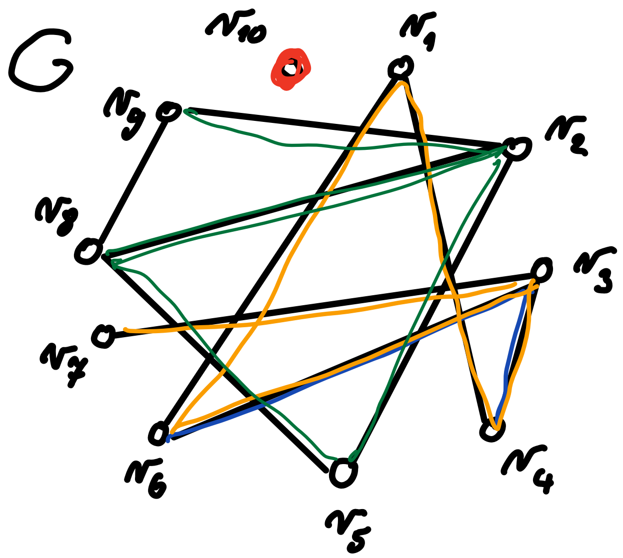
Souvislost grafů.

Př: Kolik komponent má graf G?

a) Uveďte příklad cesty v grafu G.

b) Uveďte příklad tahu který není cestou.

c) Uveďte příklad sledu, který není tahem.



G má 3 komponenty

Cesta $P(N_4 N_6) = N_6, N_6N_3, N_3, N_3N_4, N_4$

Tah $T(N_7, N_3) = N_7, N_7N_3, N_3, N_3N_4, N_4,$
$N_4N_1, N_1, N_1N_6, N_6, N_6N_3, N_3$

Sled $S(N_8, N_5) = N_8, N_8N_2, N_2, N_2N_8, N_8 \ldots$

$\ldots$

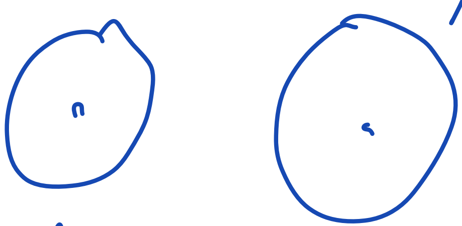
$H_1 - V(H_1) = \{N_{10}\}$

$H_2 - V(H_2) = \{N_1, N_3, N_4, N_6, N_7\}$

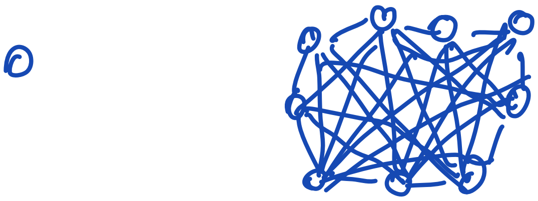
$H_3 - V(H_3) = \{N_2, N_5, N_8, N_9\}$

Př: Kolik nejvýše hran může mít graf na 10 vrcholech, který má dvě komponenty?
(aby mohl zůstat nesouvislý)

H_1 H_2



K_{k_1} K_{k_2}



$k_2 = 10 - k_1$

$G = H_1 \cup H_2$ $\quad k_1 + k_2 = 10$

$k_1 = 10 - k_2$

$|V(G)| = 10$

$$|E(G)| = |E(K_{k_1} \cup K_{k_2})| = \frac{k_1(k_1-1)}{2} + \frac{k_2(k_2-1)}{2} = \frac{k_1(k_1-1)}{2} + \frac{(10-k_1)(9-k_1)}{2}$$

$H_1 = K_1 \quad H_2 = K_9 \Rightarrow |E(G)| = |E(K_1 \cup K_9)| = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$

