STROMY

Kódování kořenových stromů
Izomorfismus stromů
Hledání minimální kostry.

Strom - souvislý acyklický graf (Definice)

Les - graf jehož komponenty jsou stromy

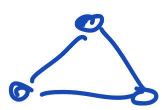
Vlastnosti
- každý strom má alspoň 1 list (kromě K_1) => alespoň 2 listy
- strom s n vrcholy má právě $n-1$ hran.
- mezi každými 2 vrcholy stromu existuje právě jedna cesta.
  (přidáním 1 hrany do stromu vznikne graf s právě 1 cyklem)
- strom je minimální souvislý graf (s daným počtem vrcholů)

Cv. 5.2.1 Kolik neizomorfních lesů existuje na 4 vrcholech

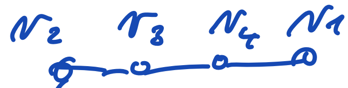
G - Les - komponenty jsou stromy

$|V(G)| = 4$

$|E(G)| \leq 3$

 ← Nesmí patřit do G

$(1,2,2,1)$



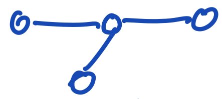
P_4

$G_1 = P_4$ – strom – Les s 1 komponentou

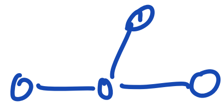
G_3

$K_1 \cup K_1 \cup K_1 \cup K_1$

$G_2 = K_{1,3}$



$(1,1,1,3)$

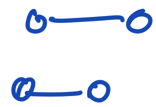


$K_{1,3}$

G_4

$K_2 \cup K_1 \cup K_1$

G_6



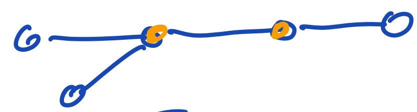
G_5

$K_{1,2} \cup K_1$

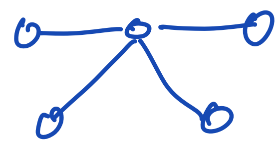
Cv 5.2.2 Kolik neizomorfních stromů existuje na pěti vrcholech.

$G = T \quad |V(T)| = 5 \quad |E(T)| = 4$

$P_5 = G_1$

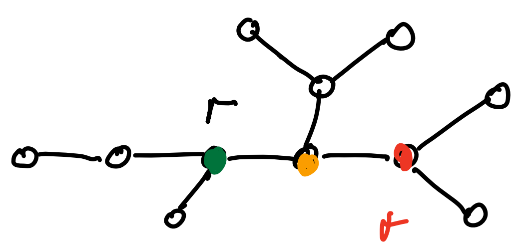


$G_2 = T_2$

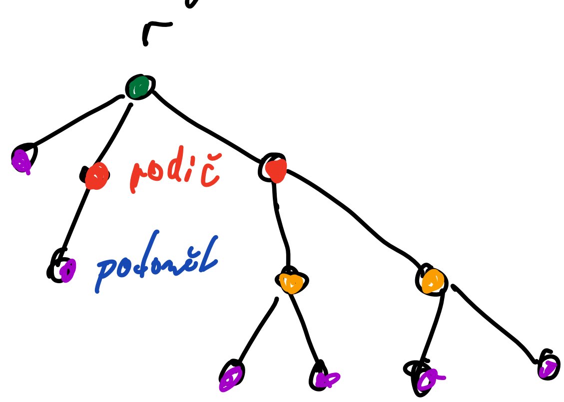


$G_3 = K_{1,4}$

Obecný strom T na 12 vrcholech

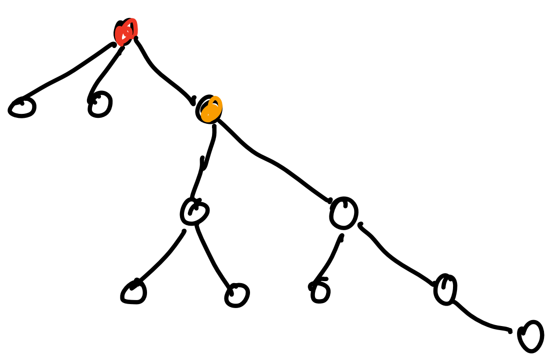


Kořenový strom (T, r)



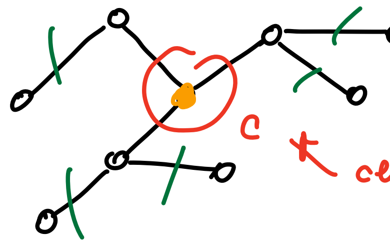
rodič
potomek
sourozenci
koncové vrcholy

(T, r_2)



Cv 5.2.3 Najděte centrum násl. stromů.

