Rekurentní rovnice

① Kolika způsoby lze vyjít n schodů jestliže můžeme stoupat po 1 nebo 2 schodech

- Sestavíme rek. rovnici

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Fibonacciho posloupnost posunutá o 1 člen.

Jaké jsou počáteční podmínky?

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 2$$

1 způsobem 1 schod

2 způsoby 2 schody – 2× po 1 sch.
– 1× po 2 sch.

Pro lineární homogenní rekur. rovnici s konst. koeficienty druhého řádu bude řešení lin. kombinací posloupností r^k.

- Sestavíme přísl. charakteristickou rci.

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2} \quad / \cdot \frac{1}{r^{n-2}}$$

$$\underline{\underline{r^2 = r + 1}} \leftarrow \text{char. rovnice}$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

najdeme kořeny

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

- Obecné řešení (tvar určíme podle počtu a násobnosti kořenů)

$$a_n = \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

konstanty α_1, α_2 dopočítáme z poč. podmínek.

$$a_1 = 1 = \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$a_2 = 2 = \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

soustava lin. rovnic o 2 nezn. α_1 a α_2

řešení této soust. je

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{5}+5}{10} \qquad \alpha_2 = \frac{-\sqrt{5}+5}{10}$$

Řešení rekurentní rovnice je vzorec pro a_n

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{5}+5}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-5}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Fibonacci posl.

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$n = 0, 1, 2 \ldots$

$(a_n) = 0, 1, 1, 2, 3, 5 \ldots$

Schody – posunutá Fibonacci posl. => lze určit a_n

pro $n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ je $a_n = 1, 1, 2, 3, 5 \ldots$

tedy $a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} =$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}+5}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-5}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

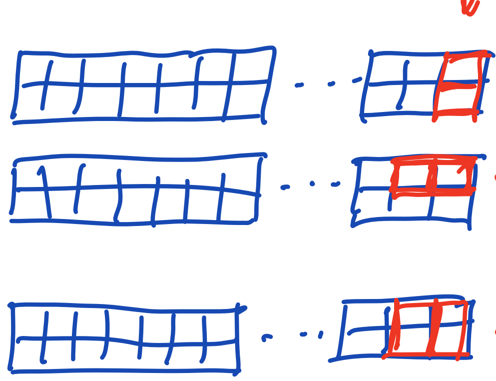
(2.) Kolik je možností jak pokrýt šachovnici $2 \times n$ čtverečků pomocí dílků o velikosti 2×1 a 2×2.

- Sestavíme rek. rovnici

n sloupečků

Počet pokrytí a_n

Poslední kostka



a_{n-1} možností

posl. kostka a_{n-2} možností

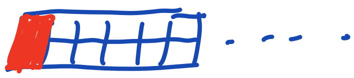
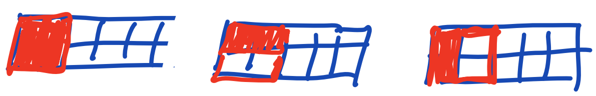
posl. kostka a_{n-2} možností

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

Dále řešíme tuto rekurentní rovnici

(homogenní, lineární, s konst. koef., 2-ho řádu)

- Počáteční podmínky

$a_1 = 1$  $a_2 = 3$ 

- Charakteristická rovnice

$$r^n = r^{n-1} + 2r^{n-2} \quad / \cdot \frac{1}{r^{n-2}}$$

$$r^2 = r^1 + 2$$

$$r^2 - r - 2 = 0$$

$$(r-2)(r+1) = 0$$

kořeny char. rce

$r_1 = -1, \; r_2 = 2$

- Obecné řešení – tvar:

$$a_n = \alpha_1 (-1)^n + \alpha_2 (2)^n$$

Dopočteme α_1, α_2 z poč. podmínek

$$\left.\begin{array}{ll} r_1 & a_1 = 1 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ r_2 & a_2 = 3 = \alpha_1 + 8\alpha_2 \end{array}\right\} + \Rightarrow 4 = 10\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{2}{5}$$

$$4r_1 - r_2 \Rightarrow 1 = -3\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{5}(2)^n - \frac{(-1)^n}{3} = \frac{2^{n+1}}{5} + \frac{(-1)^{n+1}}{3}$$

