Kombinatorické výběry s opakováním

1.

2.2.1. Kolika způsoby můžeme postavit šest artistů do pyramidy $3 + 2 + 1$? Rozlišujeme pouze kdo stojí na zemi, kdo v první vrstvě a kdo nahoře, ale už nerozlišujeme, komu stojí další řada na levém a komu na pravém rameni.

2. Kolik anagramů lze vytvořit z písmen slova ABRAKADABRA.

A – 5x, B – 2x, R – 2x, K – 1x, D – 1x

a) Všech

$$P_0 = P^*(k_1, k_2, \dots, k_p) = \frac{11!}{5!\,2!\,2!\,1!\,1!} =$$

p – počet druhů znaků

$$k_1 + k_2 + \dots + k_p = n \qquad = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_p!} = \underline{\underline{83160}}$$

n – počet znaků

b) Takových, které začínají a končí písm. B

$$\underline{B}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{9 \text{ pozic pro ostatní znaky}}\ \underline{B}$$

$$P^*(5,2,1,1) = \frac{9!}{5!\,2!\,1!\,1!} = 1512 = P_b$$

c) Takových, které začínají nebo končí písm. B.

1.) B _ _ _ _ _ _

2.) _ _ _ _ _ _ B

3.) B _ _ _ _ _ B

$$P_1 = P^*(5,2,1,1,1)$$

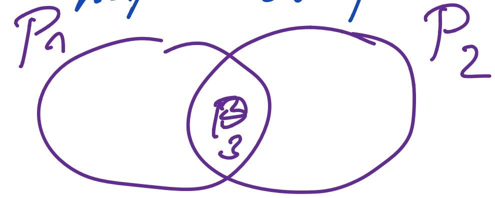
$$P_2 = P_1 = \frac{10!}{5!\,2!}$$

$$P_3 = P_b$$

$$P_c = P_1 + P_2 + \cancel{P_3}$$

$$P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$$

nejsou disjunktní!



$$P_c = P_1 + P_2 - P_3 =$$

28 728

ABRAKADABRA

d) Anagramy, které neobsahují BB

_ _ _ BB _ _ _

P_1 ← 1 znak

$P_1 = $ (BB za sebou) $= P^*(5,2,1,1,1)$

$= \frac{10!}{5!\,2!}$

$P_d = P_a$ (všechny anagramy) $- P_1 =$

$= 68\,040$

BB

_ _ _ _ _ _ _ _ _

10 možností $10 \cdot P^*(5,2,1,1)$

$= 10 \cdot \frac{9!}{5!\,2!} =$

$= P^*(5,2,1,1,1)$

Jiný způsob výpočtu.

B B

$P_d = P_1 \cdot P_2 = P^*(5,2,1,1) \cdot C(10,2) =$

seřazení ostatních znaků

jak umístit B a B mezi znaky $= \frac{9!}{5!\,2!} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2}$

e) Anagramy, které nedosahují AA

~~$P_e = P_a - P_1$~~ A A A _ _ AA _

~~2 A za sebou~~

5x A

P_1 · _ · _ · _ · _ · _ · _ ·

seřazení ostatních znaků (bez A)

$$P_1 = P^*(2,2,1,1) = \frac{6!}{2!\,2!} = 180$$

P_2 – počet možností jak umístit 5x A mezi zbylé znaky

$$P_2 = C(7,5) = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 3 \cdot 7 = 21$$

$$P_e = P_1 \cdot P_2 = 180 \cdot 21 = 3780$$

Druhý způsob výpočtu

_ A _ . _ A _ . _ A _ . _ A _ . _ A _ — oddělit Áčka

— zbylé 2 znaky

Umístit ostatní znaky mezi A tak, aby A nebyly vedle sebe.

P_1 - výběr pozic pro zbylé znaky, 6 vybírání 2x s opak.

$$P_1 = C^*(6,2) = \binom{6+2-1}{5} = \binom{7}{5}$$

$$C^*(n,k) = \binom{n+k-1}{n-1}$$

P_2 — počet možností, jak znaky na vybraných pozicích seřadit

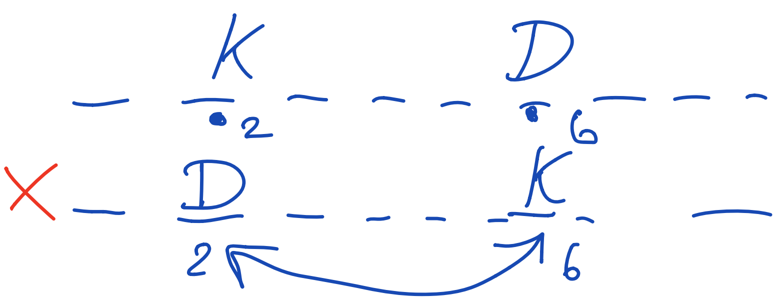
$$P_2 = P^*(2,2,1,1) = \frac{6!}{2!\,2!}$$

$$P_e = P_1 \cdot P_2 = \frac{6!}{2!\,2!} \cdot \binom{7}{5}$$

ABRAKADABRA

f) Anagramy kde písmeno K předchází písmeno D.

