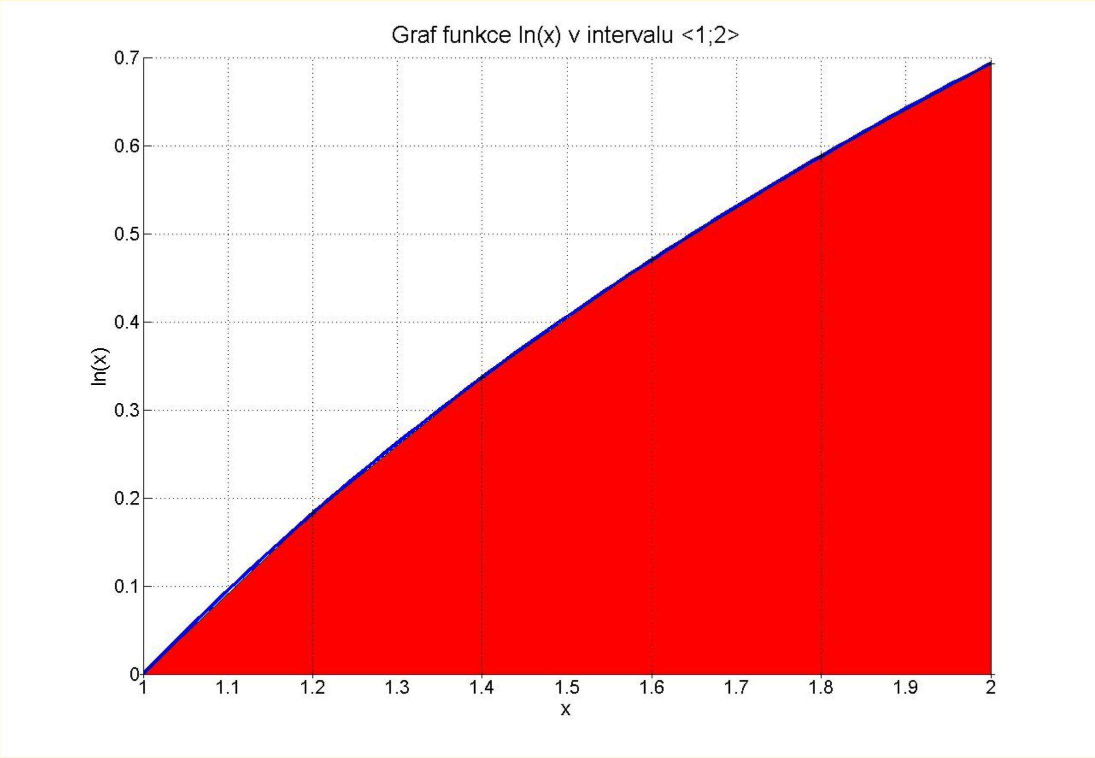
Výsledek integrování obdélníkovou metodou s pěti, deseti, dvaceti a sto subintervaly pak vychází:

```
int =
   0.384631535568599

Odchylka od přesného řešení = 1.662826e-003

int =
   0.385877936745754
```

```
Odchylka od přesného řešení = 4.164244e-004

int =
   0.386190209632206

Odchylka od přesného řešení = 1.041515e-004

int =
   0.386290194477529

Odchylka od přesného řešení = 4.166642e-006
```

což svědčí o větší přesnosti i efektivitě řešení nežli u obdélníkové metody.

Princip výpočtu řešeného integrálu lichoběžníkovým pravidlem lze schématicky znázornit pro $n = 5$ subintervalů na obrázku 1.2 (aproximace řešeného integrálu se rovná červeně zbarvené ploše). ▲



Obr. 1.2 Princip výpočtu integrálu lichoběžníkovou metodou s počtem subintervalů $n = 5$

