Grafy

- Princip sudosti
- Věta Havlova Hakimiho (HH)
- Podgrafy
- Izomorfismus grafů

Princip sudosti (Věta 1.1.)

$$\sum_{v_i \in V(G)} \deg(v_i) = 2|E(G)|$$

Kolik hran má graf

a) s 10 vrcholy stupně 5.

$$\sum \deg(v_i) = 10 \cdot 5 = 50 = 2|E(G)|$$

$$|E(G)| = \frac{50}{2} = \underline{\underline{25}}$$

b) s 11 vrcholy stupně 5.

$$11 \cdot 5 = 55 = 2|E(G)|$$

Neexistuje

$$|E(G)| = \frac{55}{2} = 27{,}5$$

c) se stupňovou posloupností $(1,1,1,1,2,3,3,3,6,6,7)$

$$1+1+1+1+2+3+\cdots+7 = 2|E(G)|$$

$$|E(G)| =$$

d) se stupňovou posloupností $(1,1,1,2,3,3,5,6,6,7)$

Neexistuje

Dle principu sudosti součet stupňů v grafu musí dát sudé číslo.

e) se stupňovou posloupností $(9,6,6,5,3,3,2,1,1)$

$$9+6+6+5+3+3+2+1+1 = 36$$

$$|E(G)| = \frac{36}{2} = 18$$

Existuje graf s danou st. posloupností?

Neexistuje. Na 9-ti vrcholech nejvyšší možný stupeň je 8.

1.3.9. Kolik vrcholů má graf, který má 15 hran, 3 vrcholy stupně 4 a zbývající vrcholy stupně 3?

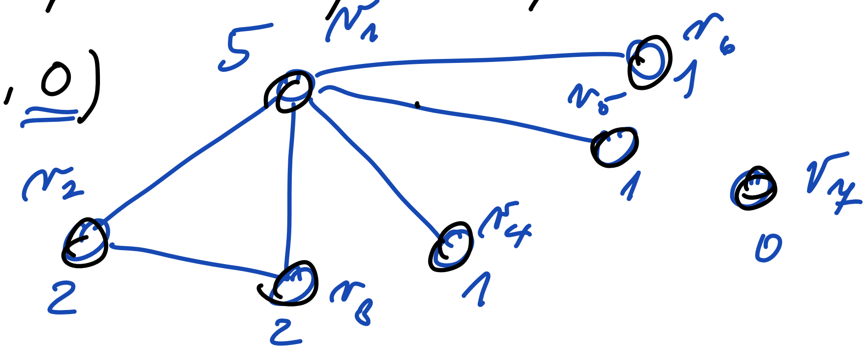
$$2|E(G)| = 2\cdot 15 = 3\cdot 4 + x\cdot 3 = \sum \deg(v_i)$$

$$30 = 12 + 3x$$

$$x = \frac{18}{3} = 6 \quad |V(G)| = 3+6 = \underline{\underline{9}}$$

Př: Nakreslete graf se st. posloupností

a) $(5, 2, 2, 1, 1, 1, \underline{\underline{0}})$



Věta Havlova Hakimiho

b) $(7, 6, 6, 5, 3, 3, 2, 1, 1) \overset{HH}{\sim} (5, 5, 4, 2, 2, 1, 0, 1) \sim$

$\sim (5, 5, 4, 2, 2, 1, 1, 0) \overset{HH}{\sim} (4, 3, 1, 1, 0, 1, 0) \sim$

$\sim (4, 3, 1, 1, 1, 0, 0) \overset{HH}{\sim} (2, 0, 0, 0, 0, 0) \sim \underline{(-1, -1, 0, 0, 0)}$

není grafová

$\overset{HH}{\Rightarrow}$ ani původní posl. není grafová

c) $(7, 6, 4, 3, 3, 3, 1, 1)$

Ověřit sami, že není grafová.

6.

$d' \; (4,4,3,3,2,2,1,1,0,0) \overset{HH}{\sim} (3,2,2,1,2,1,1,0,0)$

5. 4.

