5 Při hodu třemi 6-stěnnými kostkami

a) Je lepší si vsadit, že nepadne žádná 6-ka, nebo že padne alespoň 1 6-ka.

A – nepadne žádná 6

B – padne alespoň jedna 6

$$|\Omega| = 6\cdot 6\cdot 6 = V^{*}(6,3) = 6^3 = 216$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$$

$$|A| = 125 = 5^3 = V^{*}(5,3)$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = 1 - P(A) = \frac{91}{125}$$

$$|B| = |\Omega| - |A| = 216 - 125 = 91$$

$$A = \overline{B} =$$

$$B = \Omega - \overline{B} = \Omega - A$$

$$\underline{\underline{P(A) > P(B)}}$$

b) Jaká je pravděp., že padne právě 1 šestka.

$\underline{\underline{C}}$ – právě 1 6-ka,

$$|C| = 5\cdot 5\cdot 3$$

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{75}{216}$$

⑥ Házíme 4x mincí. Jaká je pravděp., že

a) padne 4x za sebou hlava?

A – 4x hlava   HHHH $\Omega = \{(H,H,H,H),$

$(H,O,H,O), \dots\}$

$P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16} = \frac{|A|}{|\Omega|}$ $|\Omega| = 2^4$

$A = \{(H,H,H,H)\}$

b) padne HOOH

B – padne HOOH

$P(B) = P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

c) padne 2x H a 2x O v lib. pořadí.

$P(C) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

HHOO
OOHH
HOHO
OHOH
HOOH

$P^*(2,2) = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{24}{4} = 6$

d) padne alespoň 1x H.

_ O _ O

$\binom{4}{2}$ výběr pozic pro O

$P(D) = \frac{16-1}{16} = \frac{|\Omega| - |\bar{D}|}{|\Omega|}$

$|D| = |\Omega| - |\bar{D}|$

$\bar{D}$ – nepadne žádná hlava

(7) Ve třídě je 25 žáků. S jakou pravděp. budou alespoň 2 slavit narozeniny ve stejném dni. (Narození ve stejném dni v roce)

$$\Omega = \{ (1.1., 31.12., , 4.5., 28.2., \ldots\ldots,), (2.1., \quad , 2.1., 28.2., 2.1., \ldots\ldots) \ldots \}$$

$$|\Omega| = 365^{25} = 365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365$$

A – alespoň 2 narození ve stejný den

$\bar{A}$ – žádní 2 lidé nejsou nar. ve stejný den

$$|\bar{A}| = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365-25+1)$$

$$= V(365, 25) = \frac{365!}{(365-25)!}$$

$$P(A) = \frac{365!}{365^{25}(365-25)!} = 0{,}5687$$

$$25 = n \qquad 25 = n$$

$$P(A) > 50\,\%$$

Závislé, nezávislé jevy
střední hodnota.

- Dva hráči hází kostkou. Jsou jejich hody nezávislé?

ANO – Nezávislé pokusy (jevy)

pro hod kostkou → $E_1 = \{1\}, E_2 = \{2\}, \ldots E_6 = \{6\}$

- Dva různé elementární jevy

a) Jsou vždy disjunktní?

ANO

b) Jsou vždy nezávislé?

NE – (Jsou vždy závislé)

$$\underset{\neq 0}{P(E_1)} \cdot \underset{\neq 0}{P(E_2)} = P(E_1 \cap E_2) = 0$$

$$\underbrace{a \cdot b \neq 0}_{\Rightarrow \text{ závislé}}$$

- Dva disjunktní jevy.

a) Mohou být nezávislé

A,B ← disjunktní

$$P(A)\cdot P(B) = P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$

$$\overset{\shortparallel}{0}$$

Pro $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$.

Mohou pro $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$

A,B jsou disjunktní $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

Definice: A,B jsou nezávislé $\Leftrightarrow$

$$\underline{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

$$(P(A|B) = P(A))$$

Př: Mějme pravděp. prostor $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ s uniformní pravděpodobností.
(Hod 8 stěnnou kostkou)

a) Jsou jevy $A = \{1,2,3,4\}$ a $B = \{5,6,7,8\}$ nezávislé?

$$P(A \cap B) \overset{?}{=} P(A) \cdot P(B) \qquad P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$0 \cancel{=} \frac{1}{4} \qquad P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$

$\Rightarrow A, B$ – závislé

b) Jsou jevy $A = \{1,2,3,4\}$ a $C = \{1,3,5,7\}$ nezávislé?

