Kapitola 1. Grafy a podgrafy

1.1. Grafy a jednoduché grafy

1.1.1.$^\heartsuit$ *Ukažte, že platí* $\overline{\overline{G}} = G$, *tj. doplněk doplňku grafu* G *je právě graf* G.

1.1.2. *Může být graf svým vlastním doplňkem? Pokud ano, najděte všechny grafy, které jsou shodné se svým doplňkem.*

1.1.3.$^\heartsuit$ *Najděte příklad grafu, který je isomorfní (má stejnou strukturu) se svým doplňkem (isomorfismus je zaveden na straně ??).*

1.1.4.$^\heartsuit$ *Najdete příklad grafu na deseti vrcholech, který je isomorfní se svým doplňkem?*

1.1.5. *Najděte třídu nekonečně mnoha grafů, které jsou isomorfní se svým doplňkem.*

1.2. Stupeň vrcholu

1.2.1. *Dokažte Větu ?? indukcí vzhledem k počtu hran.*

1.2.2.$^\heartsuit$ *Kolik existuje* 0*-pravidelných grafů? Kolik z nich je souvislých (souvislost je zavedena na straně ??)?*

1.2.3. *Označme* $v(G)$ *počet vrcholů grafu* G. *Ukažte, že v každém grafu platí* $\delta(G) \le 2h(G)/v(G) \le \Delta(G)$.

1.2.4. *Ve firmě pracuje kromě ředitele i několik zaměstnanců. Mužů je mezi zaměstnanci o tři více než žen. Během doby se zaměstnanci mnohokrát stěhovali a sdíleli kanceláře. Víme, že jedenáct zaměstnanců již během doby sdílelo kancelář s dvěma kolegy, tři se čtyřmi kolegy a ostatní sdíleli kancelář s jedním, třemi nebo pěti kolegy (nevíme kolik jich je, jen víme, že takoví zaměstnanci ve firmě jsou). Ředitel má nyní kancelář sám pro sebe. Bylo tomu tak vždy?*

1.2.5. *Najděte algoritmus pro konstrukci grafu s danou stupňovou posloupností* D. *Využijte Větu Havla–Hakimiho.*

1.2.6. *Nechť* G *je* k*-pravidelný graf, kde* k *je liché číslo. Dokažte, že počet hran grafu* G, $h(G)$, *je násobkem čísla* k. *Platí to i v případě, že* k *je sudé? Co musí být splněno?*

1.2.7. *Nechť graf* G *má* n *vrcholů a* $n-1$ *hran. Ukažte, že* G *má buď vrchol stupně 1 nebo izolovaný vrchol.*

1.2.8. *Ukažte, že neexistují jednoduché grafy se stupňovými posloupnostmi* $(3,3,3,1)$ *a* $(3,3,3,1,1)$. *Dokažte i bez použití věty Havla–Hakimiho.*

1.2.9. *Najděte* všechny *různé grafy se stupňovými posloupnostmi* $(3,3,3,1,1,1)$ *a* $(3,3,2,2,1,1)$, *přičemž nerozlišujeme pojmenování vrcholů.*

1.2.10. *Je možno Větu ?? zobecnit i pro jiné než jednoduché grafy? Pokud ano, pro které? Zobecněnou větu dokažte.*

1.2.11. *Existuje některý z grafů ze Cvičení 1.2.8., pokud se neomezíme na jednoduché grafy?*

1.2.12. *Kolik existuje* 2*-pravidelných grafů na patnácti vrcholech? Kolik z nich je souvislých?*

1.2.13.$^\heartsuit$ *Kolik existuje* 3*-pravidelných grafů na šesti vrcholech?*

1.2.14.$^\heartsuit$ *Kolik existuje různých* 8*-pravidelných grafů na deseti vrcholech?*

1.2.15. *Máme 25 mobilních stanic a každá může komunikovat s ostatními na 60 různých (společných) frekvencích, přičemž dvě různé dvojice stanic nemohou komunikovat současně na jedné frekvenci. Označme* $f(G)$ *nejmenší počet spojení, který udržuje nějaká stanice v síti. Navrhněte takovou síť, aby hodnota* $f(G)$ *byla co největší a ukažte, že síť s větší hodnotou* $f(G)$ *nemůže existovat.*

1.2.16.$^\heartsuit$ *Pro jaká* n *existuje graf na* n *vrcholech, který má vrcholy* $n-1$ *různých stupňů? (Tj. všechny vrcholy až na dva jsou různého stupně.)*

1.2.17. Najděte příklad grafu s nerostoucí stupňovou posloupností $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, ze kterého odebráním libovolného vrcholu stupně d_1 nevznikne graf se stupňovou posloupností $D' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ sestavenou podle Věty ??