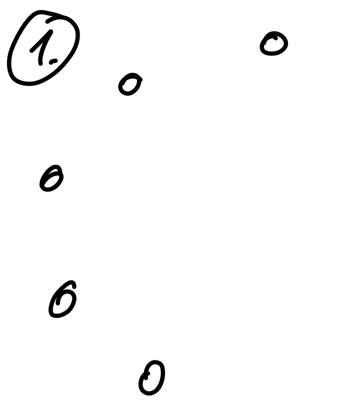
$\sim (3,2,2,2,1,1,1,0,0) \overset{HH}{\sim} (1,1,1,1,1,1,0,0) \sim$

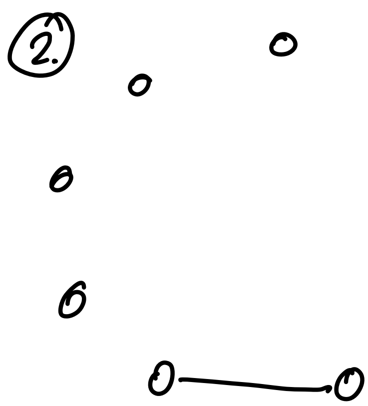
$(0,1,1,1,1,0,0) \sim (1,1,1,1,0,0,0) \overset{HH}{\sim} (1,1,0,0,0,0)$

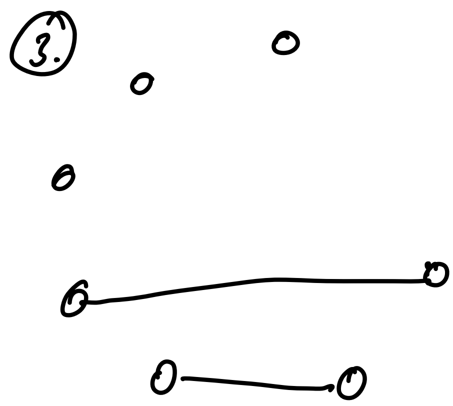
3. 2.

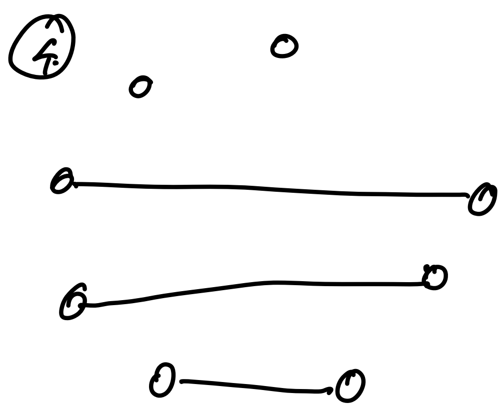
$\sim (0,0,0,0,0) \leftarrow$ Grafová!

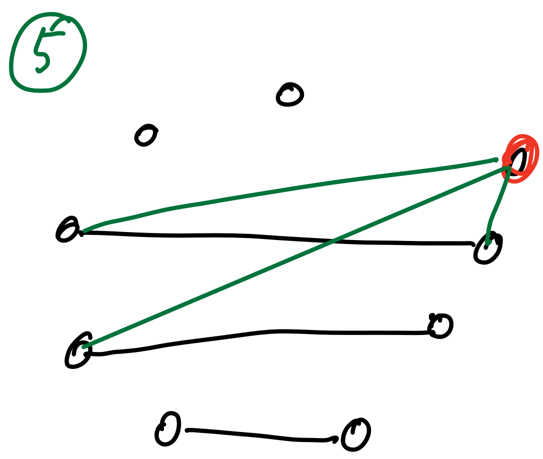
1.