1.3. Simpsonova metoda

Zvolí-li se pro aproximaci funkce $f(x)$ na jednotlivých subintervalech polynomy druhého stupně, tedy kvadratické funkce $\varphi_2(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, provádí se numerické integrování Simpsonovou metodou numerické integrace. Počet subintervalů n přitom ale musí být sudý. Potom platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3} \cdot \Big(f(a \equiv x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + \cdots + \\ + 4 \cdot f(x_{n-3}) + 2 \cdot f(x_{n-2}) + 4 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n \equiv b) \Big) + R_2(f)\,, \qquad (1.21)$$

kde $R_2(f)$ je chyba výpočtu, kterou lze stanovit:

$$R_2(f) = -\frac{b-a}{180} \cdot h^4 \cdot f^{''''}(\xi)\,, \qquad (1.22)$$

pro $\xi \in \langle a, b \rangle$. Má-li integrovaná funkce spojitou čtvrtou derivaci, pak lze vhodnou volbou počtu subintervalů n docílit libovolně malé chyby výpočtu.

V případě, že meze integrálu tvoří x_0, x_2 a $y_0 = f(x_0), y_2 = f(x_2)$ jsou jejich příslušné funkční hodnoty ($n = 2$), a že existuje $f^{''''}(x)$, která je spojitá, lze definovat tzv. Simpsonovo pravidlo:

Definice 1.8. Simpsonovo pravidlo (Simpson's Rule):

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\cdot(y_0 + 4\cdot y_1 + y_2) - \frac{h^5}{90}\cdot f''''(c)\ , \tag{1.23}$$

kde $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$, $y_1 = f(x_1)$, a c leží mezi x_0 a x_2.

Příklad 1.9. Využijte Simpsonova pravidla k výpočtu aproximace integrálu z příkladů 1.2 a 1.5:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.24}$$

pro $n = 2$ subintervalů a určete maximální odchylku této aproximace od přesného řešení.

Řešení. Podle Simpsonova pravidla vychází pro $h = 2 - 1,5 = 1,5 - 1 = 0,5$:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\cdot(y_0+4\cdot y_1+y_2) = \frac{0,5}{3}\cdot(\ln 1+4\cdot\ln 1,5+\ln 2) \approx 0,385834602165434\ . \tag{1.25}$$

Chyba výpočtu se podle Simpsonova pravidla pro $1 < c < 2$ stanoví:

$$R_2(f) = -\frac{h^5}{90}\cdot f''''(c)\ . \tag{1.26}$$

Platí:

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \tag{1.27}$$

a

$$f''''(x) = -\frac{6}{x^4}\ , \tag{1.28}$$

takže největší nepřesnost výpočtu bude:

$$R_2(f) \leqq \frac{0,5^5 \cdot 6}{90 \cdot 1^4} = \frac{0,5^5 \cdot 6}{60} = \frac{1}{480} = 0,00208\overline{3}\,. \tag{1.29}$$

Výsledek výpočtu Simpsonovým pravidlem je tedy:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = 0,385834602165434 \pm 0,00208\overline{3}\,, \tag{1.30}$$

což je podstatně přesnější hodnota výsledné aproximace integrálu (1.24) než při výpočtu lichoběžníkovým pravidlem. ▲

Poznámka 1.10. Analytické řešení derivací (1.27) a (1.28) lze opět provést v programu MATLAB příkazy pro symbolické derivování

```
diff(log(sym('x')),3)
diff(log(sym('x')),4)
```

Výsledný výpis obou analytických vztahů pak vypadá následovně:

```
2/x^3
-6/x^4
```

Příklad 1.11. Využijte Simpsonovu metodu pro výpočet aproximace integrálu příkladu 1.9:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.31}$$

pro $n = 4, 8, 16, 32$ subintervalů a porovnejte dosažené výsledky s přesným analytickým řešením.

Řešení. Řešení integrálu Simpsonovou metodou je založeno na vztahu (1.21), který lze v programu Matlab naprogramovat např. pomocí následující sekvence příkazů:

```
function y=simpson(f,a,b,n)
if n<1
  error('Počet intervalů n musí být > 0 !')
end;
if ~(mod(n,2)==0)
  error('Počet intervalů n musí být sudý !')
end;
if ~(a<b)
  error('Meze integrálu musí být a > b !')
end;
h=(b-a)/n;
y=f(a)+f(b);
k=1;
for x=a+h:h:b-h
    if mod(k,2)==0
      y=y+2*f(x);
    else
      y=y+4*f(x);
    end
    k=k+1;
end
y=y*h/3;
```