1.3. Podgrafy

1.3.1. Dokažte, že pro každý graf G existuje takový jeho nadgraf N, že N je pravidelný stupně $\Delta(G)$ a G je indukovaný podgraf grafu N.

1.3.2. Může být indukovaný faktor F grafu G vlastním podgrafem grafu G? Pokud ano, najděte příklad, pokud ne, dokažte.

1.3.3. Předpokládejme, že rozlišujeme jednotlivé vrcholy grafu G (například označením). Kolik různých faktorů má graf G?

1.3.4. Předpokládejme, že rozlišujeme jednotlivé vrcholy grafu G (například označením). Kolik různých podgrafů má kompletní graf K_n?

1.3.5. Předpokládejme, že rozlišujeme jednotlivé vrcholy grafu G (například označením). Kolik existuje různých grafů bez izolovaných vrcholů s vrcholovou množinou $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$?

1.3.6. Máme graf G, který neobsahuje vrchol stupně 0 ani žádný indukovaný podgraf s právě dvěma hranami. Ukažte, že G je kompletní graf.

1.3.7. Najděte chybu v následujícím důkazu:
Ukážeme, že každý bipartitní graf $G = (U \cup W, E)$ je podgrafem nějakého $\Delta(G)$-pravidelného bipartitního grafu. Pokud nejsou partity U a W stejné velikosti, přidáme do menší partity tolik vrcholů, aby byly obě partity stejné velikosti. Jsou-li všechny vrcholy stejného stupně, důkaz končí. Jinak najdeme ke každému vrcholu $u \in U$ stupně menšího než $\Delta(G)$ vrchol $w \in W$ stupně menšího než $\Delta(G)$, protože součet stupňů vrcholů v každé partitě je stejný. Nyní stačí spojit u a w hranou a zvýšíme tak stupeň vrcholů u a w. Je-li výsledný graf pravidelný, důkaz končí, jinak přidáváme hrany dokud výsledný nadgraf nebude pravidelný.

1.3.8. Kolik existuje indukovaných podgrafů s k vrcholy v kompletním grafu K_n? Předpokládejme, že vrcholy kompletního grafu rozlišujeme (například označením).

1.4. Implementace grafů v počítači

1.4.1. Definujte incidenční matici a matici sousednosti multigrafu se smyčkami. Čemu se rovná součet i-tého řádku a čemu součet j-tého sloupce v incidenční matici a čemu v matici sousednosti?

1.4.2. Může mít incidenční matice jednoduchého grafu dva shodné řádky nebo sloupce? Jak je tomu u multigrafu?

1.4.3. Najděte takový souvislý graf na n vrcholech, že každá mocnina matice sousednosti bude mít nějaké nulové prvky.

Kapitola 2. Cesty a cykly v grafu

Pokud graf reprezentuje nějakou síť (silniční, železniční, elektrickou, ...), tak je přirozené zkoumat, jak je možno v grafu putovat. Mezi vrcholy grafu, který reprezentuje danou síť, je dovoleno putovat jen po hranách grafu. Dospějeme k zavedení pojmu sled, tah a cesta. V druhé části kapitoly ukážeme, jak měřit vzdálenosti v grafu. V poslední části se budeme věnovat nejmenší a největší vzdálenosti mezi dvěma vrcholy v grafu a také vztahům mezi těmito parametry.

2.1. Sledy, tahy a cesty

2.1.1. Zformulujte definici sledu tak, aby připouštěla existenci i nekonečného sledu. Pro konečné grafy by měl smysl definice zůstat zachován. Jak bude definována délka sledu?

2.1.2. Dokažte Lemma ??: existuje-li v grafu G mezi dvěma vrcholy (u,v)-sled, potom v G existuje také (u,v)-cesta. Návod: Dokažte silnější tvrzení, že z každého (u,v)-sledu můžeme případným vynecháním vrcholů (a hran) dostat (u,v)-cestu.

2.1.3. Dokažte, že v jednoduchém grafu G vždy existuje cesta délky $\delta(G)$.

2.1.4.$^\heartsuit$ Najděte nějaký graf G a takový uzavřený sled S v grafu G, že S neobsahuje cyklus.

2.1.5. Dokažte, že vyskytuje-li se v uzavřeném sledu S některá hrana pouze jednou, tak sled S obsahuje cyklus.

2.1.6.$^\heartsuit$ Najděte příklad grafu G a vrcholu $v \in V(G)$ tak, že $\delta(G-v) > \delta(G)$.

2.1.7. Najděte příklad grafu G a vrcholu $v \in V(G)$ tak, že $\delta(G) = m$ a $\delta(G-v) = k$ pro libovolná čísla $k, m \in \mathbb{N}$, kde $k \geq m$.

