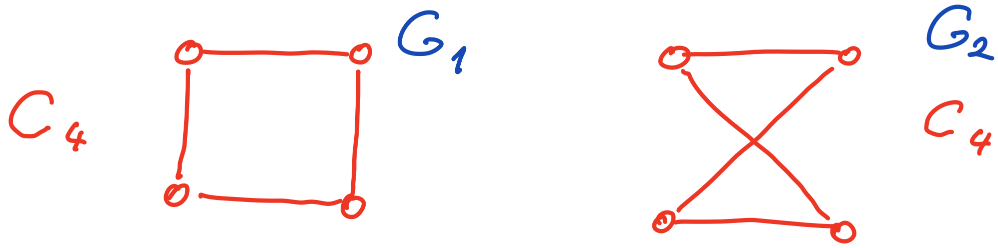
Izomorfismus grafů

Jsou grafy stejné?

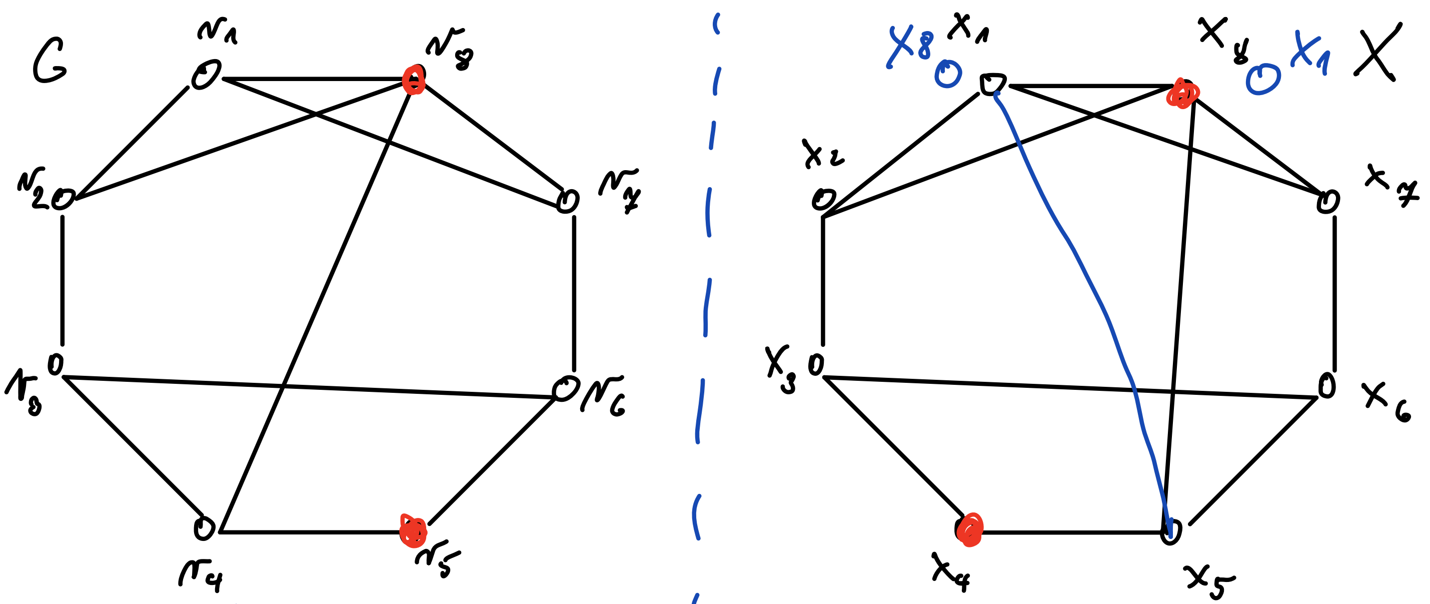


Dvě různá nakreslení téhož grafu, neboli G_1 je izomorfní s G_2.

Zapisujeme $G_1 \cong G_2$

Př 1.)

