Obyčejné diferenciální rovnice

Obyčejnými diferenciálními rovnicemi (ODR) budeme nazývat rovnice, ve kterých se vyskytují derivace neznámé funkce jedné reálné proměnné.

Příklad. Buď dána funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Nechť $J\subset\mathbb{R}$ je otevřený interval. Pak funkce φ vyhovuje ODR

$$y'(x) = f(x)$$

v každém bodě intervalu J právě tehdy, když φ je primitivní funkcí k funkci f na J.

Řád ODR udává nejvyšší derivace neznámé funkce, která se v rovnici „efektivně" vyskytuje. Například rovnice

$$y'(x) = \sin x, \qquad 0\cdot y''(x) + y'(x) = \cos x$$

jsou ODR 1. řádu, rovnice $y'''(x) + y'(x) = \cos x$ je ODR 3. řádu.

Příklad. Pohyb hmotného bodu po přímce lze popsat podle Newtonova zákona síly vztahem

$$F = m\cdot a$$

(F je působící síla, m je hmotnost bodu, a je jeho zrychlení). Označíme-li čas písmenem t a polohu hmotného bodu v čase t symbolem $y(t)$, pak $a = y''(t)$. Předpokládejme, že hmotnost bodu na čase nezávisí, a že zadaná síla F závisí pouze na čase t, poloze $y(t)$ a rychlosti $y'(t)$ bodu. Potom lze psát

$$my''(t) = F(t, y(t), y'(t))\,.$$

Tato rovnice představuje ODR 2. řádu.

Úmluva. V zadání ODR proměnnou u neznámé funkce a jejich derivací většinou nevypisujeme, předchozí rovnici tak zapíšeme ve tvaru

$$my'' = F(t, y, y').$$

Podobně například nahradíme zápis ODR

$$y'(x) - \sin(x)\,y(x) = \mathrm{e}^x$$

stručnějším tvarem

$$y' - \sin(x)\,y = \mathrm{e}^x\,.$$

Linární diferenciální rovnice 1. řádu. Nechť jsou zadány funkce a, b definované na otevřeném intervalu $J\subset\mathbb{R}$. ODR tvaru

$$y' + a(x)\,y = b(x) \tag{1}$$

nazýváme lineární diferenciální rovnicí 1. řádu.

Je-li speciálně pravá strana v uvedené rovnici nulová, rovnice přechází v rovnici

$$y' + a(x)\,y = 0, \tag{2}$$

kterou nazýváme homogenní lineární diferenciální rovnicí 1. řádu.

Mějme ještě zadána čísla $x_0\in J$, $y_0\in\mathbb{R}$. Podmínku

$$y(x_0) = y_0 \tag{3}$$

budeme nazývat počáteční podmínkou (kladenou na řešení zadané diferenciální rovnice).

Definice. Nechť funkce φ splňuje následující podmínky:

- $D(\varphi) = I$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval,
- pro každé $x \in I$ platí $\varphi'(x) + a(x)\,\varphi(x) = b(x)$.

Pak funkci φ nazýváme řešením rovnice (1) na I. Splňuje-li řešení φ navíc zadanou počáteční podmínku, tj. platí

- $\varphi(x_0) = y_0$,

pak řekneme, že φ je řešením Cauchyovy úlohy (1), (3) na I.

Věta. *Nechť a, b jsou spojité funkce definované na otevřeném intervalu J. Nechť $x_0 \in J$. Pak platí:*

- *Existuje právě jedna funkce φ, která je na J řešením Cauchyovy úlohy (1), (3).*
- *Množina všech řešení rovnice (2) na J tvoří vektorový prostor dimenze 1.*
- *Řešení rovnice (2) na J nemění na J znaménko.*
- *Nechť y_p je řešení rovnice (1) na J. Zvolme libovolně řešení y_h rovnice (2) na J . Pak funkce*
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\,, \quad x \in J$$
je opět řešením rovnice (1) na J.
- *Nechť y_p je nějaké, pevně zvolené řešení rovnice (1) na J. Pak ke každému řešení y rovnice (1) na J existuje právě jedno řešení y_h homogenní lineární diferenciální rovnice (2) na J takové, že pro všechna $x \in J$ platí:*
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\,.$$

Popišme nyní metodu „přenásobení”, která umožňuje řešit zadané lineární diferenciální rovnice.