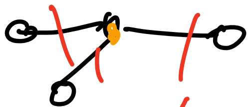
T_1



c

centrum strom T_1

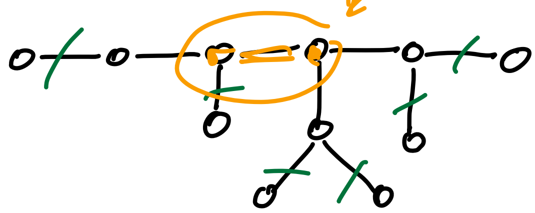
1. krok odst. konc. vrcholy



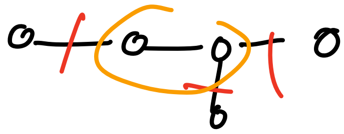
2 krok odstr. konc vrcholy

T_2

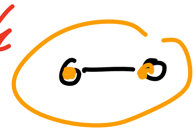
centrum.



1. krok

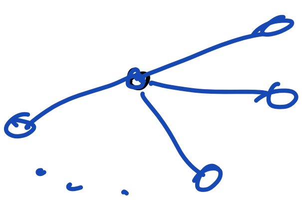


2. krok



Cv 5.2.6 Strom T se 17 vrcholy

a) kolik nejméně je potřeba kroků (kdy odstraňujeme listy) abychom určili centrum?



$K_{1,16}$

1 krok k nalezení centra

b) kolik nejvíce je potřeba kroků k nalezení centra.