Funkci `simpson` lze vyvolat se stejnou čtveřicí vstupních parametrů, jak tomu bylo i v případě obdélníkové či lichoběžníkové metody: f je předpis integrované funkce, kterou lze v programu MATLAB definovat s pomocí příkazu `inline`, a, b jsou integrační meze $(a < b)$ a n počet subintervalů, kterými byl interval $\langle a; b\rangle$ rozdělen (musí být sudé číslo, což je také v programu kontrolováno pomocí příkazu pro výpočet zbytku celočíselného dělení `mod`).

Výpočet i porovnání přesnosti s přesným analytickým řešením pak lze vyvolat příkazy:

```
clc;
format long;
g=inline('log(x)');
int=simpson(g,1,2,4)
res=log(4)-1;
fprintf('Odchylka od přesného řešení = %8.6e\n\n',res-int)
```

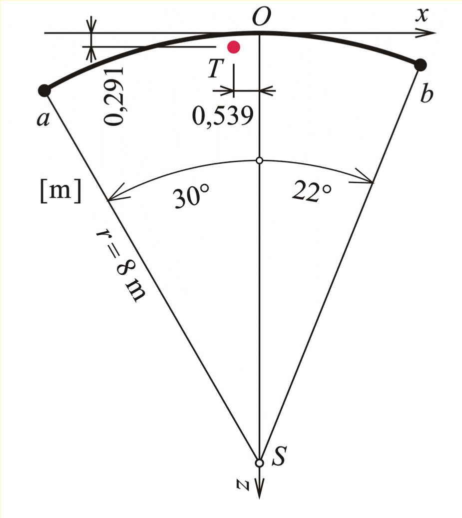
Výsledky integrování Simpsonovou metodou se čtyřmi, osmi, šestnácti a dvaatřiceti subintervaly jsou následující:

```
int =
   0.386259562814567

Odchylka od přesného řešení = 3.479831e-005

int =
   0.386292043466313
```

```
Odchylka od přesného řešení = 2.317654e-006

int =
   0.386294213675793

Odchylka od přesného řešení = 1.474441e-007

int =
   0.386294351862333

Odchylka od přesného řešení = 9.257558e-009
```

což svědčí o největší přesnosti i efektivitě řešení nežli u předchozích dvou numerických metod integrace. ▲

Příklad 1.12. Využijte Simpsonovu metodu s dělením na $n = 32$ subintervalů ke stanovení souřadnic těžiště kružnicového oblouku, jehož schéma je zobrazeno na obr. 1.3. Poloměr kružnicového oblouku je $r = 8$ m, středové úhly $\varphi_a = -30°$ a $\varphi_b = 22°$.



Obr. 1.3 Schéma kružnicového oblouku

Řešení. Délka kružnicového oblouku je dána vztahem:

$$s = \int_s \mathrm{d}s \,, \tag{1.32}$$

přičemž d$s = r \cdot$ dφ, takže vztah (1.32) lze upravit:

$$s = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} r \, \mathrm{d}\varphi = r \cdot (\varphi_b - \varphi_a) \, . \tag{1.33}$$

Potřebné statické momenty se určí:

$$S_x = \int_s z \, \mathrm{d}s = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} r \cdot z \, \mathrm{d}\varphi \, . \tag{1.34}$$

a

$$S_z = \int_s x \, \mathrm{d}s = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} r \cdot x \, \mathrm{d}\varphi \, . \tag{1.35}$$

Při převodu z kartézských souřadnic na polární lze využít vztahů $x = r \cdot \sin\varphi$ a $z = = r \cdot (1 - \cos\varphi)$, takže vztahy (1.34) a (1.35) se upraví do tvarů:

$$S_x = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} r^2 \cdot (1 - \cos\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \, . \tag{1.36}$$

a

$$S_z = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} r^2 \cdot \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, . \tag{1.37}$$