Jsou grafy G a X izomorfní?



$$\underbrace{f}_{\text{Izomorfismus}} : V(G) \to V(X) \ \& \ v_i v_j \in E(G) \Leftrightarrow f(v_i) f(v_j) \in E(X)$$

$f(v_1) = X_1$ $\quad f(v_4) = X_5$ $\quad f(v_7) = X_2$

$f(v_2) = X_7$ $\quad f(v_5) = X_4$ $\quad f(v_8) = X_8$

$f(v_3) = X_6$ $\quad f(v_6) = X_3$

Našli jsme izomorfismus – jsou izomorfní

Grafy jsou izomorfní $\Leftrightarrow$ existuje zobrazení

$f: V(G) \to V(X)$ takové, že platí

$$\underbrace{v_i v_j \in E(G) \Leftrightarrow f(v_i) f(v_j) \in E(X)}_{\text{zachovává sousednost}}$$

Izomorfismus také zachovává další znaky: (Invarianty)

$|V(G)| = |V(X)| = 8$

$|E(G)| = |E(X)| = 12$

$\Delta(G) = 4 = \Delta(X)$,

$\delta(G) = 2 = \delta(X)$

stupňová posloupnost

$(4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2)$

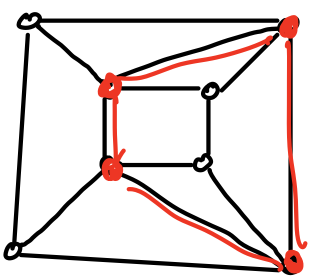
- stejné podgrafy (indukované podgrafy na spec. mn. vrcholů)
- stupně sousedních vrcholů

Počet možných zobrazení – $8!$

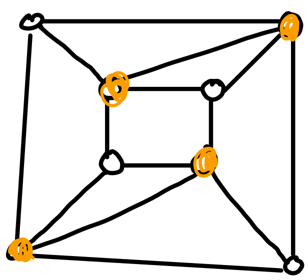
Pokud G a X jsou izomorfní tak zapíšeme izomorfismus viz výše.

Př: Jsou grafy G_1 a G_2 izomorfní?