$G = K_2 \cup K_8$, $\quad K_2 = H_1$, $K_8 = H_2$

Nejvýše může daný graf mít 36 hran. A to když $H_1 = K_1$ a $H_2 = K_9$

$$|E(G)| = |E(K_2 \cup K_8)| = 1 + \frac{8 \cdot 7}{2} = 1 + 28 = 29$$

$\vdots$

$$G = K_5 \cup K_5 = E(G) = \frac{4 \cdot 5}{2} + \frac{4 \cdot 5}{2} = 20$$

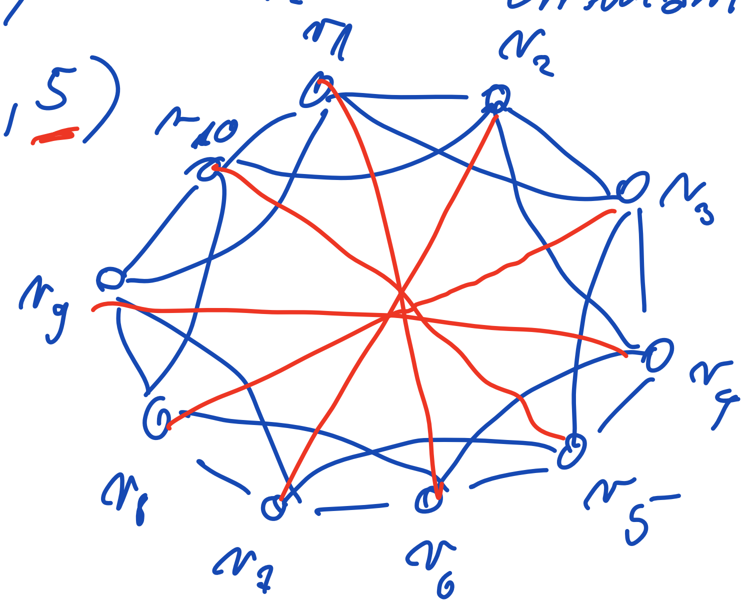
Př: Kolik komponent ~~má~~ (může mít) graf s 10 vrcholy stupně 5.

1.) Souvislý – 1 komponenta.

$K_{5,5}$, $C_{10}(1,2,5)$

Příklady grafů s danými parametry

Cirkulant



2.) Nesouvislý – právě 2 komponenty? NE

Pro stupeň 5 je třeba 6 vrcholů.

Tj. nejmenší komponenta musí mít alespoň 6 vrcholů. Na zbylých 4 vrcholech nelze mít stupeň 5.

Daný graf je vždy souvislý.

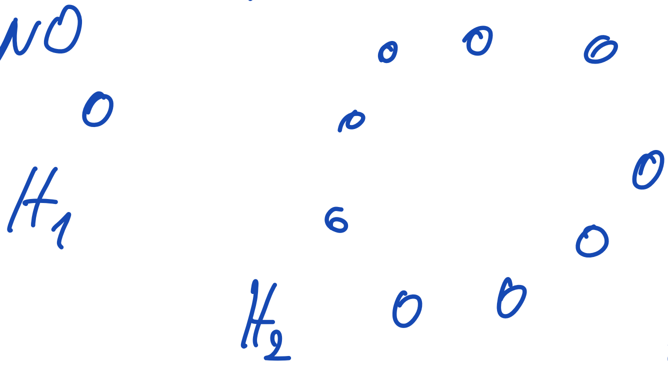
Př: Kolik komponent má graf s 10 vrcholy a 25 hranami.

① Souvislý – právě 1 komponenta

ANO $K_{5,5}$ ← Například

② Nesouvislý – právě 2 komponenty.

ANO



$|V(H_2)| = 9$

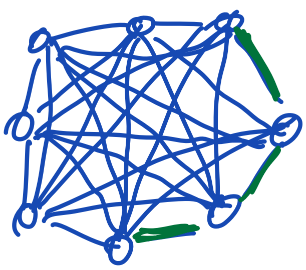
$H_2 = K_9 \setminus C_9 \setminus P_2$

z K_9 odebereme 11 hran tak aby výsl. graf byl souvislý.

③ Nesouvislý – právě 3 komponenty

H_1 H_2 H_3

K_1 K_1



$|V(H_3)| = 8$

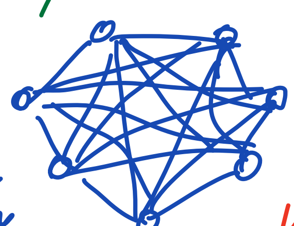
$|E(H_3)| = 25$

z K_8 odebereme 3 hrany $H_3 = K_8 \setminus P_4$

④ Nesouvislý – právě 4 komponenty NE

H_1 H_2 H_3 H_4

K_1 K_1 K_1



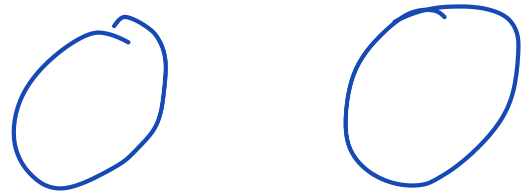
K_7

Na 7 vrcholů komponenty H_4 nelze umístit více než 21 hran.

$|E(K_7)| = 21$

V grafu s 10 vrcholy a 4 komponentami nemůže být 25 hran.

Př: Kolik nejméně hran může mít graf na 10 vrcholech, který má 2 komponenty?



$|E(G)|$ ← minimální.

H_1 $|V(H_1)| k_1$ H_2 $|V(H_2)| = k_2$ $k_1 + k_2 = 10$

Obě komponenty musí být <u>stromy</u>

Strom je minimální (vzhledem k počtu hran) graf souvislý na daném počtu vrcholů.

