5 Při hodu třemi 6-stěnnými kostkami

a) Je lepší si vsadit, že nepadne žádná 6-ka, nebo že padne alespoň 1 6-ka.

A - nepadne žádná 6-ka

B - padne alespoň 1 6-ka

$P(A) \overset{?}{>} < P(B)$

$\Omega = \{(1,1,1)\ (2,2,2), (1,2,3) \dots\}$

$|\Omega| = 6^3 = V^*(6,3)$

$A = \{(1,1,1), (\dots)$

3 ce bez 6-tky

$|A| = 5^3 = V^*(5,3)$

$P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$

$P(B) = \cancel{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \cdot \frac{5}{6}$

alespoň 1 6-ka

1 x 6-ka, 2 x 6-ky, $\underbrace{3 \times 6\text{ka}}_{1 \text{ možnost}}$

$\underline{6}\ \underline{6}\ \underline{\ }$ 5 možností

6 _ 6

_ 6 6

$\binom{3}{1} \cdot 5 = 15$

$\underbrace{\binom{3}{2} \cdot 5 \cdot 5}$

$3 \cdot 25 = 75$

$|B| = 1 + 15 + 75 = 91$

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{91}{216}$

$P(A) > P(B)$

Jiný způsob.

$B = \bar{A} = \Omega \setminus A$

$|B| = |\Omega| - |A| = 216 - 125 = 91$

$P(B) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$

b) Jaké je pravděp. že padne právě 1 šestka.

C - právě 1 6-ka $\quad P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{216} = ?$

⑥ Házíme 4x minci. Jaká je pravděp., že

a) padne 4x za sebou hlava?

HHHH $\quad P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

$p(\text{padne hlava}) = \frac{1}{2}$ $\quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$

$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_4)$

b) padne $\underline{H}\,\underline{O}\,\underline{O}\,\underline{H}$

$$P(B) = P(A) = \frac{1}{2^4} = \frac{|B|}{|\Omega|}$$

$\Omega = \{$uspořádané 4-ce výsledků$\}$

$|\Omega| = V^*(2,4) = 2^4 \quad |B| = 1$

c) padne 2x H a 2x O v lib. pořadí.

$$P(C) = \frac{8}{2^4} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

HHOO
HOHO
⋮

$\Big\} = |C| = P^*(2,2) = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{24}{4} = 8$

$= C(4,2) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 8$

d) padne alespoň 1x H.

1x H nebo 2x H ... 4x H $\qquad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\bar{D} = \Omega \setminus D = \{$nepadne žádná H$\}$ $\quad$ HH OO

$= \{(0,0,0,0)\}$ $\quad P(\bar{D}) = \frac{1}{16} \Rightarrow P(D) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

(7) Ve třídě je 25 žáků. S jakou pravděp. budou alespoň 2 slavit narozeniny ve stejném dni. (Narození ve stejném dni v roce)

A - Alespoň 2 lidé mají naroz. ve stejný den.

$\bar{A}$ - Žádní 2 žáci nejsou narození ve stejný den.

$C(25, 365) = |\bar{A}|$

$\Omega = \{ (\underbrace{1.1., 31.12., 2.5., \dots, 31.12.}_{25\text{-tice}}),$

(_ _ _)

uspořádaná 25-tice - dní v roce $\}$

$|\Omega| = 365^{25} = V^*(365, 25)$

$|\bar{A}| = V(365, 25) = \dfrac{365!}{(365-25)!} =$

$= C(365, 25) \cdot 25!$

$$P(\bar{A}) = \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} \Rightarrow$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) =$$

$$= 1 - \frac{365!}{(365-25)!\, 365^{25}} =$$

$$\doteq 0{,}5687 > 50\,\%$$

n - lidi ve skupině

$$P(A) = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^{n}}$$

Závislé, nezávislé jevy. Střední hodnota.

- Dva hráči hází kostkou. Jsou jejich hody nezávislé?

ANO

- Dva různé elementární jevy

  a) Jsou vždy disjunktní?

  $\{1\}, \{2\}, \{3\}$
  $\{4\}, \{5\}, \{6\}$

  Disjunktní $\Rightarrow (A \cap B) = \emptyset$

  ANO

  b) Jsou vždy nezávislé?

  NE Vždy jsou závislé.