G_1

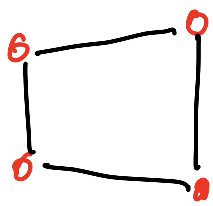


G_2



$(4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3)$

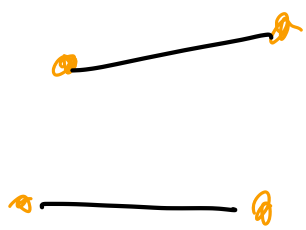
Ind. podgraf v G_1 na vrcholech st. 4



C_4

I_1

Ind podgraf v G_2 na vrcholech st 4



$P_2 \cup P_2$

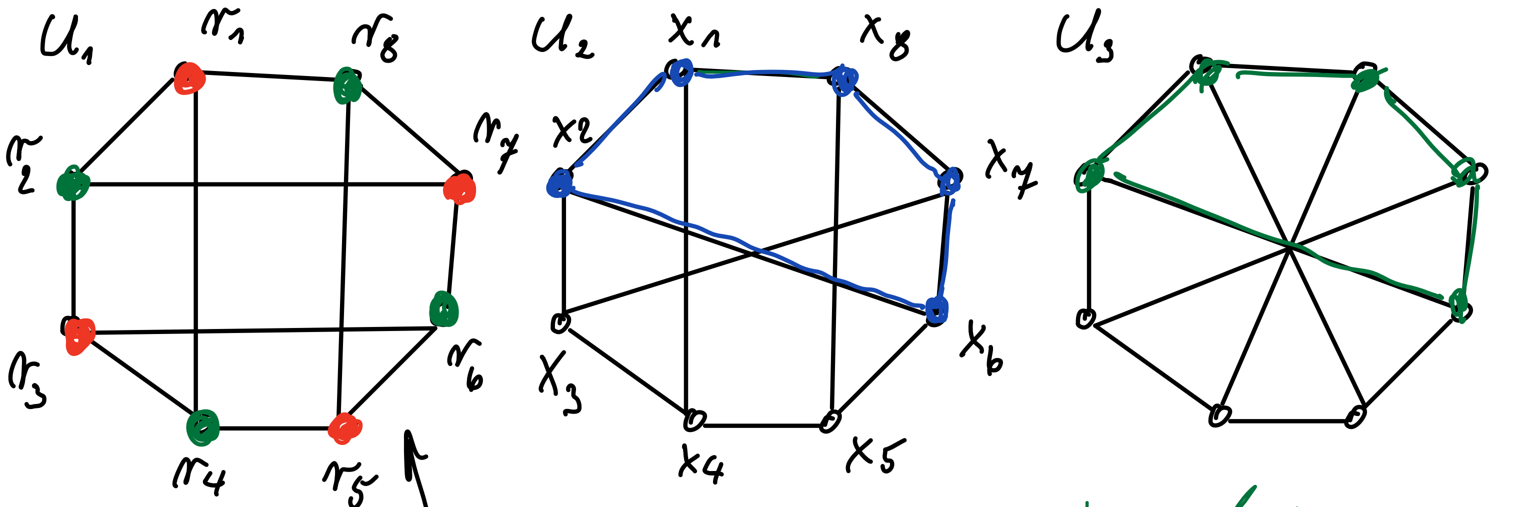
I_2

Protože $I_1 \not\cong I_2 \implies \underline{\underline{G_1 \not\cong G_2}}$

"$\cong$" izomorfní!

pokračování izomorfismů
v pátek 26. 11. 9:30
Teamsy.

Př: Které z následujících grafů jsou (nejsou) izomorfní:

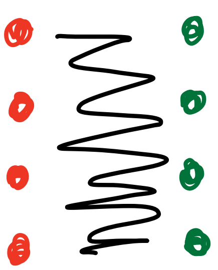


$|V(U_i)| = 8$

$|E(U_i)| = 12$

$(3,3,3,3,3,3,3,3)$

Největší nezávislé mn. vrcholů



bipartitní graf

obsahuje pouze cykly sudé délky.

$U_1 \cong U_2$? – nejsou izomorfní

U_2 obsahuje cyklus C_5 liché délky.

U_1 je bipartitní a obsahuje pouze cykly sudé délky

$U_1 \not\cong U_2$

U_2 a U_3 jsou izomorfní

Sami si zkuste najít $f: V(U_2) \to V(U_3)$

tak, aby byla zachována sousednost.

Př: Nakreslete dva neizomorfní grafy s danou st. posloupností

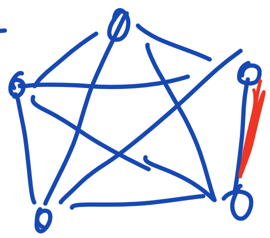
a) $(4,4,4,3,3) \Leftarrow K_5$ bez 1 hrany

doplňková posl. $(0,0,0,1,1)$

Pro K_5 největší počet hran 10

a největší st. vrcholu 4

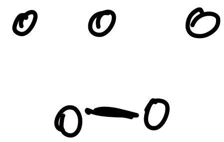
K_5



$(4,4,4,4,4)$

K_5 bez hrany

$(4,4,4,3,3)$



Jediný graf

Nejsou 2 neizomorfní doplňky => neexistují dva neizomorfní grafy se zadanou st. posloupností.

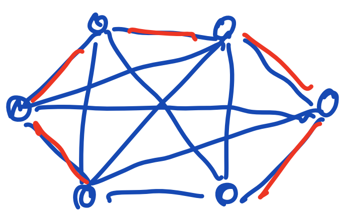
b) $(4,4,3,3,3,3)$ – graf G

Doplňková posloupnost $(1,1,2,2,2,2)$

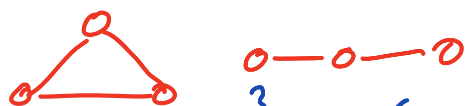
Možné doplňky jsou tři neizomorfní:

$D_1 = P_6 \Rightarrow G_1 = K_6 \setminus P_6$ $\quad$ $D_2 = P_3 \cup C_3 \Rightarrow G_2 = K_6 \setminus P_3 \cup C_3$