Př: Určete vlastnosti rekurentních rovnic

	lineární	homogenní	konst. koef	řád
a) $a_n = -1.21a_{n-1}$	✓	✓	✓	1
b) $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$	✓	✓	✓	2
c) $a_n = a_{n-4}$	✓	✓	✓	4
d) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$	✗	✓	✓	2
e) $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-3} + 1$	✗	✗	✓	3
f) $a_n = a_{n-1} + n$	✓	✗	✓	1
g) $a_n = n \cdot a_{n-1} + a_{n-4}$	✓	✓	✗	4
h) $a_n = 2 \cdot a_{n-2} + \log n \, a_{n-3} + 1$	✓	✗	✗	3

Př: Vyřešte dané rek. rovnice

a) $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$

char. rovnice: $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$

$$(r+1)^3 = 0$$

trojnás kořen: $r_0 = -1$

Tvar obecného řešení: $a_n = \alpha_1 (-1)^n + \alpha_2 n(-1)^n + \alpha_3 n^2(-1)^n$

Nalezení obecného řeš: $a_0 = 1,\ a_1 = -2,\ a_2 = -1$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 \\ -2 &= -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \\ -1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= 3 \\ \alpha_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$a_n = (-1)^n + 3n(-1)^n - 2n^2(-1)^n$$

b) $a_n = a_{n-1} + 8a_{n-2} - 12a_{n-3}$

char. rovnice: $r^3 - r^2 - 8r + 12 = 0$

$(r-2)^2(r+3) = 0$

dvojnás. kořen $r_{1,2} = 2$, kořen $r_3 = -3$

Tvar obecného řešení: $a_n = \alpha_1 (2)^n + \alpha_2 n (2)^n + \alpha_3 (-3)^n$

Nalezení obec. řešení: $a_0 = 3,\ a_1 = -8,\ a_2 = 44$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= \alpha_1 \\ -8 &= 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 \\ 44 &= 4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 9\alpha_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= -1 \\ \alpha_2 &= 3 \\ \alpha_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$a_n = -2^n + 3n\,2^n + 4(-3)^n$$

$$= \underline{\underline{(3n-1)\cdot 2^n + 4\cdot(-3)^n}}$$

Nehomogenní rekurentní rovnice

a) $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2} + (n+1)3^n$

Char. rovnice: $r^2 - 8r + 16 = 0$

$(r-4)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 4$

Obecné řešení: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

$a_n^{(h)} = \alpha_1 4^n + \alpha_2 n \cdot 4^n$ $\qquad$ $a_n^{(p)} = (cn+d) \cdot 3^n$

b) $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2} + (2-n)4^n$

Char. rce: stejná jako a) $(r-4)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 4$

$a_n^{(p)} = (cn+d) \cdot n^2 \cdot 4^n$

c) $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3} + n^3$

Char. rce: $r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0$

	1	-7	16	-12
3	1	-4	4	0
2	1	-2	0	

$(r-3)(r-2)(r-2) = 0$

$r_{1,2} = 2, \quad r_3 = 3$

$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

$a_n^{(h)} = \alpha_1 2^n + \alpha_2 \cdot n 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$

$a_n^{(p)} = (cn^3 + dn^2 + en + f)$

d) $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3} - 2n4^n$

char. rce: stejné jako c) $r_{1,2} = 2$, $r_3 = 3$

$a_n^{(p)} = (cn+d)\cdot 4^n$

e) $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3} - 2n^2 2^n$

char. rce: stejná jako c) a d)

$a_n^{(p)} = (cn^2 + dn + e)\cdot n^2 \cdot 2^n$

Najděte řešení násl. rekurentní rovnice s poč. podmínkami

a) $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2} + (n+1)3^n$, $a_0 = 1$ a $a_1 = 10$.