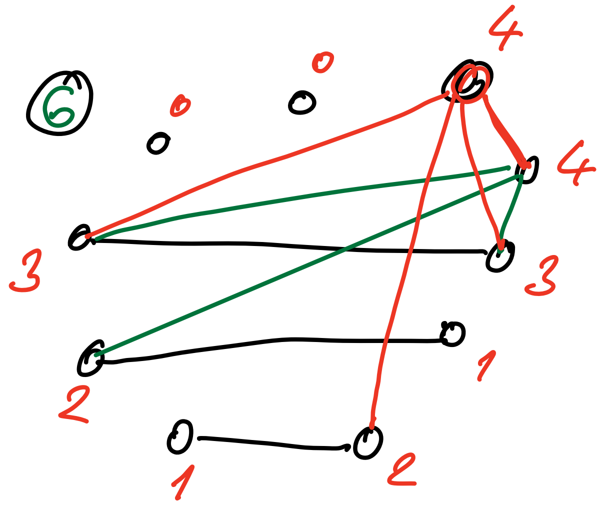










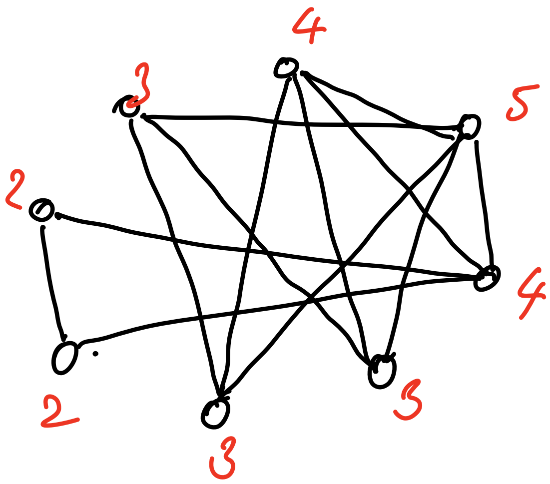


e) $(5,4,4,3,3,3,2,2) \overset{HH}{\sim} (3,3,2,2,2,2,2) \overset{HH}{\sim}$

$(2,1,1,2,2,2) \sim (2,2,2,2,1,1) \overset{HH}{\sim} (1,1,2,1,1)$

$\sim (2,1,1,1,1) \overset{HH}{\sim} (1,1,0,0) \overset{HH}{\sim} (0,0,0)$

Posl. je grafová



Podgrafy

Podgrafy

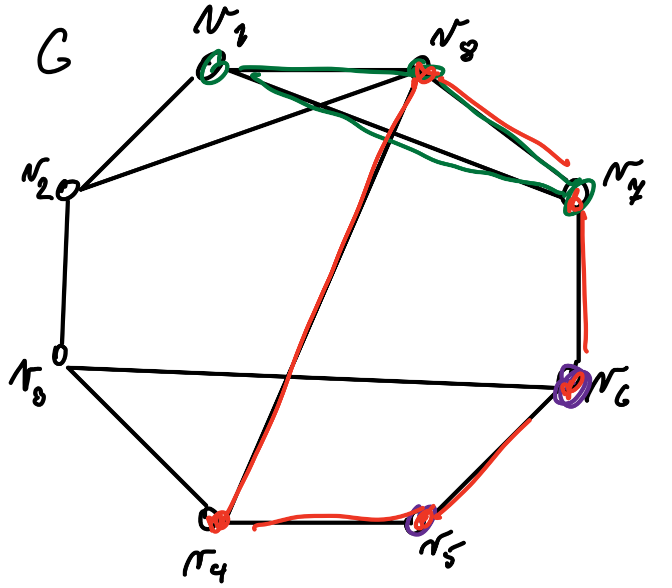
H je podgraf grafu G $\Leftrightarrow$ $V(H) \subseteq V(G)$
$E(H) \subseteq E(G)$

Indukovaný podgraf: I je indukt. podgraf $\Leftrightarrow$ je podgrafem a je-li $u, v \in V(I) \wedge uv \in E(G)$
$\Rightarrow uv \in E(I)$

C_3, P_2

C_3 je podgraf G
$V(C_3) = \{v_1, v_8, v_7\}$

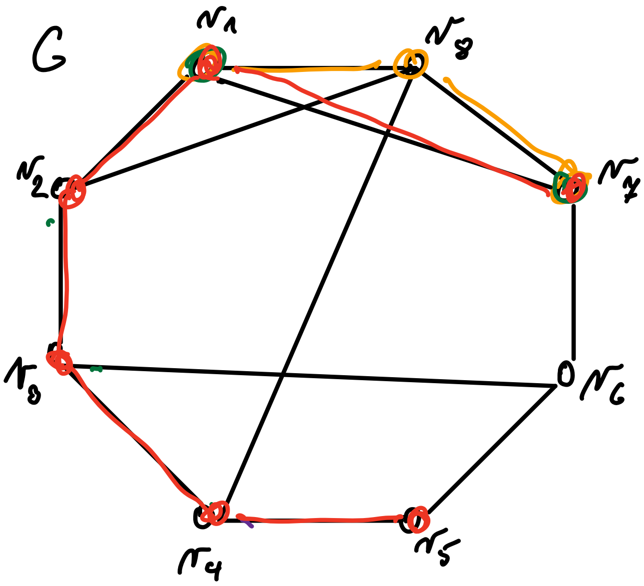
a) Jaký nejdelší cyklus je podgrafem G?
C_8 $V(C_8) = V(G)$



b) Jaký je nejdelší indukovaný cyklus?
C_5 $V(C_5) = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$
Je nejdelší?!