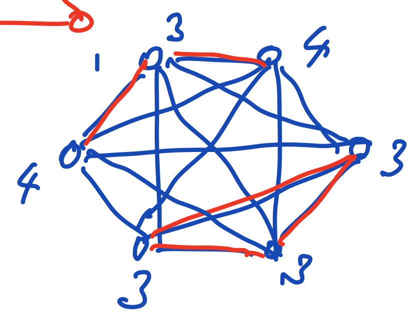
D_1



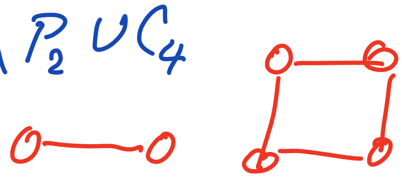
$K_6 \setminus P_6 = G_1$



D_2



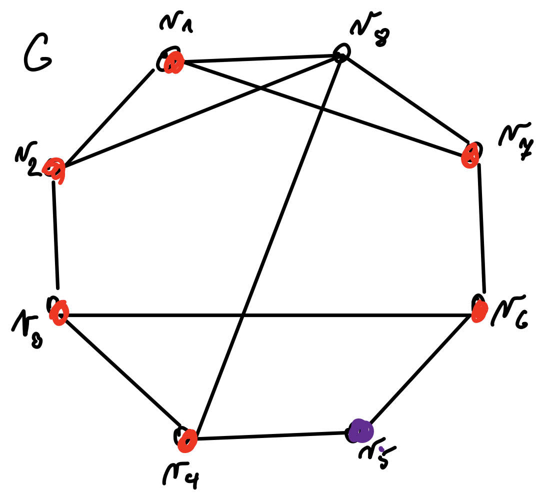
$D_3 = C_4 \cup P_2 \Rightarrow G_3 = K_6 \setminus P_2 \cup C_4$



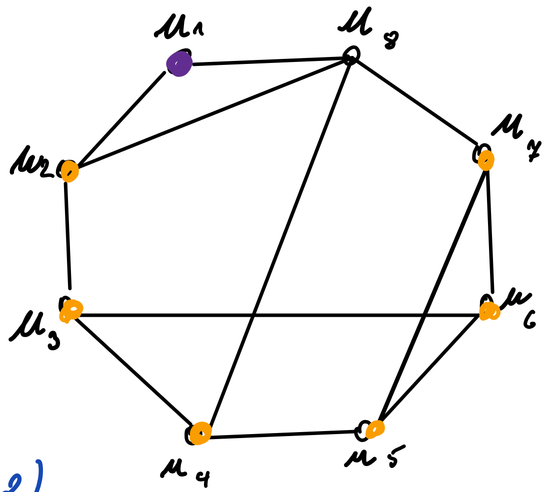
D_3

Protože $D_1 \ncong D_2 \ncong D_3$ je i $G_1 \ncong G_2 \ncong G_3$

Př: Najděte graf U se stejnou st. posloupností, který je s G neizomorfní. Dokažte, že je neizomorfní.



Například graf U

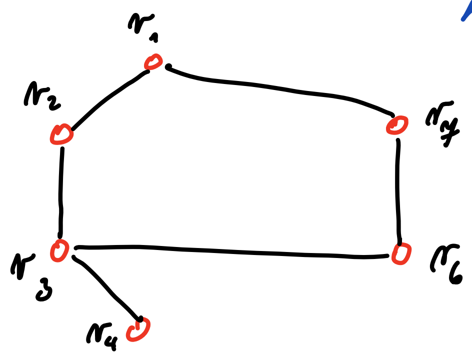


st. posl $(4,3,3,3,3,3,3,2)$

Dvě různá možná zdůvodnění

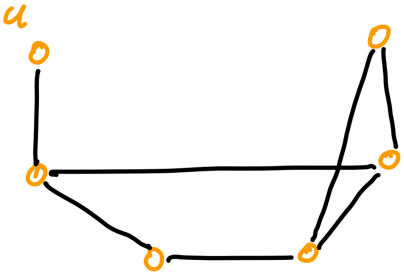
- $G \not\cong U$ protože – zřejmně, indukované podgrafy na vrcholech st. 3 nejsou izomorfní

I_G



$I_G \not\cong I_U$

I_U



- $G \not\cong U$ protože – V G je jediný vrchol st 2 sousední pouze s vrcholy st. 3.

!

V H je vrchol st 2 sousední s vrcholem st. 3 a st. 4.

Při izomorfismu musí být $f(v_5) = u_8$ ale pro sousedy stupně vrcholů neodpovídají!