- Nejprve nalezneme „maximální” interval J, na kterém jsou koeficient a rovnice a pravá strana b rovnice spojitými funkcemi. Je-li zadána počáteční podmínka $y(x_0) = y_0$, ověříme, že $x_0 \in J$.
- Vypočteme $\int a(x)\,\mathrm{d}x$ na J.
- Rovnici (1) přenásobíme kladnou a diferencovatelnou funkcí
$$\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}, \quad x \in J\,:$$
$$y' \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)} + y \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)} \cdot a(x) = \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x} \cdot b(x)\,.$$
Získáme tak diferenciální rovnici, která má zřejmě stejnou množinu všech řešení jako rovnice (1) (hovoříme o ekvivalentních rovnicích). Po využití vzorce pro derivaci součinu na levé straně přenásobené rovnice získáváme na J vztah
$$\left(y \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\right)' = \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x} \cdot b(x)\,.$$
Po integraci obou stran platí
$$y(x) \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} \approx \int \mathrm{e}^{\int a(x)} \cdot b(x)\,\mathrm{d}x\,,\ x \in J,$$
tento vztah lze pomocí použití „integrační konstanty C” zapsat takto:
$$y(x) \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} = \int \mathrm{e}^{\int a(x)} \cdot b(x)\,\mathrm{d}x + C\,,\ x \in J, \quad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Množinu všech řešení naší rovnice na intervalu J pak lze po úpravě popsat vzorcem (nazýváme jej obecným řešením rovnice)

$$y(x) = C \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} + C \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} \cdot \int \mathrm{e}^{\int a(x)} \cdot b(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in J, \quad (C \in \mathbb{R})\,.$$

- Je-li zadána počáteční podmínka $y(x_0) = y_0$, zjistíme dosazením konkrétní hodnotu C a napíšeme příslušné řešení Cauchyovy úlohy.

Příklad. Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$y' - 3x^2 y = 0\,, \quad y(1) = 2\mathrm{e}^3.$$

Řešení. Zřejmě je $a(x) = -3x^2$, $b(x) = 0$. Funkce daná předpisem $-3x^2$ je spojitá na $J = \mathbb{R}$. Zřejmě platí $\int \left(-3x^2\right) \mathrm{d}x = -x^3$, takže po přenásobení zadané rovnice kladnou a diferencovatelnou funkcí

$$\mathrm{e}^{-x^3}$$

dostáváme ekvivalentní rovnici

$$y' \cdot \mathrm{e}^{-x^3} + y \cdot \left(\mathrm{e}^{-x^3} \cdot \left(-3x^2\right)\right) = 0\,.$$

Po úpravě přechází levá strana v derivaci součinu:

$$\left(y \cdot \mathrm{e}^{-x^3}\right)' = 0,$$

takže po integraci obou stran a přidání „integrační konstanty" C :

$$y(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^3} = C, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Po přenásobení funkcí e^{x^3} získáváme „obecné řešení" zadané rovnice:

$$y(x) = C\mathrm{e}^{x^3}, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Z počáteční podmínky $y(1) = 2\mathrm{e}^3$ (v předchozím vztahu dosadíme číslo $2\mathrm{e}^3$ místo $y(x)$ a číslo 1 za x) získáváme rovnici pro C:

$$2\mathrm{e}^3 = C\mathrm{e}^{1^3} \quad \Longrightarrow \quad C = 2\mathrm{e}^2\,.$$

Nyní jsme již schopni zapsat hledané řešení φ zadané Cauchyovy úlohy:

$$\varphi(x) = 2\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{x^3} = 2\mathrm{e}^{x^3+2}.$$

Ukázka stručného zápisu řešení téhož příkladu (se kterým si vystačíte u zkoušky):

Příklad. Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$y' - 3x^2 y = 0\,, \quad y(1) = 2\mathrm{e}^3\,.$$

Řešení.

$$\begin{gathered}
y' - 3x^2 y = 0 \qquad \Big| \cdot \mathrm{e}^{\int -3x^2 \mathrm{d}x} \\
y'\mathrm{e}^{-x^3} - 3x^2 y\mathrm{e}^{-x^3} = 0 \\
\left(y \cdot \mathrm{e}^{-x^3}\right)' = 0 \\
y \cdot \mathrm{e}^{-x^3} = C, \quad C \in \mathbb{R} \\
\underline{y = C\mathrm{e}^{x^3}, \quad C \in \mathbb{R}} \\
2\mathrm{e}^3 = C\mathrm{e} \quad \Longrightarrow \quad C = 2\mathrm{e}^2 \\
\underline{\underline{\varphi(x) = 2\mathrm{e}^{x^3+2}}}
\end{gathered}$$

Uveďme ještě stručné řešení dalšího příkladu.

