2.3.6. Kolika způsoby je možné napsat k jako součet n kladných sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.

$\Leftarrow \; k \geq n$

$$k = x_1 + x_2 \cdots + x_n \qquad 0 < x_i \leq k$$

$$C^*(n, k-n) = \binom{n+k-n-1}{n-1}$$

barvy ↓

2.3.7. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit?

C^*

1 2 3 4

$\bullet \mid \bullet\bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet\bullet \mid \bullet$

$$C^*(n,k) = \cancel{C^*(10,4)}$$

$$= \cancel{\binom{10+4-1}{9}} = \cancel{\binom{13}{9}} = C^*(4,10) = \binom{13}{3}$$

$$P^*(10,3) = \frac{13!}{3! \cdot 10!} = \binom{13}{3}$$

2.3.9. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak některé figurky obarvit?

$C^* =$

1. 2. 3. 4. 5.

5. přihrádka pro neobarvené figurky

$$C^*(n,k) = C^*(5,10) =$$

$$= \binom{5+10-1}{5-1} = \binom{14}{4}$$

2.3.8. Máme 7 *různých* figurek a tři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit?

1\. 2. 3. _ _ _ _ 7!

$$P_0 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7 = V^*(3,7)$$

- uspořádaný
- s opakováním

$\} \Rightarrow V^*(n,k)$

2.3.10. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit, přičemž od každé barvy by měla být alespoň jedna figurka?

$$C^*(n,k) = C^*(4,6) = \binom{4+6-1}{4-1} = \binom{9}{3}$$

$10 - 4 = 6$ zůstane 6 figurek, které rozdělíme libovolně do 4 přihrádek

Počet možností odpovídá počtu pořadí teček a zarážek.

$\bullet | \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet |$

$$P^*(6,3) = \binom{9}{3} = \binom{9}{6}$$

2.3.34. Keltský druid Travedik vaří lektvary ze sta různých bylin. Mezi nimi jsou i šalvěj třeskutá a puchejřníček smradlavý, což jsou dvě Travedikovy nejmocnější bylinky. Při vaření lektvarů může použít jednu, dvě, tři, či libovolný větší počet bylin. Kterých lektvarů je více, těch, které obsahují šalvěj třeskutou a puchejřníček smradlavý a nebo těch, které alespoň jednu z těchto bylin neobsahují?

100 – bylin

Š

P

P_1 ← obsahují Š i P

P_2 ← neobsahují Š nebo P nebo ani Š ani P.

Kolik je všech možných lektvarů – uspořádaný? neuspořádaný

$$P_{všech} = 100 + \binom{100}{2} + \binom{100}{3} + \dots + \binom{100}{99} + \underbrace{\binom{100}{100}}_{1} = 2^{100} - 1$$

<u>Binomická věta</u>

$$(x+1)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} x^k$$

Pro $x = 1$

$$2^{100} = \binom{100}{0} + \binom{100}{1} + \dots + \binom{100}{100}$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n}$$

- Počet bin. řetězců délky 100

$\underline{0}\ \underline{0}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \ldots\ \underline{1}\ \underline{0}\ \underline{1}$

$P = 2\cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{100} = V^*(2,100)$

- Počet všech podmnožin množiny o 100 prvcích.

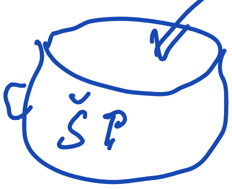
$P = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$

$\emptyset$

$=$ Počet všech lektvarů $+1$

žádná bylina nepoužita

+ další byliny



$P_1 = 2^{98} = \binom{98}{0} + \binom{98}{1} + \dots + \binom{98}{98}$

$P_2 = P_{všech} - P_1$

$= (2^{100} - 1) - 2^{98}$

$P_1 \overset{?}{>} P_2$

$2^{98} > (2^{100} - 1) - 2^{98}$