Char. rovnice: $r^2 - 8r + 16 = 0$

$(r-4)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 4$

Obecné řešení: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

$\underline{a_n^{(h)} = \alpha_1 4^n + \alpha_2 n \cdot 4^n}$ $\underline{a_n^{(p)} = (cn+d)\cdot 3^n}$

Konstanty c a d určíme dosazením $a_n^{(p)}$ do r. r.

$(cn+d)\cdot 3^n = 8\cdot(c(n-1)+d)\cdot 3^{n-1} - 16(c(n-2)+d)\cdot 3^{n-2} + (n+1)\cdot 3^n$

dělím 3^{n-2}

$9(cn+d) = 24(cn-c+d) - 16(c\cdot n - 2c + d) + 9(n+1)$

Porovnáním koef. u stejných mocnin n dostaneme:

n^1: $\quad 9c = 24c - 16c + 9 \quad \Rightarrow \quad \underline{c = 9}$

n^0: $\quad 9d = -24c + 24d + 32c - 16d + 9$

dosadit

$$d = 8c + 9 \quad \Rightarrow \quad \underline{d = 72 + 9 = 81}$$

$$a_n^{(p)} = (9n + 81)\cdot 3^n = (n+9)\cdot 3^2\cdot 3^n$$

Obecné řešení

$$a_n = \alpha_1 \cdot 4^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 4^n + (n+9)\cdot 3^{n+2}$$

Je třeba dopočítat konstanty α_1, α_2.

Ty určíme z počátečních podmínek. $a_0 = 1$ a $a_1 = 10$.

$\underline{a_0 = 1} = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + (0+9)3^2$

$$1 = \alpha_1 + 81 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -80$$

$\underline{a_1 = 10} = \alpha_1 \cdot 4 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot 4 + (1+9)\cdot 3^{1+2}$

dosadit

$$10 = 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 270$$
$$10 = -320 + 4\alpha_2 + 270$$
$$60 = 4\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 15$$

Řešení dané rek. rovnice s danými poč. podmínkami je

$$\underline{a_n = -80\cdot 4^n + 15n\cdot 4^n + (n+9)\cdot 3^{n+2}}$$

(3) Do fondu investujeme na účet 100 000 Kč.
Podle podmínek fondu nám bude na konci každého roku na účet připsáno 20% z částky, která byla ve fondu v daném roce a 45% z částky, která byla ve fondu v předchozím roce.
Jaká částka bude na účtu na počátku roku n.

- Sestavíme rekurentní rovnici

$$a_n = 1{,}2\, a_{n-1} + 0{,}45\, a_{n-2}$$

- Počáteční podmínky

$$a_0 = 100\,000 \qquad a_1 = 120\,000$$

- Charakteristická rovnice

$$r^n = 1{,}2\, r^{n-1} + 0{,}45 \cdot r^{n-2}$$

$$r^2 - 1{,}2\, r - 0{,}45 = 0 \quad \leftarrow \text{hledáme kořeny}$$

$$(r - 1{,}5)(r + 0{,}3) = 0$$

$$r_1 = 1{,}5 = \frac{3}{2} \qquad r_2 = -0{,}3 = -\frac{3}{10}$$

- Tvar obecného řešení:

$$a_n = \alpha_1 (-0{,}3)^n + \alpha_2 (+1{,}5)^n$$

- z poč. podmínek dopočteme α_1 a α_2.

$$a_0 = 100\,000 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_1 = 120\,000 = -\frac{3}{10}\alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 \quad / \cdot 10$$

$r_1 \quad 100\,000 = \alpha_1 + \alpha_2$

$r_2 \quad 1\,200\,000 = -3\alpha_1 + 15\alpha_2$

$r_2 + 3r_1 \quad 1\,500\,000 = 18\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \dfrac{750\,000}{9}$

$\alpha_2 = \dfrac{250\,000}{3}$

$r_2 - 15r_1 \quad -300\,000 = -18\alpha_1 = \alpha_1 = \dfrac{150\,000}{9}$

$\alpha_1 = \dfrac{50\,000}{3}$

$$a_n = \frac{50000}{3}(-0{,}3)^n + \frac{250\,000}{3}(1{,}5)^n$$