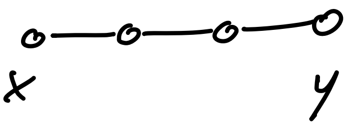
Vzdálenosti v grafech

vzdálenost – délka nejkratšího sledu => délka nejkratší cesty

Př: Jaká je největší vzdálenost mezi vrcholy v grafech

$$\max_{u,v \in V(G)} \{dist(u,v)\} = ?$$

a) P_4

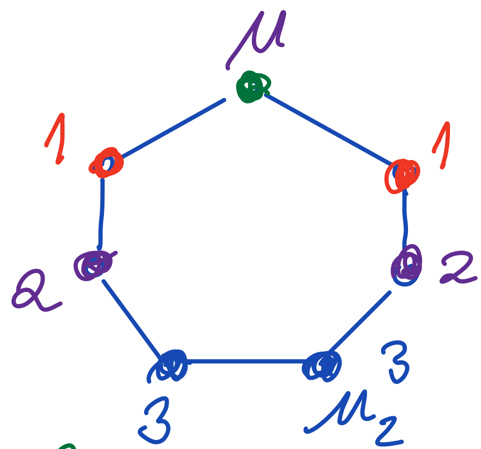


$Max\ dist(P_4) = dist(x,y) = 3$

b) K_5 $Max\ dist(K_5) = 1$

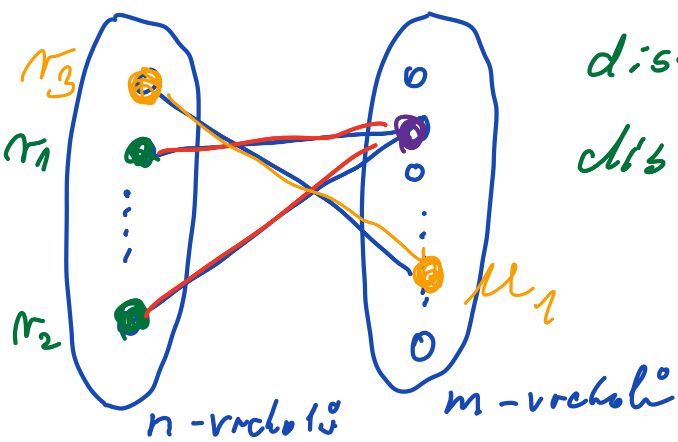
c) C_7 $Max\ dist(C_7) = 3$

Obecně $Max\ dist(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$



d) $K_{n,m}$

$Max\ dist(K_{n,m}) =$



$dist(v_1, v_2) = 2$

$dist(v_3, v_1) = 1$

$Max\ dist(K_{m,n}) = 2$

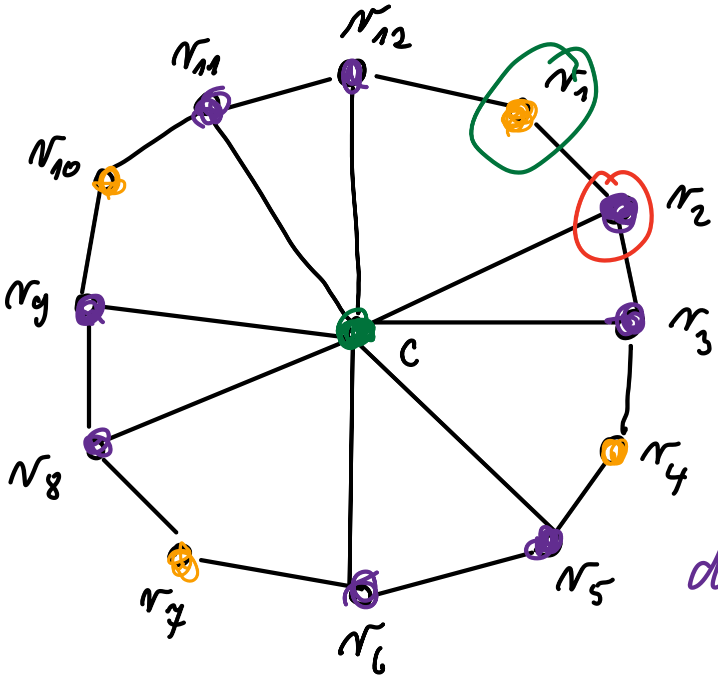
Metrika pro K_2

K_2

	v_1	v_2
v_1	0	1
v_2	1	0

Sestavte metriku grafu

(Jaké jsou vzdálenosti mezi vrcholy v grafu G?)