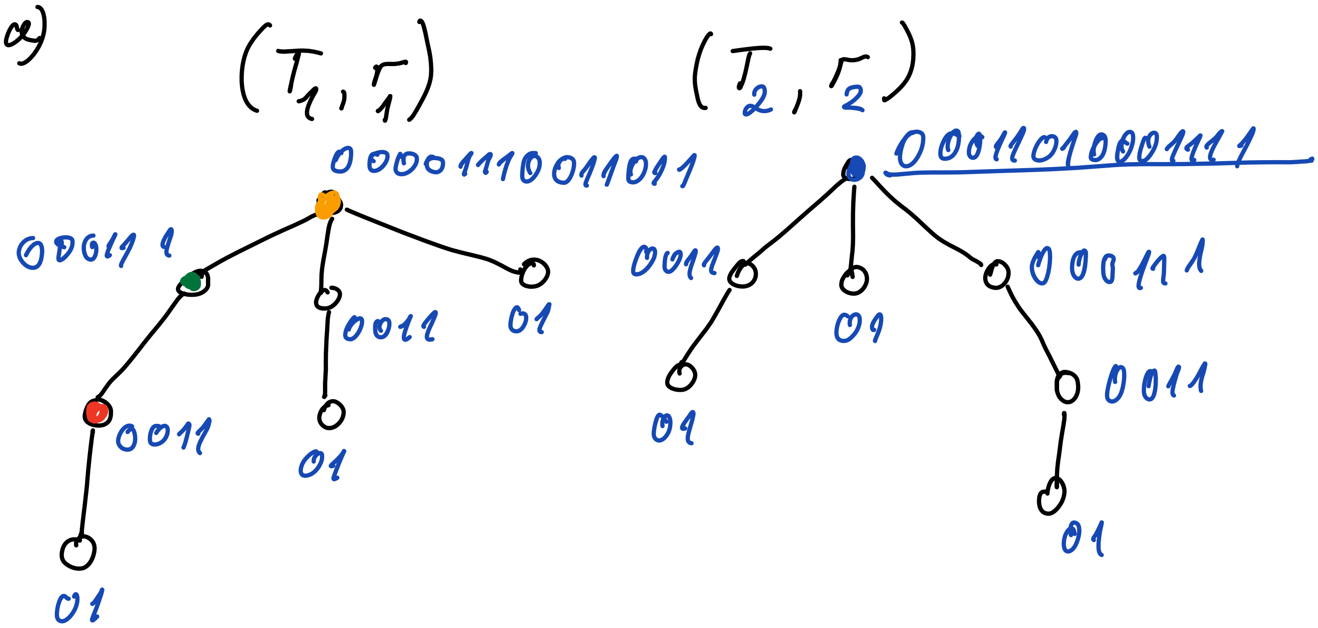
P_{17}

každý strom alespoň 2 konc. vrcholy.

Počet kroků $\frac{17-1}{2} = \underline{\underline{8}}$

Př: Zapište kód uspořádaného kořenového stromu

a)



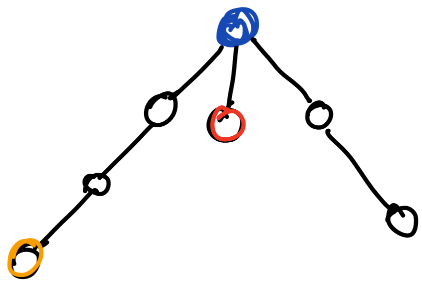
T_1 a T_2 jsou stejné stromy

(T_1, r_1) a (T_2, r_2) jsou stejné kořenové stromy
(mají stejné minimální kódy)
min. kód – viz dále

(T_1, r_1) a (T_2, r_2) jsou různé uspořádané kořenové stromy.

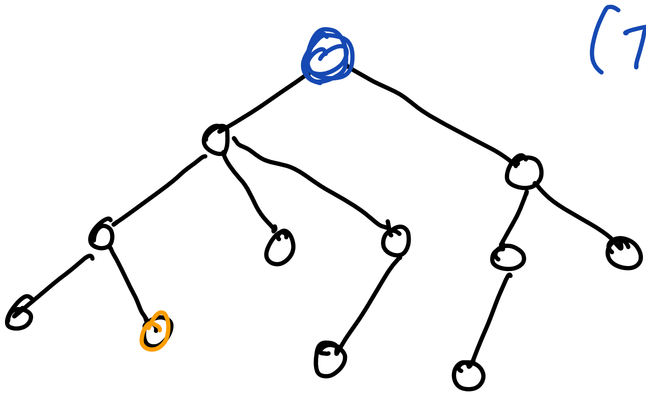
Př: Nakreslete uspořádaný (pěstovaný) strom daný kódem.

a) 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1



b) 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1

(T, r)



Minimální kód kořenového stromu.

(Minimální kód se nemění při přepisování kořenového stromu. Je přiřazen kořenovému stromu jednoznačně. změní se při jiné volbě kořene)

Př: Uspořádejte dané binární řetězce lexikograficky.

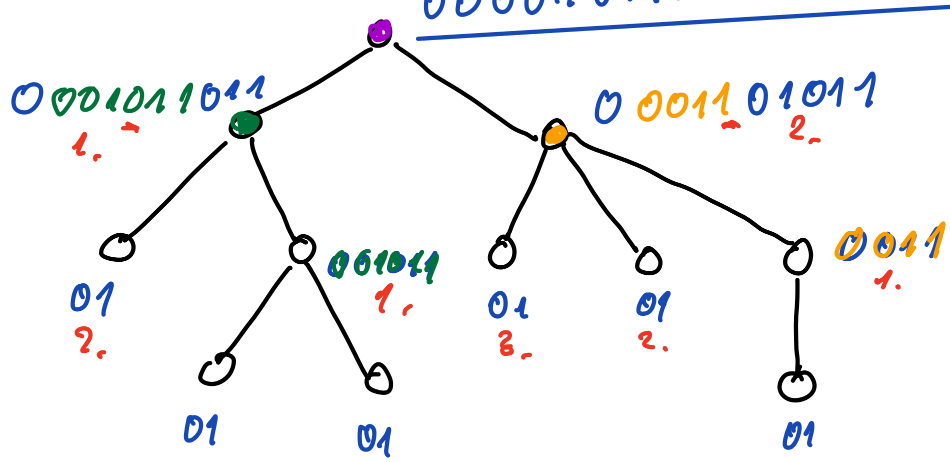
Neuspořádané	Uspořádané lexikograficky
1. 0100100	1. 5. 00101
2. 001101	2. 2. 001101
3. 0100000	3. 4. 01
4. 01	4. 3. 0100000
5. 00101	5. 1. 0100100

V lexikografickém uspořádání je 0 před 1.
podobně jako A před B

Př: Najděte minimální kód daného kořen. stromu.