Výsledné souřadnice těžiště parabolického oblouku jsou pak v daném souřadnicovém systému rovny:

$$x_T = \frac{S_z}{s} \tag{1.38}$$

a

$$z_T = \frac{S_x}{s} \, . \tag{1.39}$$

Obsah

24. strana ze 44

Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

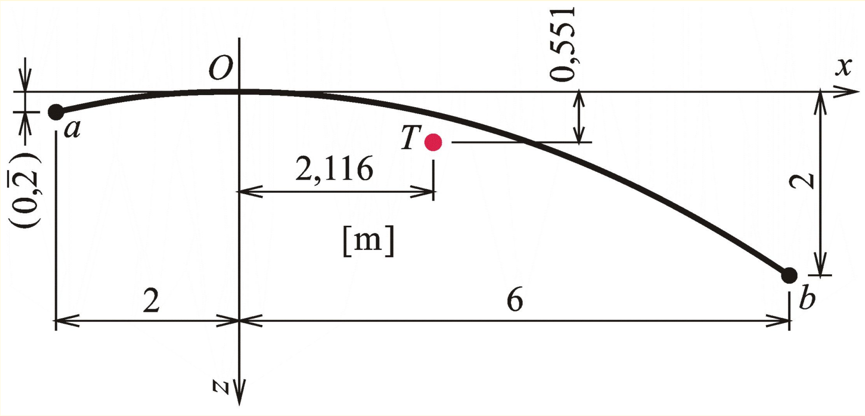
Konkrétní řešení v programu Matlab lze provést pomocí sekvence příkazů:

```
clc;
format long;
fia=-30/180*pi;
fib=22/180*pi;
r=8;
g1=inline('1-cos(fi)');
g2=inline('sin(fi)');
int1=simpson(g1,fia,fib,32);
int2=simpson(g2,fia,fib,32);
s=r*(fib-fia)
xT=int2*r^2/s
zT=int1*r^2/s
```

jejichž vyvolání vede k následujícím výsledkům:

```
s =
   7.260569688296410
xT =
  -0.539095557536041

zT =
   0.290574351201034
```

Příklad 1.13. Pomocí Simpsonovy metody určete souřadnice těžiště parabolického oblouku, jehož schéma je zobrazeno na obr. 1.4. Tvar střednice je dán kvadratickou parabolou s rovnicí $z(x) = k \cdot x^2$. Vodorovné souřadnice obou krajních bodů jsou $x_a = -2$ m a $x_b = 6$ m, svislá pořadnice bodu b pak je $z_b = 2$ m.



Obr. 1.4 Schéma parabolického oblouku

Řešení. Parametr parabolického oblouku k se určí ze vztahu:

$$k = \frac{z_b}{x_b^2}\ . \tag{1.40}$$

Délka oblouku je dána vztahem:

$$s = \int_s \mathrm{d}s = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + (z')^2}\,\mathrm{d}x = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + 4 \cdot k^2 \cdot x^2}\,\mathrm{d}x\ . \tag{1.41}$$

Potřebné statické momenty se určí:

$$S_x = \int_s z\,\mathrm{d}s = \int_{x_a}^{x_b} k \cdot x^2 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot k^2 \cdot x^2}\,\mathrm{d}x\ . \tag{1.42}$$

a

$$S_z = \int_s x\,\mathrm{d}s = \int_{x_a}^{x_b} x \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot k^2 \cdot x^2}\,\mathrm{d}x\ . \tag{1.43}$$

Výsledné souřadnice těžiště parabolického oblouku jsou pak v daném souřadnicovém systému rovny:

$$x_T = \frac{S_z}{s} \tag{1.44}$$

a

$$z_T = \frac{S_x}{s}\ . \tag{1.45}$$

Konkrétní řešení v programu Matlab může být aplikováno následující posloupností příkazů:

```
clc;
format long;
xa=-2;
xb=6;
```

```
g1=inline('sqrt(1+(2*(2/(6^2))*x)^2)');
g2=inline('(2/(6^2))*x^2*sqrt(1+(2*(2/(6^2))*x)^2)');
g3=inline('x*sqrt(1+(2*(2/(6^2))*x)^2)');
int1=simpson(g1,xa,xb,32);
int2=simpson(g2,xa,xb,32);
int3=simpson(g3,xa,xb,32);
xT=int3/int1
zT=int2/int1
```

jejichž vyvolání vede k následujícím výsledkům:

```
xT =
   2.115895489649506

zT =
   0.550954275587375
```