$\binom{8}{2} = 28$ možností, jak odstranit 2 vrcholy a ověřit, že zbylý induk. graf není C_6

P_2 je podgraf G
$V(P_2) = \{v_5, v_6\}$



c) Jaká nejdelší cesta je podgrafem v G?
P_8 - $V(P_8) = V(G)$

d) Jaká je nejdelší indukovaná cesta v G?
P_6 je nejdelší (viz obr.)

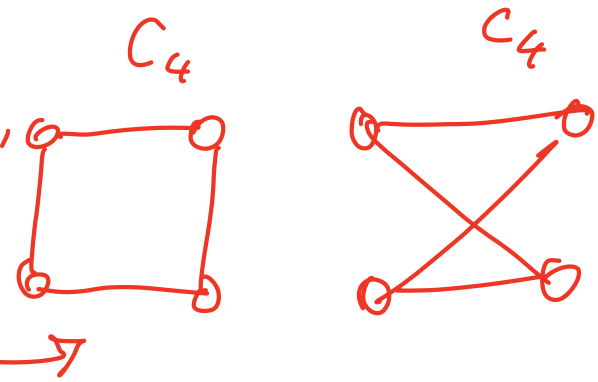
$H_2 = P_3$

H_2 $V(H_2) = \{v_1, v_8, v_7\}$ H_1 – je podgraf G

$E(H_2) = \{v_1v_8, v_8v_7\}$ H_2 – není indukovaný podgraf G

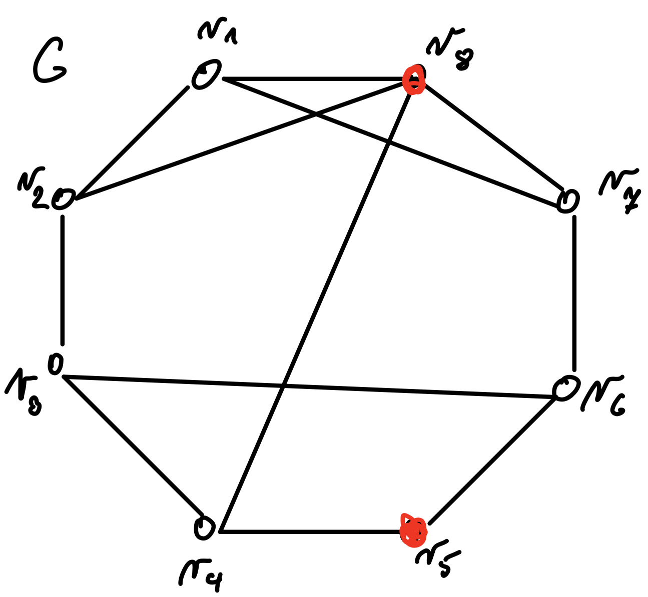
Izomorfismus grafů.

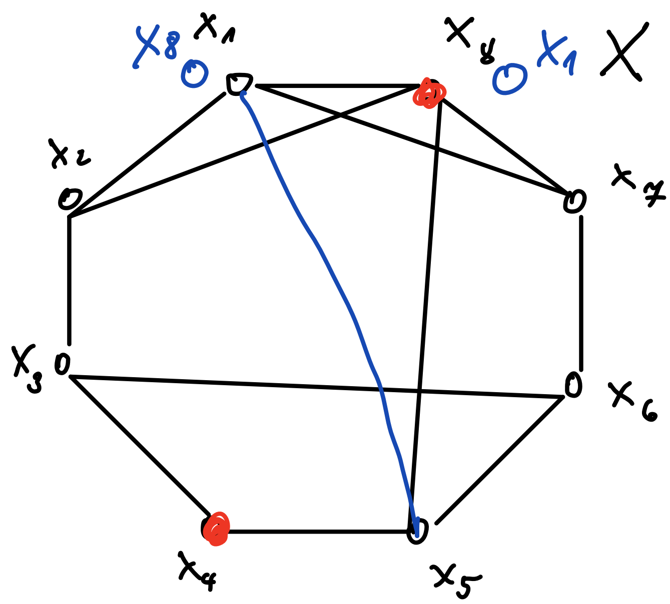
Různá nakreslení izomorfních grafů



Př 1.)

Jsou grafy G a X izomorfní?