3 druhy vrcholů

1.) $u = C$

$$dis(C, v) = \begin{cases} v_2 \dots 1 \\ v_1 \dots 2 \end{cases}$$

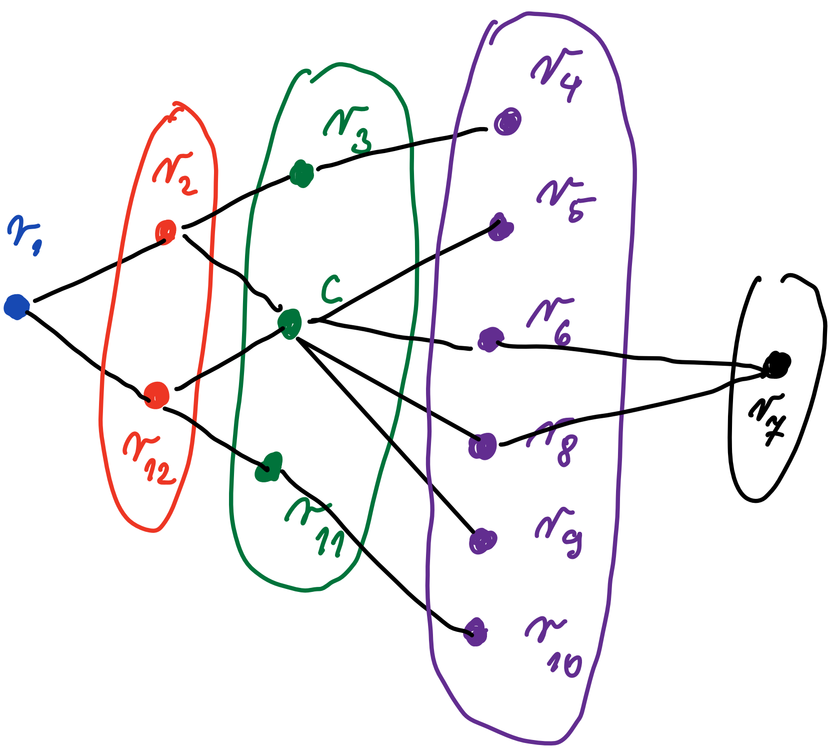
2.) $u = v_2$

$$dist(v_2, v) = \begin{cases} v_1, v_3, C \dots 1 \\ 2 \dots v_4, v_{12} \\ 3 \dots v_7, v_{10} \end{cases}$$

MAX dist $(G) = 4$

3.) $u = v_1$

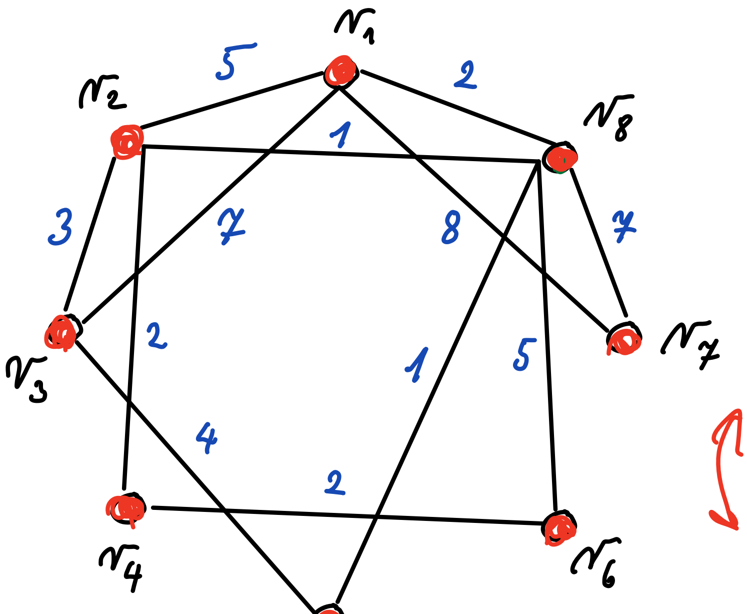
$$dist(v_1, v) = \begin{cases} 1 \dots \text{sousedé} \\ 2 \dots C, v_3, v_{12} \\ 3 \dots v_5, v_6 \\ 4 \dots v_7 \end{cases}$$



Přednáška:
Algoritmy k hledání nejkr. cesty (modif. prohled. do šířky + Floydův alg.)

Dále – Vzdálenosti v ohodnocených (vážených) grafech.