▲

Poznámka 1.14. Určitou vadou na kráse předchozího výpočtu je definice trojice inline funkcí pomocí konkrétních vstupních hodnot pro $x_b = 2$ a $z_b = 6$, které do těchto funkcí vstupují jako definice parametru paraboly $k = \frac{2}{6^2}$. Tímto způsobem se dalo obejít použití inline funkcí se dvěma proměnnými $g(k, x)$, pro které by se musela upravit i m-funkce `simpson`. Pokuste se uvedený výpočet zobecnit.

Příklady k procvičení

1. Simpsonovu metodu použijte k určení aproximace integrálů:

   a) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x\,,$

   b) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x\,,$

   c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x\,,$

   d) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x\,,$

   Počet intervalů postupně volte $n = 4, 8, 16, 32$. Výsledky porovnejte s přesným řešením.

1.4. Rombergova metoda

Rombergova metoda numerické integrace vychází z myšlenky, související s podrobnějším vyjádřením řešení lichoběžníkovou metodou:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_0) + 2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right) + c_2\cdot h^2 + c_4\cdot h^4 + c_6\cdot h^6 + \ldots \qquad (1.46)$$

kde c_i závisí pouze na derivacích $f(x)$ v intervalu $\langle a;b\rangle$ a nikoliv na h.

Lze rozepsat následující posloupnost diferencí h_i pro $i = 1, 2, \ldots, j$:

$$\begin{aligned} h_1 &= b - a \\ h_2 &= \frac{1}{2}\cdot(b-a) \\ h_3 &= \frac{1}{4}\cdot(b-a) \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (1.47)$$

$$h_j = \frac{1}{2^{j-1}}\cdot(b-a)\ , \qquad (1.48)$$

ale také příslušné aproximace řešeného integrálu:

$$
\begin{aligned}
R_{1,1} &= \frac{h_1}{2} \cdot (f(a) + f(b)) \\
R_{2,1} &= \frac{h_2}{2} \cdot \left(f(a) + f(b) + 2 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot R_{1,1} + h_2 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

$$
R_{j,1} = \frac{1}{2} \cdot R_{j-1,1} + h_j \cdot \sum_{i=1}^{2^{j-2}} f(a + (2 \cdot i - 1) \cdot h_j) \tag{1.50}
$$

pro $j = 2, 3, \ldots, n$.

Dalším krokem Rombergovy integrace je stanovení zpřesněných aproximací integrálů $R_{j,k}$ pro $k = 2, \ldots, j$, které lze určit s využitím předchozích hodnot aproximací $R_{j,k-1}$ a $R_{j-1,k-1}$:

$$
R_{j,k} = \frac{4^{k-1} \cdot R_{j,k-1} - R_{j-1,k-1}}{4^{k-1} - 1}\ . \tag{1.51}
$$

Nejpřesnější aproximací řešeného integrálu je pak $R_{j,j}$, kterou lze určit s využitím vztahů (1.48) a (1.51) v cyklu, jak je schématicky naznačeno v algoritmu 1.

Vstup : n, a, b

Výstup: **R**

$$R_{1,1} = (b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

for $j \leftarrow 2, 3, \ldots, n$ **do**

$$h_j = \frac{b-a}{2^{j-1}}$$

$$R_{j,1} = \frac{1}{2} \cdot R_{j-1,1} + h_j \cdot \sum_{i=1}^{2^{j-2}} f(a + (2 \cdot i - 1) \cdot h_j)$$

for $k \leftarrow 2, 3, \ldots, j$ **do**

$$R_{j,k} = \frac{4^{k-1} \cdot R_{j,k-1} - R_{j-1,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

end

end

Algoritmus 1: Algoritmus Rombergovy metody numerické integrace

Příklad 1.15. Pomocí Rombergovy metody numerické integrace vypočtěte aproximaci integrálu:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.52}$$

pro dělení $n = 3$. Výslednou aproximaci porovnejte s výsledkem přesného analytického řešení.