(T, r)

0000101101100011010111 Min kód.



Př: Je daný kód platným kódem nějakého kořenového stromu? Pokud ano, je minimální?

a) 000010110100111000110111 $\quad$ 12× 0 a 11× 1 ⇒ není platný kód.

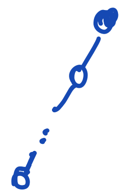
b) 000010110110011100011011 $\quad$ Není platný

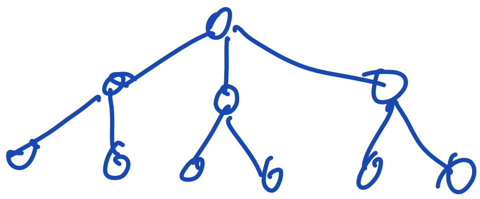
nový strom

c) 000000000111111111. ← Cesta P_9

ANO

d) 0001011100101110010111





Je platný a je minimální

e) $\underbrace{00010111}_{2.}\overbrace{0011}^{3.}\underbrace{001010111}_{1.}$ $\quad$ Je platný.

Není minimální.

Izomorfismus obecných stromů

Algoritmus k určení zda jsou stromy izomorfní.

stromy T_1, T_2 $\qquad T_1 \cong T_2$?

1.) Porovnat počty vrcholů $|V(T_1)| = |V(T_2)|$? !

2.) Určit centra stromů C_1, C_2

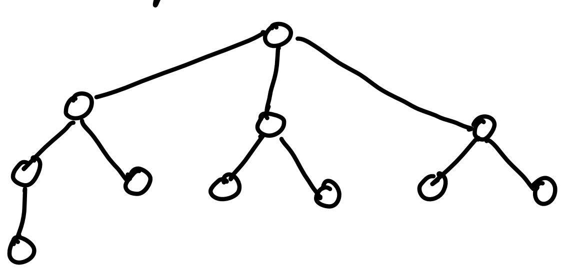
3.) Určit minimální kódy kořenových stromů (T_1, C_1) a (T_2, C_2)

4.) Porovnat minimální kody

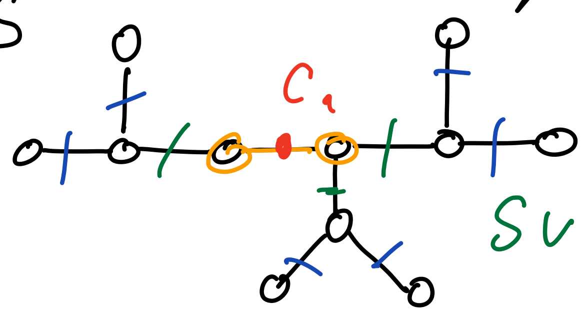
Jestliže min. kód (T_1, c_1) = min. kód (T_2, c_2) $\Rightarrow$ $T_1 \cong T_2$ stromy jsou izomorfní.