Př: V daném grafu najděte vzdálenosti (vážené) od vrcholu v_1 do všech ostatních vrcholů.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
v_1	0	5	7	∞	∞	∞	8	2
v_8		3	7	∞	3	7	8	2
v_2		3	6	5	3	7	8	
v_5			6	5	3	7	8	
v_4			6	5		7	8	
v_3			6			7	8	
v_6						7	8	
v_7							8	

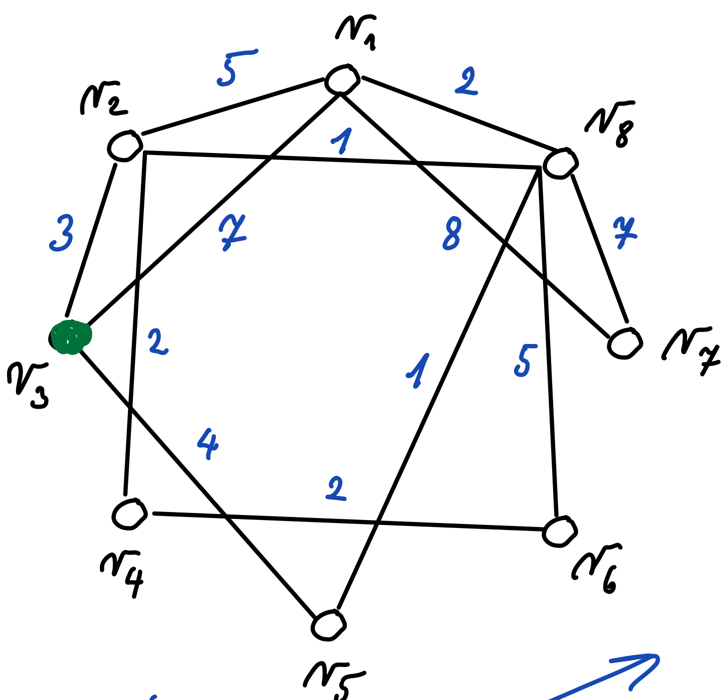
Pořadí zprac. vrcholu

Dijkstrův algoritmus

$dist(v_1, v_5) = 3$

$Max\ dist(v_1, v) = dis(v_1, v) = 8$

Pořadí zprac. vrcholů. zapsat $v_1, v_8, v_2, v_5, v_4, v_3, v_6, v_7$

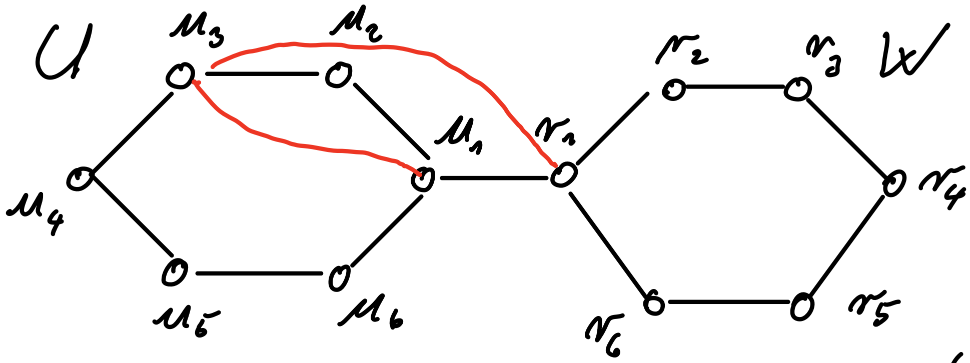


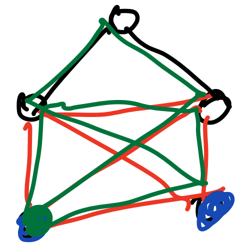
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞
v_3	7	3	0	∞	4	∞	∞	∞
v_2	7	3		5	4	∞	∞	4
v_5	7			5	4	∞	∞	4
v_8	6			5		∞	11	4
v_4	6			5		7	11	
v_1	6					7	11	
v_6						7	11	
v_7							11	

Vzdál od v_3

Eulerovské a Hamiltonovské grafy

Př: Je graf (viz obr.) Eulerovský?





$G = U \cup W \cup \{u_1, v_1\}$

a) kolik hran stačí přidat mezi vrcholy U, aby se stal Eulerovským? Mezi vrcholy U_i nelze přidat 1 hranu e tak, aby $G+e$ byl eulerovský. Přidáním 1 hrany zvýšíme vždy stupeň 2 různých vrcholů o 1, tj nelze zajistit aby vrcholy v $G+e$ byly všechny sudého stupně.

b) kolik nejméně hran je třeba přidat do G, aby G byl eulerovský?