Izomorfismus

$f: V(G) \to V(X)$ & $v_iv_j \in E(G) \iff f(u)f(v) \in E(X)$

$f(v_1) = X_1$ $\quad f(v_4) = X_5$ $\quad f(v_7) = X_2$

$f(v_2) = X_7$ $\quad f(v_5) = X_4$ $\quad f(v_8) = X_8$

$f(v_3) = X_6$ $\quad f(v_6) = X_3$

Našli jsme izomorfismus – jsou izomorfní

Invarianty

$|V(G)| = |V(X)| = 8$

$|E(G)| = |E(X)| = 12$

$\Delta(G) = 4 = \Delta(X)$,

$\delta(G) = 2 = \delta(X)$

stupňová posloupnost

$(4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2)$

- stejné podgrafy (indukované podgrafy na spec. mn. vrcholů)
- stupně sousedních vrcholů

Počet možných zobrazení – 8!

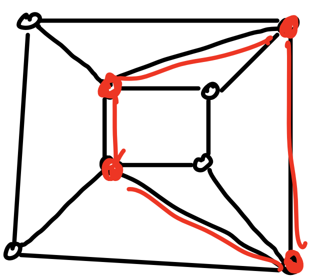
Pokud G a X jsou izomorfní tak zapíšeme izomorfismus viz výše.

izomorfní $\Leftrightarrow$ existuje izomorfismus $f: V(G) \to V(X)$ takový, že platí

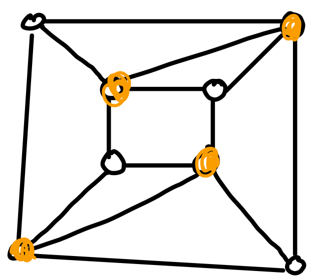
$$\underbrace{v_i v_j \in E(G) \Leftrightarrow f(v_i) f(v_j) \in E(X)}_{\text{zachovává sousednost}}$$

Př: Jsou grafy G_1 a G_2 izomorfní?

G_1

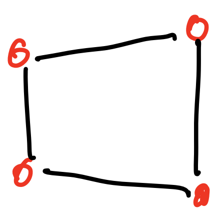


G_2



$(4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3)$

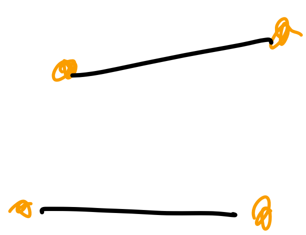
Ind. podgraf v G_1 na vrcholech st. 4



C_4

I_1

Ind podgraf v G_2 na vrcholech st 4



$P_2 \cup P_2$

I_2

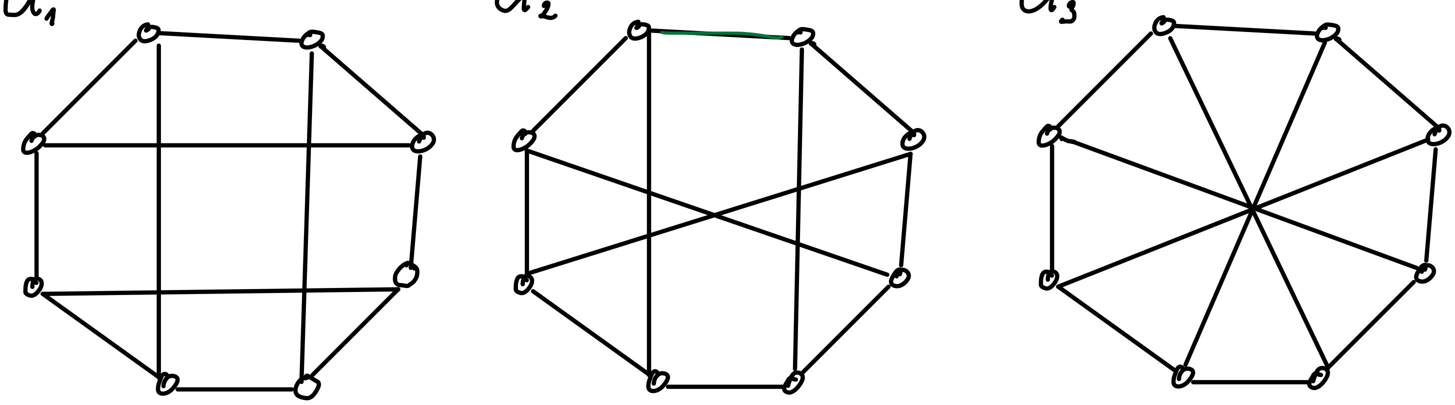
Protože $I_1 \not\cong I_2 \Rightarrow \underline{\underline{G_1 \not\cong G_2}}$

" $\cong$ " izomorfní!

pokračování izomorfismu
v pátek 26. 11. 9:30
Teamsy.