Příklad. Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$y' + \frac{1}{x}y = x\,, \quad y(-1) = 2.$$

Řešení. $-1 \in (-\infty, 0) \implies J = (-\infty, 0)$,

$$y' + \frac{1}{x}y = x \qquad \Big| \cdot e^{\int \frac{1}{x}\,dx}, \quad x \in (-\infty, 0) \qquad \left[e^{\ln|x|} = -x, \text{pro } x < 0\right]$$

$$-y'x - y = -x^2, \quad x < 0$$

$$(-yx)' = -x^2, \quad x < 0$$

$$-yx = C - \frac{x^3}{3}, \quad x < 0, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\underline{y = \frac{C}{x} + \frac{x^2}{3}, \quad x \in (-\infty, 0)\,, \quad C \in \mathbb{R}}$$

$$y(-1) = 2 \implies 2 = -C + \frac{1}{3} \implies C = -\frac{5}{3}$$

$$\underline{\underline{\varphi(x) = -\frac{5}{3x} + \frac{x^2}{3}, \quad x \in (-\infty, 0)}}$$

Separovatelné diferenciální rovnice. Nechť jsou zadány funkce h, g. ODR tvaru

$$y' = h(x) \cdot g(y) \tag{4}$$

nazýváme rovnicí se separovatelnými proměnnými. Podobně jako v případě lineární diferenciální rovnice prvního řádu definujeme řešení rovnice (4) na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$ jako takovou funkci φ, $D(\varphi) = J$, která po dosazení změní uvedenou rovnici v rovnost dvou funkcí na J:

$$\varphi'(x) = h(x) \cdot g(\varphi(x))\,, \quad x \in J\,.$$

Platí-li pro řešení φ rovnice (4) na J navíc vztah $\varphi(x_0) = y_0$, tj. splňuje-li uvedené řešení počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0\,, \tag{5}$$

říkáme, že funkce φ je řešením Cauchyovy úlohy (4), (5) na J.

Věta. *Nechť h je spojitá funkce definovaná na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Nechť funkce g má na otevřeném intervalu K spojitou derivaci. Nechť $x_0 \in I$, $\quad y_0 \in K$. Pak existuje otevřený interval $J \subset I$ a právě jedna funkce φ, která je řešením Cauchyovy úlohy (4), (5) na J.*

Řešení separovatelné diferenciální rovnice lze při splnění předpokladů uvedené věty hledat pomocí následující úvahy. Předpokládejme, že funkce y řeší (4) na otevřeném intervalu J, tj. platí:

$$y'(x) = h(x) \cdot g(y(x)), \quad x \in J. \tag{6}$$

Předpokládejme navíc, že pro pro každé $x \in J$ platí $g(y(x)) \neq 0$. Pak obě strany rovnosti můžeme dělit $g(y(x))$:

$$\frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) = h(x)$$

Po následné integraci a použití „integrační konstanty" C pak získáváme vztah

$$\int \frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x)\,\mathrm{d}x = \int h(x)\,\mathrm{d}x + C, \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Na levou stranu předchozího výrazu nyní můžeme použít první substituční metodu s volbou $Y = y(x)$, takže

$$\int \frac{1}{g(Y)}\,\mathrm{d}Y \,\Big|_{Y=y(x)} = \int h(x)\,\mathrm{d}x + C, \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Z posledního vztahu se někdy podaří vyjádřit předpis $y(x)$ pro hledaná řešení. Hodnotu C pak zjišťujeme dosazením počáteční podmínky, podobně jako při řešení lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

Příklad. Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = 2x \cdot y, \qquad y(0) = 2.$$