- Přidat 1 hranu nestačí. Potřebujeme totiž změnit stupeň vrcholů u_1 a v_1 na sudý, ale tyto vrcholy jsou sousední – tedy nelze přidat hranu $e = u_1v_1$, protože ta už v grafu G je. Přesto je třeba zvýšit stupeň vrcholů v_1 a u_1 – tj nové hrany – alespoň 2 budou incidentní s u_1 a v_1.
- Přidat 2 hrany stačí – $e_1 = u_1u_3$, $e_2 = v_1u_3$.
  $G \cup \{e_1, e_2\}$ je Eulerovský.

c) Je G Hamiltonovský? Není! V G nemůže existovat hamiltonovský cyklus, protože hrana u_1v_1 je mostem, tj nelze uzavřít cyklus přes všechny vrcholy aniž bychom tuto hranu zopakovali.

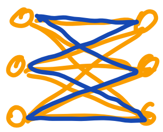
Hamiltonovský grafy

"A => B"

• Oreho Věta:
$\forall u,v \in V(G)$, $uv \notin E(G)$ (u,v nesousední) kde platí $\underline{\deg(u)+\deg(v) \geq |V(G)|}$ => G je hamiltonovský.

• Diracova Věta, $|V(G)| \geq 3$
Je-li $\underbrace{\delta(G) \geq \frac{1}{2}|V(G)|}_{A}$ => G je hamiltonovský.

Př: Je $K_{n,n}$ Hamiltonovský?
Pro $K_{n,n}$ je $\delta(K_{n,n}) = n \geq \frac{1}{2}|V(K_{n,n})| = n$. Podle Diracovy věty je tedy $K_{n,n}$ hamilnonovský, tj existuje hamilnonovský cyklus přes všechny vrcholy. Kromě $K_{1,1}$.

Př $K_{3,3}$  C_6 - hamilt. cyklus

Př: Jsou grafy $K_{7,6}$ a $C_6(1,2)$ eulerovské, hamiltonovské?

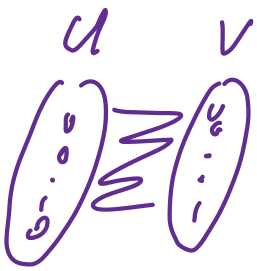
• $K_{7,6}$ Pro $K_{7,6}$ je $\delta(K_{7,6}) = 6 \cancel{\geq} \frac{1}{2}|V(K_{7,6})| = \frac{13}{2} = 6,5$
Tj Diracovu větu nelze použít.
(Na základě Dir. věty nelze rozhodnout. $K_{7,6}$ - by mohl být hamiltonovský i když podmínka věty neplatí)
(V záznamu cvičení je tohle špatně rozhodnuto)

$K_{7,6}$ není hamiltonovský, protože uzavřený hamilt. cyklus by musel být $C_{7+6} = C_{13}$ tj lichý cyklus. $K_{7,6}$ je bipartitní a už dříve jsme si ukázali, že každý bipartitní graf obsahuje jen cykly sudé.

Tj $C_{13} \not\subset K_{7,6} \Rightarrow K_{7,6}$ <u>není hamiltonovský</u>.

- $K_{7,6}$ obsahuje vrcholy <u>lichého stupně</u>

  $\deg(v_i) = 7$ a $\deg(u_i) = 6$

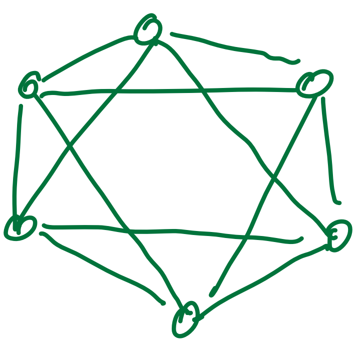


$\forall v_i \in V$ a $\forall u_i \in U$ $\Rightarrow K_{7,6}$ <u>není eulerovský</u>

$|U| = 7$

$|V| = 6$

- $C_6(1,2)$ ← cirkulant



Zřejmě $C_6 \subset C_6(1,2)$

tj C_6 je <u>hamiltonovský</u>

$\deg(v_i) = 4 \ \forall v_i \in V(C_6(1,2))$

tj všechny vrcholy jsou sudého stupně $\Rightarrow C_6(1,2)$ <u>je eulerovský</u>