Obsah
32. strana ze 44
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Řešení. Výpočet integrálu Rombergovou metodou lze v programu Matlab naprogramovat např. následujícím způsobem:

```
function r=romberg(f,a,b,n)
h=(b-a)./(2.^(0:n-1));
r(1,1)=(b-a)*(f(a)+f(b))/2;
for j=2:n
  s=0;
  for i=1:2^(j-2)
    s=s+f(a+(2*i-1)*h(j));
  end
  r(j,1)=r(j-1,1)/2+h(j)*s;
  for k=2:j
    r(j,k)=(4^(k-1)*r(j,k-1)-r(j-1,k-1))/(4^(k-1)-1);
  end
end
```

Výsledek pro $n = 3$ pak nabývá hodnot:

```
int =
   0.346573590279973                   0                   0
   0.376019349194069   0.385834602165434                   0
   0.383699509409442   0.386259562814567   0.386287893524509

Odchylka od přesného řešení = 6.467595e-006
```

▲

1.5. Adaptivní integrace

Adaptivní metoda numerické integrace se oproti předchozím způsobům numerického integrování liší nerovnoměrným dělením intervalu integrace $\langle a; b\rangle$. V místech, kde je integrovaná funkce dostatečně hladká a mění se pomalu, lze použít dělení intervalů hrubší. Naopak, v místech, kde se integrovaná funkce mění výrazně je vhodné použít jemnější dělení intervalů.

Metoda vychází z úpravy lichoběžníkové nebo Simpsonovy metody. V případě metody lichoběžníkové lze napsat:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_{a,b} - h^3 \cdot \frac{f''(c_0)}{12}\,, \tag{1.53}$$

kde $h = b-a$ a $a < c_0 < b$. Pokud se bod c_0 zvolí v polovině intervalu $\langle a; b\rangle$, lze vztah (1.53) upravit:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_{a,c} - \frac{h^3}{8}\cdot\frac{f''(c_1)}{12} + S_{c,b} - \frac{h^3}{8}\cdot\frac{f''(c_2)}{12} = \\ = S_{a,c} + S_{c,b} - \frac{h^3}{4}\cdot\frac{f''(c_3)}{12}\,, \end{aligned}\tag{1.54}$$

Rozdílem vztahů (1.54) od (1.53) je možno získat odhad chyby dané výpočetní operace:

$$S_{a,b} - (S_{a,c} + S_{c,b}) = h^3\cdot\frac{f''(c_0)}{12} - \frac{h^3}{4}\cdot\frac{f''(c_3)}{12} \approx \frac{3}{4}\cdot h^3\cdot\frac{f''(c_3)}{12}\,, \tag{1.55}$$

která je zhruba trojnásobná, než nepřesnost výpočtu výrazu (1.53). Při zadání požadované tolerance nepřesnosti numerické integrace ε je pak možno zakončovací podmínku definovat:

$$S_{a,b} - (S_{a,c} + S_{c,b}) < 3 \cdot \varepsilon \; . \tag{1.56}$$

Při nesplnění kritéria zakončovací podmínky se provede dělení obou intervalů půlením. Na každé rozdělené části se pak zakončovací podmínka vyhodnocuje samostatně, což vede k nerovnoměrnému rozdělení integrovaného intervalu $\langle a; b\rangle$ na úseky se stejnou nepřesností.

Příklad 1.16. Stanovte aproximace integrálu:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.57}$$

s využitím adaptivní metody numerické integrace, vycházející z lichoběžníkové metody, pro požadovanou toleranci nepřesnosti $1 \cdot 10^{-6}$. Obě vypočtené aproximace porovnejte s výsledkem přesného analytického řešení.

