Diskrétní pravděpodobnost

Konečný pravděpodobnostní prostor:

(Ω, P) $\quad A \subseteq \Omega \quad$ Ω – všechny možné výsledky nah. pokusu.

Klasická pravděpodobnost $\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}}$

Ω – uniformní pravděp. prostor (elementární jevy jsou stejně pravděp.)

Vlastnosti P

- $0 \le P(A) \le 1 \quad \forall A \subseteq \Omega$
- $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

jsou disjunktní.

1. Házíme 6 stěnnou kostkou. Jaká je pravděp. že

a) padne liché číslo

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A - padne liché č.

$A = \{1, 3, 5\}$

je uniformní

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

b) padne prvočíslo ← B

$B = \{2, 3, 5\}$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

c) padne 1 nebo 2 ← C

$C = \{1, 2\}$

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

d) součet horní a dolní stěny je 7 ← $D = \{1, \dots, 6\}$

$$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = 1 = \frac{6}{6}$$

e) součet horní a dolní stěny je 3 ← E

$$P(E) = \frac{0}{6} = 0$$

$$E = \{\ \} = \emptyset$$

② Při hodu dvěma kostkami

a) Je pravděpodobnější, že padne 5 a 6, nebo že padnou dvě 3?

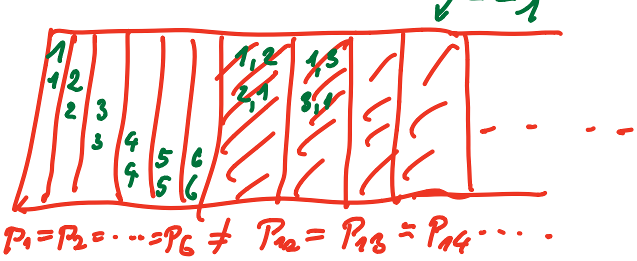
$\Omega_1 = \{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{3,3\}\dots\}$

$|\Omega_1| = 6 + \binom{6}{2} = 6 + \frac{6\cdot 5}{2} = 6 + 15 = 21$

A – padne 5 a 6 $\quad A = \{\{5,6\}\}$

$P(A) \neq \cancel{\frac{1}{21}} \neq \frac{|A|}{|\Omega|}$

není uniformní



$\Omega_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\dots\}$

$|\Omega_2| = 6\cdot 6 = V^*(6,2) = 6^2 = 36$

A – padne 5 a 6 $\quad A = \{(5,6),(6,5)\}$

$P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$

$P(B) = \frac{1}{36}$

c) Součet 10

C

$C = \{(5,5),(6,4),(4,6)\}$

$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

B – padnou 2 3-ky

$B = \{(3,3)\}$

d) Jaká je pravděp., že padne součin 12

$D = \{(4,3),(6,2),(2,6),(4,3)\}$

$P(D) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

(3) Sestavte funkci $P(n)$ pro pravděpodobnost, že při současném hodu n-kostkami, $n \geq 1$

a) padne součet n

$$\Omega = \{(1,1,\dots,1),(1,1,\dots,2),(3,1,5,6,\dots,1),\dots\}$$

$$|\Omega| = 6^n = V^*(6,n)$$

A - součet je n $\quad A = \{(1,1,\dots,1)\}$

$$P_n = \frac{|A|}{|\Omega|} = \underline{\underline{\frac{1}{6^n}}} \quad \text{pro } n \geq 1$$

b) padne součet 3

$$\Omega = \{(1,1,1\dots) \dots\}$$

$$|\Omega| = 6^n$$

pro $n = 1$ $\quad P(A_3) = \frac{1}{6}$

A_3 - padne součet 3

pro $n = 2$ $\quad P(A_3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$$A_3(2) = \{(1,2),(2,1)\}$$

$$A_3(3) = ? \text{ sami}$$

$$A_3(4) = \quad P(A_3(4)) = 0$$

$$P(A_3(n)) = 0 \quad \text{pro } n \geq 4$$

④ Máme balíček 32 hracích karet.
Jaká je pravděp, že:

a) první karta je Eso.

$$P(A) = \frac{1}{8} = \frac{|A_1|}{|\Omega_1|} = \frac{4}{32}$$

Ω_1 - možné karty na první pozici

$|\Omega_1| = 32$

A = Esa na 1. pozici

$|A| = 4$

Ω_2 - všechna možná usp. balíčku

$$|\Omega_2| = P(32) = 32!$$

$$A_2 = \{(ESO_1, \overset{31!}{\ldots\ldots}), (ESO_2, \ldots\ldots), (ESO_3, \ldots), (ESO_4, \overset{31!}{\ldots\ldots})\}$$

$$|A_2| = 4 \cdot 31!$$

$$P(A) = P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega_2|} = \frac{4 \cdot 31!}{32!} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

b) třetí karta v balíčku je 10.

$$P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Ω_3 – možnosti pro 3-tí kartu v balíčku

$$P(B) = \frac{|B_2|}{|\Omega_2|} = \frac{4 \cdot 31!}{32!} = \frac{1}{8}$$

$|\Omega_3| = 32$

B – Desítka na 3-tí pozici

$|B| = 4$

$=$

$4 \cdot 31 \cdot 30 \cdot$

$\_\ \_\ \underline{\ \ }\ \_\ \_\ \_\ \_$

$\quad\ \ 1$

c) třetí je 10, víme-li, že první dvě karty jsou 7 a 10.

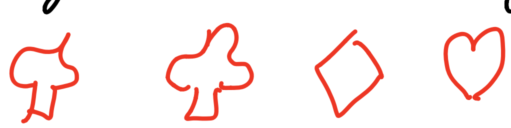
$\underline{7}\ \underline{10}$

$$P(C) = \frac{3 \cdot 29!}{30!} = \frac{3}{10}$$

$$P(C) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

$$P(C) = P(A) \cdot P(B/A)$$

d) karty od každé barvy jsou v balíčku u sebe

 $\leftarrow 4!$

$\underbrace{(\ldots\ldots)}_{8!}\underbrace{(\ldots\ldots)}_{8!}\underbrace{(\ldots\ldots)}_{8!}\underbrace{(\ldots\ldots)}_{8!}$

$$P(D) = \frac{4!\, 8!\, 8!\, 8!\, 8!}{32!}$$

jiný postup příště.