Řešení. Zadaná rovnice je vlastně lineární homogenní diferenciální rovnicí $y' - 2xy = 0$, o které víme, že její řešení na $\mathbb{R}$ nemění znaménko. Z počáteční podmínky je vidět, že hledáme řešení nabývající pouze kladných hodnot. Můžeme tedy psát

$$\frac{1}{y(x)} y'(x) = 2x,$$

$$\int \frac{1}{y(x)} y'(x)\,\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{d}x + C, \quad (C \in \mathbb{R}),$$

$$\int \frac{\mathrm{d}Y}{Y}\Big|_{Y=y(x)} = x^2 + C, \quad (C \in \mathbb{R}),$$

$$\ln|y(x)| = \ln(y(x)) = x^2 + C, \quad (C \in \mathbb{R}),$$

$$y(x) = \mathrm{e}^{x^2+C} = \mathrm{e}^C \cdot \mathrm{e}^{x^2}, \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Po dosazení počáteční podmínky získáváme

$$\ln 2 = C,$$

takže pro řešení φ zadané Cauchyovy úlohy platí

$$\varphi(x) = 2\mathrm{e}^x.$$

Poznámka. Z řešení předchozího příkladu je patrné, že homogenní linearní diferenciální rovnice můžeme kromě metody „přenásobení" úspěšně řešit rovněž jako rovnice se separovatelnými proměnnými.

Poznámka. Popsaná metoda řešení separovatelných rovnic se často stručně mechanicky popisuje pomocí následných zjednodušujících zápisků (pro derivaci y' je použito značení $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, místo substituce $Y = y(x)$ se použije $y = y(x)$):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = h(x) \cdot g(y),$$

$$\text{pro} \qquad g(y(x)) \neq 0: \qquad \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = h(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int h(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

Poznámka. Možnou existenci čísla $x \in J$, pro něž $g(y(x)) = 0$ lze diskutovat v konkrétních případech - můžeme tak získat další řešení zadané Cauchyovy úlohy. Tím se ovšem na tomto místě nebudeme zabývat (Podle kolegy K. K. člověk nemusí umět všechno).

Příklad. Vypočtěte řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = 2xy^2, \qquad y(0) = \frac{1}{4}.$$

Řešení.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy^2$$

Předpoklad $\forall x \in J: \ y^2(x) \neq 0$.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int 2x\mathrm{d}x + C,$$

$$-\frac{1}{y(x)} = x^2 + C,$$

$$\underline{y(x) = \frac{1}{C - x^2}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

$$y(0) = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{C - 0^2} \quad \Longrightarrow \quad C = 4,$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{4 - x^2}.$$

Zkouška:

$$\forall x \in (-2, 2): \quad \varphi'(x) = -\frac{-2x}{(4 - x^2)^2} = 2x \cdot \left(\frac{1}{4 - x^2}\right)^2 = 2x\varphi^2(x),$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{4}.$$

Výsledek:

$$\underline{\underline{\varphi(x) = \frac{1}{4 - x^2}, \ x \in (-2, 2).}}$$

Poznámka. Věta o existenci a jednoznačnosti řešení pro separovatelné rovnice neobsahuje bližší informaci o intervalu J (na kterém je definováno řešení úlohy) ani o neměnnosti znaménka řešení. Použijeme-li proto mechanicky výše popsaný algoritmus, je nutné přesvědčit se o správnosti nalezeného řešení zkouškou.

Poznámka. Často se rovnice,

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int h(x)\,\mathrm{d}x + C$$

pro řešení $y(x)$ nepodaří vzhledem k této funkci explicitně rozzřešit. V takovém případě jsme alespoň diferenciální rovnici převedli na rovnici bez derivací neznámé funkce. Další informace o řešení nám pak může poskytnout tzv. věta o implicitní funkci.

Příklad. Řešte diferenciální rovnici

$$\left(x^3+1\right)y + x\left(y^2-1\right)y' = 0.$$

Řešení. Jestliže $y(x) \neq 0$, pak

$$\frac{\left(y^2-1\right)}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\left(x^2+\frac{1}{x}\right),$$

takže

$$\int \frac{y^2-1}{y}\mathrm{d}y = -\int\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + C,$$

$$\frac{1}{2}y^2 - \ln|y| = -\frac{1}{3}x^3 - \ln|x| + C,$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{3}x^3 + \ln|x| + \frac{1}{2}y^2 - \ln|y| = C, \quad C \in \mathbb{R}.}}$$