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad P(C/A) = P(C)$$

$$P(C) = \frac{1}{2} \qquad P(A/C) = P(A)$$

$$P(A \cap C) = P(\{1,3\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) \cdot P(C) = P(A \cap C)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} ✓$$

$\Rightarrow A, C$ jsou nezávislé.

Př: Kolik šestek padne průměrně při hodu pěti kostkami?

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i$$

X – náhodná veličina

X – počet šestek při hodu 5-ti kostkami.

x_i – hodnoty X

$X = \{0, 1, 2, \dots, 5\}$

$\uparrow x_1 \quad \uparrow x_2 \quad \uparrow x_6$

P_i – odpovídající pravděp

P_1 – pravděp., že nepadne 6

P_2 – — " — padne jedna 6

P_3 –

⋮

P_6 – — " — padne pět 6-tek.

$$P_1 = \frac{|X_1|}{|\Omega|} = \frac{5^5}{6^5}$$

$$P_2 = \frac{|X_2|}{|\Omega|} = \frac{1 \cdot 5^4 \cdot 5}{6^5}$$

$$P_3 = \frac{|X_3|}{|\Omega|} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 5^3 \cdot \binom{5}{2}}{6^5}$$

$\_\,\underline{6}\,\_\,\underline{6}\,\_$

⋮

P_4 = sám

$$P_5 = \frac{|X_5|}{|\Omega|} = \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 5\cdot \binom{5}{4}}{6^5}$$

$$P_6 = \frac{|X_6|}{|\Omega|} = \frac{1}{6^5}$$

$$E(X) = P_1\cdot X_1 + \dots + P_6 X_6 = P_1\cdot 0 + P_2\cdot 1 + \dots + P_6\cdot 5$$
$$= \frac{5}{6}$$

Druhý zp. výpočtu

Y ← průměrný počet 6-tek při hodu 1 kostkou.

$$E(Y) = 0\cdot P_0 + 1\cdot P_1 \qquad Y = \{0, 1\}$$
$$= 0\cdot\frac{5}{6} + 1\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

P_1 - pravděp., že padne 6-ka

$$X = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5$$

$$E(X) = E(Y_1) + E(Y_2) + \dots + E(Y_5)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Př: Kolik je třeba průměrně hodů mincí, aby vyšly dva stejné výsledky.

X – počet hodů mincí do st. výsledku

$X = \{2, 3\}$ $\quad E(X) = P_2 X_2 + P_3 X_3$

P_2 – pravděp, že po dvou hodech – st. výsledk

$P_2 = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$

P_3 – pravděp, ~~po~~ po třech – " –

$P_3 = \frac{1}{2} = 1 - P_1 = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$

$$E(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Př: Kolik je třeba průměrně hodů mincí, kde H má pravděp p (p nemusí být $\frac{1}{2}$), aby vyšly 2 stejné výsledky?

Př: V šuplíku je po 6-ti ponožkách od každé z barev černá, šedá, bílá. Kolik ponožek musíme průměrně vytáhnout, abychom dostali jednobarevný pár?

X – počet ponožek vytažených do stejně barevného páru

$X = \{2, 3, 4\}$ $\quad E(X) = P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4$

P_2 – pravděp, že na-podruhé mám pár

$P_2 = 1 \cdot \frac{5}{17} = \frac{5}{17}$

$P_4 = 1 \cdot \frac{12}{17} \cdot \frac{6}{16} \cdot 1 = \frac{9}{34}$

$P_3 = \frac{18}{18} \cdot \frac{12}{17} \cdot \frac{10}{16} = \frac{15}{34}$

$E(X) = 2 \cdot \frac{5}{17} + 3 \cdot \frac{15}{34} + 4 \cdot \frac{9}{34} = \frac{101}{34}$

Př: Házíme kostkou, která není spravedlivá. Čísla 1, 2 padnou s pravděp. $1/5$, čísla 4, 5 a 6 s pravděp. $1/7$. Pravděp pro č. 3 neznáme. Jaký je průměrně počet ok, která na kostce padnou?

$E(x) = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots + 6 \cdot p_6 = 3{,}5$ pro spr. kostku

$P_3 = ?$ $\quad P_3 = 1 - (P_1 + P_2 + P_4 + P_5 + P_6)$

Př: V kapse kabátu je 5 mincí. Tři jsou 2-koruny a 2 jsou 5-koruny. Při nahodném vytažení 2 mincí. Jaká bude v průměru jejich hodnota?

X – hodnoty vytažených mincí

$$X = \{4,\ \_\ \ \_\ \ \_\}$$