Vlastnosti stromu – souvislý, acyklický

$$|E(G)| = |E(H_1 \cup H_2)| = k_1 - 1 + k_2 - 1 =$$

$$= k_1 + k_2 - 2 = 10 - 2 = \underline{\underline{8}}$$

Výsledný min. počet hran je 8. Při menším počtu hran by již graf musel mít více komponent než 2.

Př: Kolik nejméně hran má graf G, $|V(G)| = n$ na n vrcholech, který má k komponent?

Komponenty grafu G jsou stromy.

G je Les. $H_1 \dots H_k$ komponenty $|V(H_i)| = n_i$

$$|E(G)| = \sum_{i=1}^{k} |E(H_i)| = \underbrace{n_1 + n_2 \cdots n_k}_{n} \underbrace{-1 - 1 \cdots -1}_{k} =$$

$$= \underline{\underline{n - k}}$$

Vyšší stupně souvislosti

Definice: Hranová souvislost $\kappa'(G)$ - stupeň hr. s.

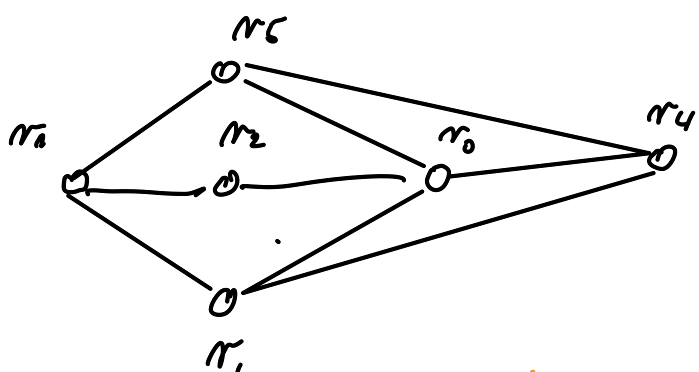
Graf G je hranově k-souvislý, pokud $k \geq 1$ a po odebrání libovolných $k-1$ hran z G zůstane výsledný faktor souvislý.
Stupeň hranové souvislosti grafu G je takové největší číslo k, že graf G je hranově k-souvislý. Označujeme jej $\kappa'(G)$.

Definice: Vrcholová souvislost $\kappa(G)$ - stupeň vr. s.

Graf G je vrcholově k-souvislý, pokud $|V(G)| > k \geq 1$ a po odebrání libovolných $k-1$ vrcholů z grafu G zůstane výsledný indukovaný podgraf souvislý.
Stupeň vrcholové souvislosti grafu G je takové největší číslo k, že graf G je vrcholově k-souvislý. Označujeme jej $\kappa(G)$.

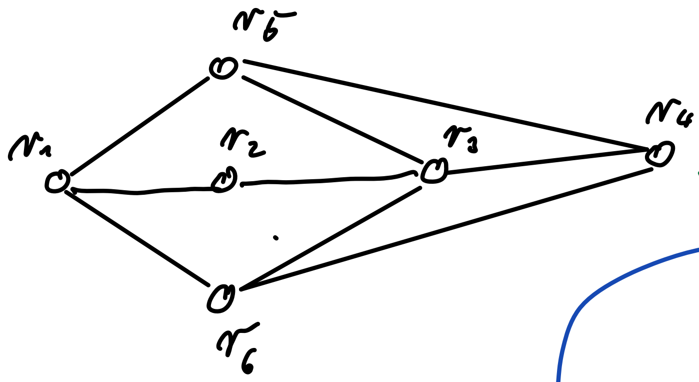
! Platí: $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$!

Př: Jaká je vrcholová (hranová) souvislost daného grafu? Jaký je vrcholový (hranový) stupeň souvislosti?



- Je G hranově 1 souvislý?
  ANO Odstraněním 0 hran nedost. nesouvislý graf.
- Je G hranově 2 souvislý?
  ANO - odstraněním 1 lib. hrany nedost. nesouvislý gr.
- Je G hranově 3 souvislý?
  NE - odstraněním dvou hran vznikne nesouvislý graf
  v_1v_2, v_2v_3

Stupeň hranové souvislosti
$\kappa'(G)$ - největší hranová souvislost
$\kappa'(G) = 2$



- Je G vrcholově 1 souvislý?
  ANO – je souvislý
- Je G vrcholově 2 souvislý?
  ANO – po vynechání 1 lib. vrcholu zůstane souvislý indukovaný podgraf.
- Je G vrcholově 3 souvislý?
  NE Po odstranění vrcholů v_1 a v_3 zůstane nesouvislý indukovaný podgraf.

Stupeň vrcholové souvislosti

$\kappa(G) = 2$

MAX - hranová souvislost

Př (2.4.7) Kolik nejméně hran může mít (vrcholově) 3-souvislý graf na n vrcholech.

Věta z přednášky.