Př: Rozhodněte zda stromy jsou (nejsou) izomorfní

T

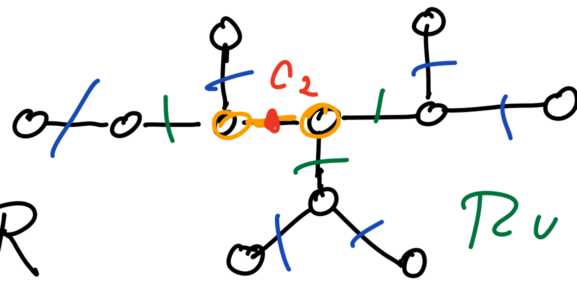


S



$S \cup c_1 = T_1$

R



$R \cup c_2 = T_2$

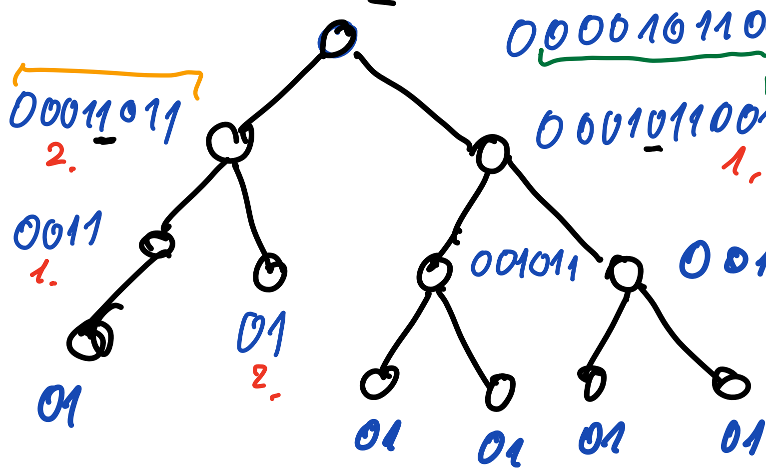
$S \not\cong R$?

1.) $|V(S)| = |V(R)| = 11$

2.) Určíme centrum (T_1, c_1), (T_2, c_2) $\quad |V(T_i)| = 12$

3.) Najdeme min. kódy kořenových stromů (T_1, c_1), (T_2, c_2)

c_2



$0\underbrace{0001011001011 1}\overbrace{00011011}1$

$\downarrow$

0001011001011 1

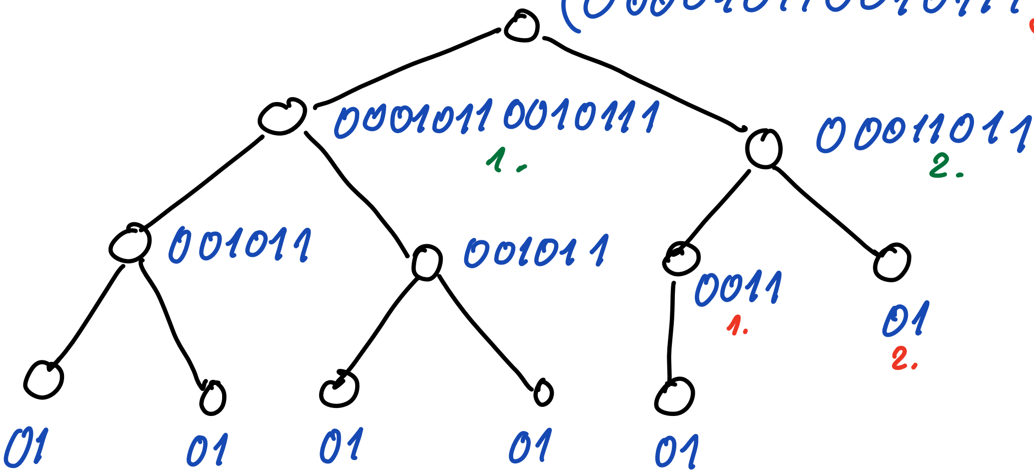
1.

$(T_1, c_1) \sim R$

Protože min. kód $(T_2, c_2) \neq (T_1, c_1) \Rightarrow S \not\cong R$

(R, c)