- Dva disjunktní jevy:

  a) Mohou být nezávislé

  $(A \cap B) = \emptyset$

  $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(\emptyset)$

  ANO

  $0\,?\qquad = \qquad 0$

  $P(A) \cdot P(B) = 0$ jestliže $P(A) = 0$ nebo $P(B) = 0$

Definice pro nez. jevy tj $A = \emptyset$ neb $B = \emptyset$

A, B jsou nezávislé $\Leftrightarrow$

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Pro elem. jevy E_1, E_2

$$P(E_1 \cap E_2) = 0 \cancel{=} \underbrace{P(E_1)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{P(E_2)}_{\neq 0} \neq 0$$

Př: Mějme pravděp. prostor $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
s uniformní pravděpodobností.
(Hod 8 stěnnou kostkou)

a) Jsou jevy $A = \{1,2,3,4\}$ a $B = \{5,6,7,8\}$ nezávislé?

$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) \iff A, B$ jsou nezávislé

$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\quad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$|\Omega| = 8$

$|A| = 4$

$A \cap B = \emptyset$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq P(A \cap B) = 0$

A, B jsou závislé!

b) Jsou jevy $A = \{1,2,3,4\}$ a $B = \{1,3,5,7\}$ nezávislé?

$$P(A/B) = P(A)$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$P(A) = \frac{1}{2}$ $\quad P(B) = \frac{1}{2}$

$(A \cap B) = \{1,3\}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \checkmark \Rightarrow$$ A, B jsou nezávislé

Př: Kolik šestek padne průměrně při hodu pěti kostkami?

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$X \leftarrow$ počet 6-tek při hodu 5-ti kostkami

$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$p_0 = ?$, $p_1 = ?$ . . . . $p_5 = ?$

$$p_0 = \frac{5^5}{6^5}$$

$$p_1 = \frac{5^4 \cdot 1 \cdot 5}{6^5}$$

$$\frac{\cdot}{5} \; \frac{6}{\times} \; \frac{\cdot}{5} \; \frac{\cdot}{5} \; \frac{6}{} \binom{5}{2}$$

$$p_2 = \frac{5^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \binom{5}{2}}{6^5}$$

$$p_3 = \frac{5^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \binom{5}{3}}{6^5}$$

$$E(x) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

$p_4 = \ldots$

$$p_5 = \frac{1}{6^5}$$

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$$

$$E(x) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_5)$$

$E(X_i)$ — průměrný počet
6-tek na 1 kostce

X_i — počet 6-tek na 1 kostce

$X_i = \{0, 1\}$

$$E(X_i) = \sum_{i=0}^{1} p_i X_i = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{6}$$

$$E(X) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Př: Kolik je třeba průměrně hodů mincí, aby vyšly dva stejné výsledky.

X – počet hodů mincí ke dvoum stejným výsledkům

$X = \{2, 3\}$

$$E(X) = \sum_{i=2}^{3} p_i x_i = 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3$$

OO

HH

OH_ cokoli

HO_

$$P_2 = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$P_3 = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{2}$$

$$P_3 = \bar{P}_2 = 1 - P_2$$

Př: Kolik je třeba průměrně hodů mincí, kde H má pravděp. p (p nemusí být $\frac{1}{2}$), aby vyšly 2 stejné výsledky?

Př: V šuplíku je po 6-ti ponožkách od každé z barev černá, šedá, bílá. Kolik ponožek musíme průměrně vytáhnout, abychom dostali jednobarevný pár?

X – počet pokusů do vytažení jednob. páru

$X = \{2, 3, 4\}$

$p_2 = 1 \cdot \frac{5}{17}$ $\quad p_3 = 1 \cdot \frac{12}{17} \cdot \frac{10}{16}$ $\quad p_4 = 1 \cdot \frac{12}{17} \cdot \frac{6}{16} \cdot 1$

$$E(X) = 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 = \underline{\underline{\frac{101}{34}}}$$

$=$

Př: Házíme kostkou, která není spravedlivá. Čísla 1, 2 padnou s pravděp. $1/5$, čísla 4, 5 a 6 s pravděp. $1/7$. Pravděp pro č. 3 neznáme. Jaký je průměrný počet ok, která na kostce padnou?

Sami

Př: V kapse kabátu je 5 mincí. Tři jsou 2-koruny a 2 jsou 5-koruny. Při nahodném vytažení 2 mincí. Jaká bude v průměru jejich hodnota?

Sami