Platí

a) $n = 6$

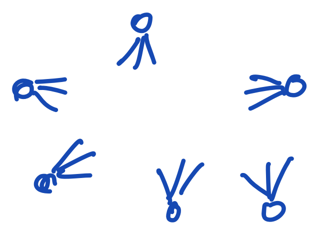
$$3 \le \kappa(G) \le \kappa'(G) \le \delta(G)$$

princ. sudosti

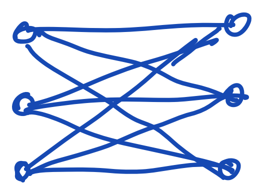
$$2|E(G)| = \sum \deg(v_i) \ge 3 \cdot 6$$

$$|E(G)| \ge \frac{3 \cdot 6}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$|E(G)| \ge 9$$



$K_{3,3}$



je souvislý =>
je vrcholově 1-souvislý
odstr. 1 vrcholu neporušíme souv.
je vrcholově 2-souvislý
odstr. 2 vrcholů — " —
je vrcholově 3-souvislý

$\kappa(G) = 3$

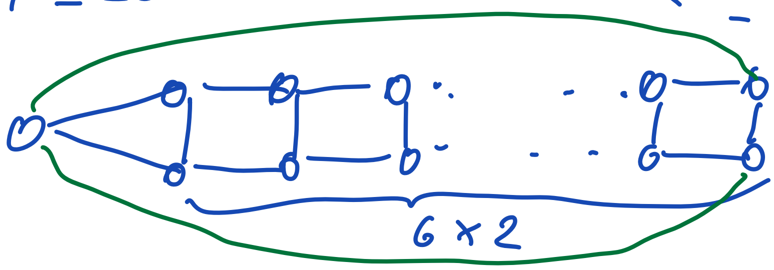
b) Třeba pro jiné n

pro n-liché $n = 13$

$$3 = \kappa(G) \le \kappa'(G) \le \delta(G)$$

$$|E(G)| = \sum \deg(v_i) \ge \frac{3 \cdot 13}{2} = \frac{39}{2} = 19{,}5$$

$$|E(G)| \ge 20$$



$|E(G)| = 20$

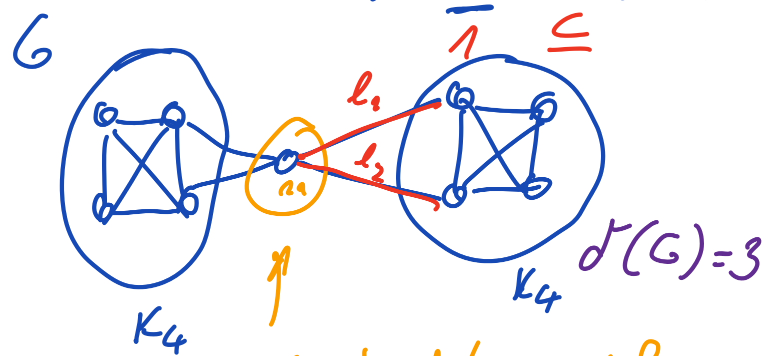
$\kappa(G) = 3$

Př: Navrhněte graf, kde každý vrchol je stupně alespoň 3 a stupeň vrcholové souvislosti je 1 a hranové souvislosti 2.

! užitečný příklad !

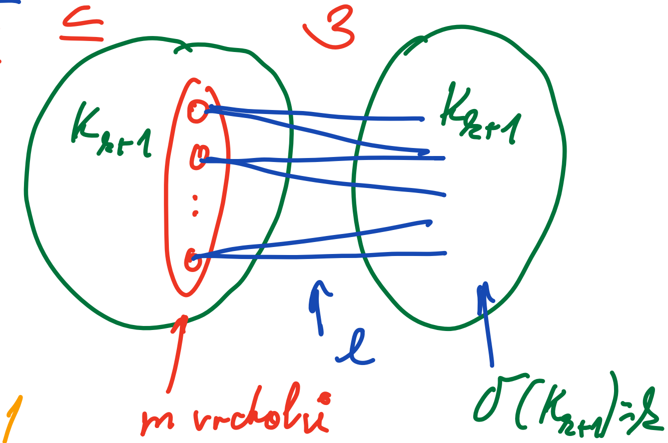
lze najít graf takový že

$$\underset{1}{\kappa(G) = m} \le \underset{2}{\kappa'(G) = l} \le \underset{3}{\delta(G) = k}$$



stačí odstr. vrchol v_1 - k porušení souv. $\Rightarrow \kappa(G) = 1$

Stačí odst. e_1, e_2 k poruš. souv. $\Rightarrow \kappa'(G) = 2$



Pozn. Mengerovy věty (z přednášky naučit k čemu slouží)

$\kappa(G) = k \iff \exists\, k$ vrcholově disjunktních cest

$\kappa'(G) = l \iff \exists\, l$ hranově — " —