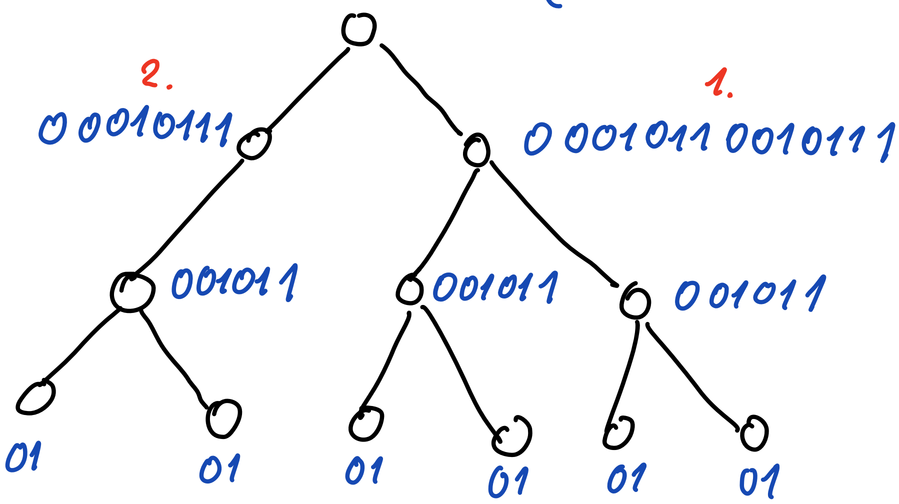
Min. kód. $(0\,0001011\,0010111\,\underbrace{00011011}_{2}\,1)$



Różne

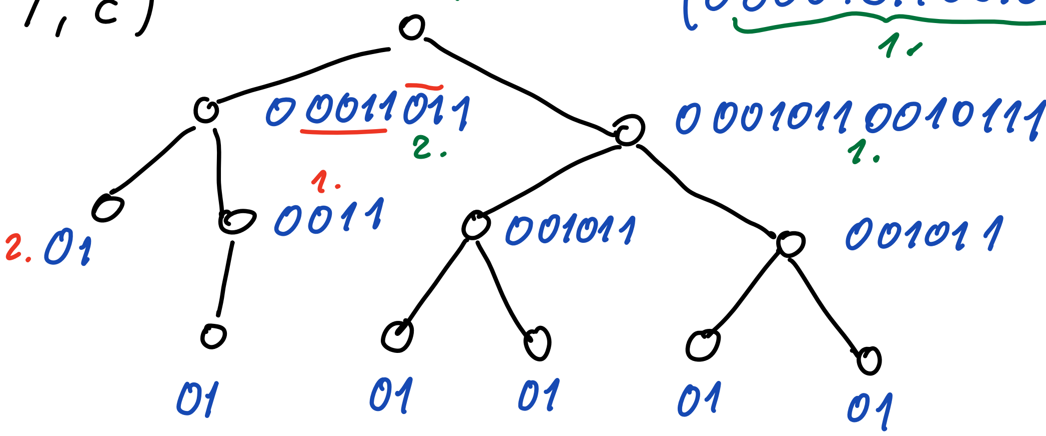
(S, c)

Min. kód $(0\,\overbrace{0001011\,0010111}^{1}\,\underbrace{00010111}_{2}\,1)$



(T, c)

Min. kód. $(0\,\underbrace{0001011\,0010111}_{1.}\,\overbrace{00011011}^{2.}\,1)$



Kostra grafu

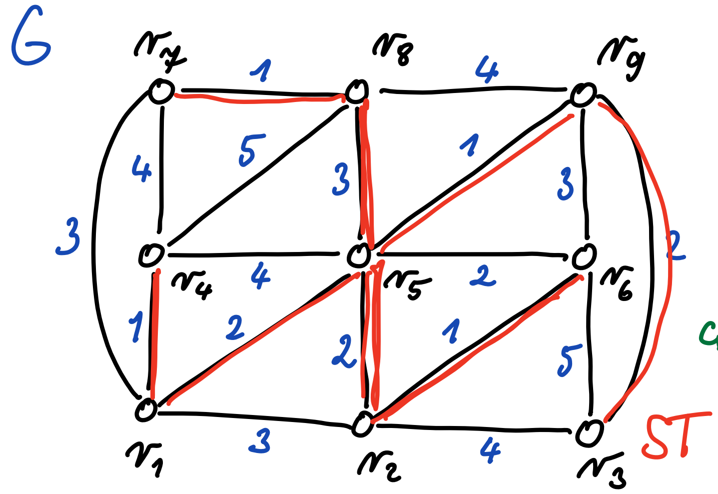
Def. Faktor který je stromem.
(factor = podgraf, který obsahuje všechny vrcholy grafu)