Řešení. Výpočet integrálu adaptivní metodou, vycházející z lichoběžníkového pravidla, lze v programovém systému MATLAB provést např. následující m-funkcí:

```
function s=adap_int(f,a0,b0,tol0)
s=0;
n=1;
a(1)=a0;
b(1)=b0;
tol(1)=tol0;
S(1)=lich(f,a,b);
```

```
while n>0
  c=(a(n)+b(n))/2;
  oldS=S(n);
  S(n)=lich(f,a(n),c);
  S(n+1)=lich(f,c,b(n));
  if abs(oldS-(S(n)+S(n+1)))<3*tol(n)
     s=s+S(n)+S(n+1);
     n=n-1;
  else
     b(n+1)=b(n);
     b(n)=c;
     a(n+1)=c;
     tol(n)=tol(n)/2;
     tol(n+1)=tol(n);
     n=n+1;
  end
end
```

kde funkce `lich` aplikuje lichoběžníkové pravidlo:

```
function s=lich(f,a,b)
s=(f(a)+f(b))*(b-a)/2;
```

Po zadání požadované tolerance nepřesnosti řešení $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-6}$ bude výsledek integrálu:

```
int =
   0.386293831301211

Odchylka od přesného řešení = 5.298187e-007
```

Práci algoritmu lze demonstrovat výpisem jednotlivých subintervalů řešeného integrálu. Při zadání požadované tolerance nepřesnosti $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ se původní interval $\langle a; b\rangle$ rozdělí na deset subintervalů s různou šířkou, na nichž se aplikuje lichoběžníková metoda (subintervaly jsou zobrazeny ve smyslu činnosti výpočetního algoritmu, tedy v opačném pořadí):

```
   i    ai       bi       hi
------------------------------
   1  1.8750  2.0000  0.125000
   2  1.7500  1.8750  0.125000
   3  1.6250  1.7500  0.125000
   4  1.5000  1.6250  0.125000
   5  1.3750  1.5000  0.125000
   6  1.2500  1.3750  0.125000
   7  1.1875  1.2500  0.062500
   8  1.1250  1.1875  0.062500
   9  1.0625  1.1250  0.062500
  10  1.0000  1.0625  0.062500
```

Poznámka 1.17. Výpočetní algoritmus adaptivní metody numerické integrace lze upravit, aby řešení vycházelo ze Simpsonovy metody integrace (např. [1]).

1.6. Gaussova metoda

Gaussova metoda numerické integrace (Gaussova kvadratura) vychází ze vztahu:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f(x_i)\,, \tag{1.58}$$

kde koeficienty c_i i kořeny x_i pro $n = 1, 2, \ldots, 5$ integračních bodů jsou uvedeny v tabulce 1.1 a 1.2.

Při řešení integrálu s obecně zadanými mezemi $\langle a; b\rangle$ je nutno integrál (1.58) transformovat:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)\cdot t + b + a}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}\,\mathrm{d}t \approx$$
$$\approx \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f\left(\frac{(b-a)\cdot t_i + b + a}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}\,, \tag{1.59}$$

kde t je výsledek substituce

$$t = \frac{2\cdot x - a - b}{b-a}\,, \tag{1.60}$$

a t_i příslušný kořen x_i Gaussovy kvadratury.

n	x_i	c_i
1	0	2
2	$-\sqrt{\frac{1}{3}} \approx -0,5774$ $\sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0,5774$	1 1
3	$-\sqrt{\frac{3}{5}} \approx -0,7746$ 0 $\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0,7746$	$\frac{5}{9} \approx 0,5556$ $\frac{8}{9} \approx 0,8889$ $\frac{5}{9} \approx 0,5556$
4	$-\sqrt{\frac{15+2\cdot\sqrt{30}}{35}} \approx -0,8611$ $-\sqrt{\frac{15-2\cdot\sqrt{30}}{35}} \approx -0,3400$ $\sqrt{\frac{15-2\cdot\sqrt{30}}{35}} \approx 0,3400$ $\sqrt{\frac{15+2\cdot\sqrt{30}}{35}} \approx 0,8611$	$\frac{90-5\cdot\sqrt{30}}{180} \approx 0,3479$ $\frac{90+5\cdot\sqrt{30}}{180} \approx 0,6521$ $\frac{90+5\cdot\sqrt{30}}{180} \approx 0,6521$ $\frac{90-5\cdot\sqrt{30}}{180} \approx 0,3479$