$$P_f = \frac{1}{2} P_a$$



2.2.6. Na patnáct stožárů v řadě budou pověšeny vlajky pěti zemí, každá třikrát. Kolik existuje možností?

A A A B B B C C C D D D E E E

$$P_0 = P^*(3,3,3,3,3) = \frac{15!}{3!\,3!\,3!\,3!\,3!}$$

poč. možností rozvěšení, stejný jako počet anagramů slova

2. způsob

A A A

$$P_0 = C(15,3)$$

$$= \binom{15}{3}\cdot\binom{12}{3}\cdot\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3} =$$

$$= \frac{15!}{\cancel{(15-3)!}\,3!}\cdot\frac{\cancel{12!}}{(12-3)!\,3!}\cdots = P^*(3,3,3,3,3)$$

ABRAKADABRA

$$P_a = \binom{11}{5}\cdot\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}$$

2.3.4. Kolika způsoby je možné napsat číslo 7 jako součet právě čtyř přirozených sčítanců? (dovolíme i nulové sčítance!) Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.

{neznámena uspoř. výběr}

$$7 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad 0 \le x_i \le 7$$

$$\left.\begin{aligned} 7 &= 0 + 1 + 2 + 4 \\ 7 &= 1 + 2 + 0 + 4 \end{aligned}\right\} \text{různé možnosti}$$

$$P_0 = C^*(n, k) = \binom{n+k-1}{n-1}$$

$$= C^*(4, 7) =$$

$$7 = \underset{1}{\sqcup} + \underset{11}{\sqcup} + \sqcup + \underset{1111}{\sqcup}$$

$$= \binom{10}{3}$$

• | • • | | • • • •

• • • | | • • • | •

vybíráme ze 4 přihrádek 7x s opakováním.

$$7 = 3 + 0 + 3 + 1$$

Kolik je pořadí 7 teček a 3 čárek?

A A A A A A A B B B

$$P^*(7, 3) = \frac{10!}{7!\,3!} = \binom{10}{3} = C^*(4, 7)$$

2.3.5. Kolika způsoby je možné napsat číslo 7 jako součet právě čtyř kladných přirozených sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.

$$7 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \,, \quad 1 \leq x_i \leq 7$$

$$\underline{1} \quad \underline{1} \quad \underline{1} \quad \underline{1}$$

zůstane rozdělit zbylé tři 1

$$\underline{111} \quad \underline{} \quad \underline{} \quad \underline{}$$

$$7 = 4 + 1 + 1 + 1$$

$$C^*(4, 3) = \binom{4+3-1}{4-1} = \binom{6}{3}$$

$$\bullet \,|\, \bullet \,|\, \;|\, \bullet$$

$$P^*(3, 3) = \frac{6!}{3!\,3!} =$$

2.3.6. Kolika způsoby je možné napsat k jako součet n kladných sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.

$$1 \le x_i \le k$$

$$C^*(n, k-n) = \binom{n+k-n-1}{n-1} \qquad n \le k$$

2.3.7. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit?

$$C^*(n,k) = C^*(4,10) = \binom{13}{3}$$

$$P^*(10,3) = \frac{\cancel{14!}\ \cancel{10!}\ 13!}{10!\ 3!}$$

barvy

Přihrádky − 1

1. 2. 3. 4

2.3.9. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak některé figurky obarvit?

$$C^*(n,k) = C^*(5,10) = \binom{14}{4}$$

1. 2. 3. 4. 5.

neobarvené figurky

$$P^*(4,10) = \frac{14!}{4!\,10!} = \binom{14}{4}$$

2.3.8. Máme 7 *různých* figurek a tři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit?

Výběr – uspořádaný
– s opakování

1. 2. 3 . . . 7. ← různé figurky

$$P_o = V^*(n,k) = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 =$$

$$= 3^7 = V^*(3,7) = n^k$$

2.3.10. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit, přičemž od každé barvy by měla být alespoň jedna figurka?

2.3.34. Keltský druid Travedik vaří lektvary ze sta různých bylin. Mezi nimi jsou i šalvěj třeskutá a puchejřníček smradlavý, což jsou dvě Travedikovy nejmocnější bylinky. Při vaření lektvarů může použít jednu, dvě, tři, či libovolný větší počet bylin. Kterých lektvarů je více, těch, které obsahují šalvěj třeskutou a puchejřníček smradlavý a nebo těch, které alespoň jednu z těchto bylin neobsahují?