Př: Které z následujících grafů jsou (nejsou) izomorfní:

U_1 U_2 U_3



$U_1 \cong U_2$?

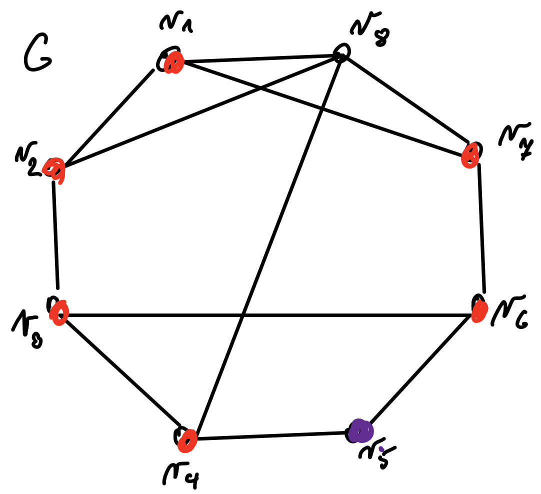
$|V(U_i)| = 8$
$|E(U_i)| = 12$
$(3,3,3,3,3,3,3,3)$

Př: Nakreslete dva neizomorfní grafy s danou st. posloupností

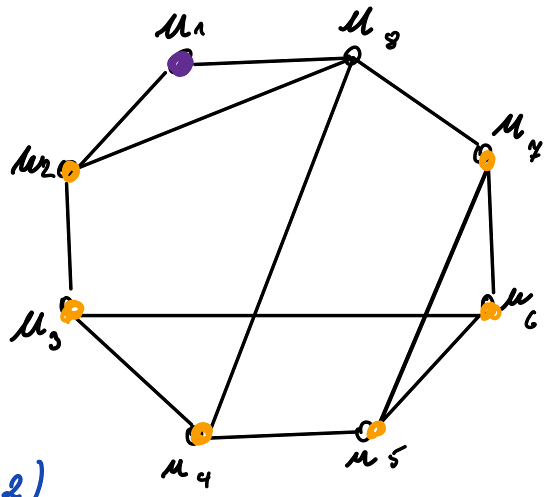
a) $(4, 4, 4, 3, 3)$

b) $(4, 4, 3, 3, 3, 3)$ – graf G

7F: Najděte graf U se stejnou st. posloupností, který je s G neizomorfní. Dokažte, že je neizomorfní.



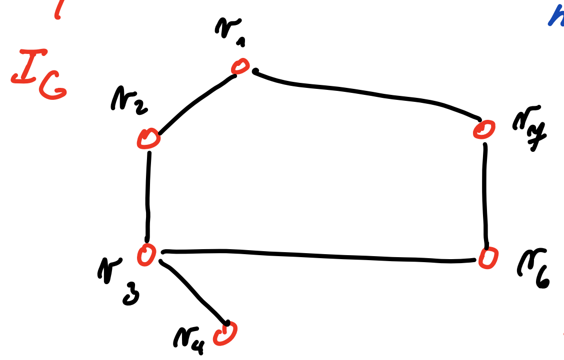
Například graf U



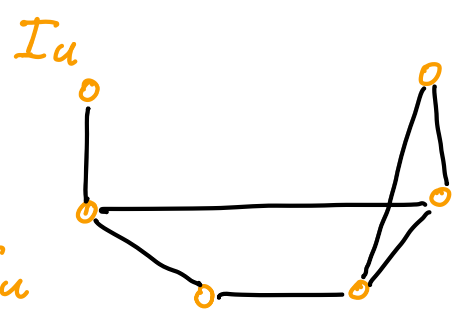
st. posl $(4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2)$

Dvě různá možná zdůvodnění

- $G \not\cong U$ protože – zřejmně indukované podgrafy na vrcholech st. 3 nejsou izomorfní



$I_G \not\cong I_U$



- $G \not\cong U$ protože – V G je jediný vrchol st 2 sousední pouze s vrcholy st. 3.

  V H je vrchol st 2 sousední s vrcholem st. 3 a st. 4.

  Při izomorfismu musí být $f(v_1) = u_1$ ale pro sousedy stupně vrcholů neodpovídají!