Tab. 1.1 Kořeny x_i a koeficienty c_i Gaussovy kvadratury pro $n = 1, 2, \ldots, 4$ bodů

n	x_i	c_i
5	$-\sqrt{\dfrac{35+2\cdot\sqrt{70}}{63}} \approx -0,9062$	$\dfrac{322-13\cdot\sqrt{70}}{900} \approx 0,2369$
	$-\sqrt{\dfrac{35-2\cdot\sqrt{70}}{63}} \approx -0,5385$	$\dfrac{322+13\cdot\sqrt{70}}{900} \approx 0,4786$
	0	$\dfrac{128}{225} \approx 0,5689$
	$\sqrt{\dfrac{35-2\cdot\sqrt{70}}{63}} \approx 0,5385$	$\dfrac{322+13\cdot\sqrt{70}}{900} \approx 0,4786$
	$\sqrt{\dfrac{35+2\cdot\sqrt{70}}{63}} \approx 0,9062$	$\dfrac{322-13\cdot\sqrt{70}}{900} \approx 0,2369$

Tab. 1.2 Kořeny x_i a koeficienty c_i Gaussovy kvadratury pro $n = 5$ bodů

Příklad 1.18. Stanovte aproximace integrálu:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.61}$$

s využitím Gaussovy metody numerické integrace postupně pro $n = 1, 2, \ldots, 5$ integračních bodů a určete odchylky těchto aproximací od přesného řešení.

Řešení. M-funkce pro výpočet Gaussovy kvadratury pro počet $n = 1, 2, \ldots, 5$ integračních bodů může nabývat tvaru:

```
function s=gauss_int(f,a,b,n)
if ~((n==1)|(n==2)|(n==3)|(n==4)|(n==5))
  error('Počet intervalů n musí být 1,2,3,4 nebo 5 !')
end;
if ~(a<b)
  error('Meze integrálu musí být a > b !')
end;
if n==1
  x(1)=0; c(1)=2;
end
if n==2
  x(1)=-sqrt(1/3); x(2)=sqrt(1/3); c(1)=1; c(2)=1;
end
if n==3
  x(1)=-sqrt(3/5); x(2)=0; x(3)=sqrt(3/5); c(1)=5/9; c(2)=8/9; c(3)=5/9;
end
if n==4
  x(1)=-sqrt((15+2*sqrt(30))/35); x(2)=-sqrt((15-2*sqrt(30))/35);
  x(3)=sqrt((15-2*sqrt(30))/35);  x(4)=sqrt((15+2*sqrt(30))/35);
  c(1)=(90-5*sqrt(30))/180;  c(2)=(90+5*sqrt(30))/180;
  c(3)=(90+5*sqrt(30))/180;  c(4)=(90-5*sqrt(30))/180;
end
```

```
if n==5
  x(1)=-sqrt((35+2*sqrt(70))/63); x(2)=-sqrt((35-2*sqrt(70))/63);
  x(3)=0;
  x(4)=sqrt((35-2*sqrt(70))/63);  x(5)=sqrt((35+2*sqrt(70))/63);
  c(1)=(322-13*sqrt(70))/900; c(2)=(322+13*sqrt(70))/900;
  c(3)=128/225;
  c(4)=(322+13*sqrt(70))/900; c(5)=(322-13*sqrt(70))/900;
end
s=0;
for i=1:n
  s=s+(f(((b-a)*x(i)+b+a)/2)*(b-a)/2)*c(i);
end
```

Pro porovnání přesnosti řešení při zvyšujícím se počtu integračních bodů $n = 1, 2, \ldots, 5$ pak lze získat následující výsledky:

```
int =
   0.405465108108164

Odchylka od přesného řešení = -1.917075e-002

int =
   0.386594944116741

Odchylka od přesného řešení = -3.005830e-004
```

```
int =
   0.386300421584011

Odchylka od přesného řešení = -6.060464e-006

int =
   0.386294496938714

Odchylka od přesného řešení = -1.358188e-007

int =
   0.386294364348948

Odchylka od přesného řešení = -3.229058e-009
```

Literatura

[1] Olehla, M. — Tišer, J. *Praktické použití Fortranu.* 2. upravené vydání. Nakladatelství dopravy a spojů, Praha, 1979. (432 s). (Citováno na s 38.)