Algoritmy k nalezení minimální kostry

$$MST = \min_{\text{kostra } T \subseteq G} \Big(\sum_{e \in E(T)} w(e) \Big)$$

- Hladový alg. (Kruskalův)
- Jarníkův (Primův)

Př: Najděte minimální kostru daného ohodnoceného grafu a) Hladovým algoritmem
b) Jarníkovým algoritmem



ohodnocení hran
$w: E(G) \to \mathbb{R}_0^+$
poč. hran
$m = |E(G)| = 18$

$|V(G)| = 9$
$|E(ST)| = 8$

a) Hladový alg:

$E(T) = \{ \overset{1}{v_1v_4}, \overset{1}{v_2v_6}, \overset{1}{v_5v_9}, \overset{1}{v_7v_8}, \overset{2}{v_1v_5}, \overset{2}{v_2v_5}, \overset{2}{v_3v_9}, \overset{3}{v_5v_8} \}$

$w(e) = 1$: $\cancel{v_1v_4}$, $\cancel{v_2v_6}$, $\cancel{v_5v_9}$, $\cancel{v_7v_8}$

$w(e) = 2$: $\cancel{v_1v_5}$, $\cancel{v_2v_5}$, $\cancel{v_5v_6}$, $\cancel{v_3v_9}$

$w(e) = 3$: $\cancel{v_1v_2}$, $\cancel{v_6v_9}$, $\cancel{v_5v_8}$, v_1v_7

$w(e) = 4$: v_4v_5, v_2v_3, v_8v_9, v_4v_7

$w(e) = 5$: v_3v_6, v_4v_8

$MST \ \sum w(e) = 1+1+1+1+2+2+2+3 = 13$

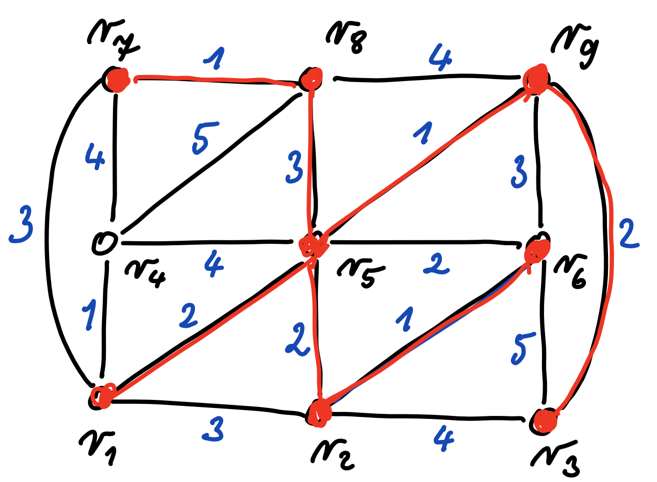
1.) Seřadíme hrany grafu podle ohodnocení vzestupně.

2.) Začneme sest. kostru. Nejprve $|E(T)| = \emptyset$

3.) Pro $i = 1, 2, \dots, m$ vezmeme hranu e_i a přidáme do kostry. Hranu ponecháme nevznikne-li cyklus, jinak hranu zahodíme.

4.) Po zprac. všech hran je T min. kostrou. (Algoritmus lze ukončit jakmile T obsahuje $n-1$ hran)

b) Jarníkův algoritmus



$$E(T) = \{ \overset{1}{v_7 v_8},\ \overset{3}{v_8 v_5},\ \overset{1}{v_9 v_5},\ \overset{2}{v_9 v_3},\ \overset{2}{v_2 v_5},\ \overset{1}{v_2 v_6},\ \overset{2}{v_1 v_5},\ \overset{1}{v_1 v_4} \}$$

$$w(T) = 1 + 3 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 1 = \underline{\underline{13}}$$

Graf G s $|V(G)| = n$ a nezáporným ohodnocením hran w.

- začneme sestavovat kostru z libovolného vrcholu
- v každém kroku připojíme nový vrchol hranou s nejmenším ohodnocením, která vede z již zahrnuté množiny vrcholů.
- Zkončíme po přidání $n-1$ hran do T. (Všechny vrcholy jsou připojeny)

Při připojování nového vrcholu není třeba testovat vznik cyklu. Algoritmus je rychlejší! než Hladový alg.