2.1.8. Kolik různých cest existuje v kompletním grafu K_n mezi dvěma různými vrcholy u a v?

2.2. Souvislost a vzdálenost v grafu

2.2.1. Ukažte, že počet různých (u_i,u_j)-sledů délky k v grafu G je roven prvku a'_{ij} (v jiném značení $\left[A(G)^k\right]_{ij}$) matice $A(G)^k$, kde $A(G)$ je matice sousednosti grafu G a $A(G)^k$ je její k-tá mocnina, $k \in \mathbb{N}$.

2.2.2. Ukažte, že relace $\simeq$ („být dosažitelný“) zavedená v textu na straně ?? je relací ekvivalence.

2.2.3. Na straně ?? byl nadefinován pojem souvislosti užitím sledů a alternativně užitím tříd ekvivalence relace dosažitelnosti $\simeq$ (zavedena na straně ??). Ukažte, že obě definice souvislosti jsou ekvivalentní.

2.2.4. Ukažte, že vzdálenost v souvislých grafech je metrika.

2.2.5. Dokažte, že $G = (V,E)$ je souvislý právě tehdy, když pro libovolný rozklad vrcholové množiny V na dvě množiny U a W existuje hrana $e = uw \in E$ taková, že $u \in U$ a $w \in W$. (Neprázdné množiny U a W tvoří rozklad *V, jestliže $U \cup W = V$ a $U \cap W = \emptyset$).*

2.2.6. Kolik nejvíce hran může mít graf s n vrcholy a k komponentami? Dokažte.*

2.2.7. Dokažte, že je-li $\delta(G) > \lfloor v(G)/2 \rfloor - 1$, tak graf G je souvislý.

2.2.8. Najděte takové sudé číslo n a takový nesouvislý graf G, že $n = v(G)$ a G je pravidelný graf stupně $(n/2-1)$.

2.2.9. Nechť u je vrchol lichého stupně v grafu G. Ukažte, že potom v G existuje (u,v)-cesta do vrcholu v, který je také lichého stupně.

2.2.10. Máme osmi litrovou nádobu s vínem a dvě prázdné nádoby – pětilitrovou a třílitrovou. Rozdělte osm litrů na čtyři a čtyři litry jen s užitím těchto nádob, bez použití odměrky. Úlohu namodelujte grafem a najděte nejkratší řešení a popište všechna přípustná řešení.

2.2.11. Změňte objem a) třílitrové b) pětilitrové nádoby tak, aby úloha ze Cvičení 2.2.10. neměla řešení. Najděte jiná než triviální řešení, kdy jsou některé dvě nádoby stejně velké.

2.2.12. Kolik různých (u, v)-sledů délky k existuje mezi některými dvěma vrcholy u, v v grafu a) C_4, b) C_5, c) K_4?*

2.3. Excentricita, poloměr a průměr grafu

2.3.1. Ukažte, že doplněk nesouvislého grafu je souvislý.

2.3.2. Určete poloměr a průměr následujících grafů: a) grafy na Obrázku ??, b) kompletní graf K_n, c) Q_n hyperkrychle řádu n.

2.3.3. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla n, m, která splňují podmínku $n \le m \le 2n$, existuje takový graf G, že $\mathrm{rad}(G) = n$ a $\mathrm{diam}(G) = m$.

2.3.4. Mějme dáno přirozené číslo k. Najděte příklad grafu, ve kterém má centrum k komponent.

2.3.5. Mějme dáno přirozené číslo d. Najděte příklad grafu G, ve kterém je centrum tvořeno dvěma vrcholy jejichž vzdálenost v grafu G je d.

2.3.6.♡ Ukažte, že je-li graf H podgrafem grafu G, tak pro každé dva vrcholy z $V(H)$ platí $\mathrm{dist}_G(u, v) \le \mathrm{dist}_H(u, v)$.

2.3.7.♡ Najděte takový příklad grafu G a jeho podgrafu H, že a) $\mathrm{diam}(G) < \mathrm{diam}(H)$, b) $\mathrm{diam}(G) > \mathrm{diam}(H)$.

2.3.8. Ukažte, že je-li G graf s průměrem $\mathrm{diam}(G) \ge 4$, tak potom platí $\mathrm{diam}(\overline{G}) \le 2$.

2.3.9. Ukažte, že má-li graf G poloměrem $\mathrm{rad}(G) \ge 3$, tak potom platí $\mathrm{rad}(\overline{G}) \le 2$.

2.3.10. Ukažte, že excentricita dvou sousedních vrcholů se liší nejvýše o jedna.

2.3.11. Platí některá z následujících implikací? a) Je-li graf pravidelný, pak všechny jeho vrcholy mají stejnou excentricitu. b) Mají-li všechny vrcholy daného grafu stejnou konečnou excentricitu, pak se jedná o pravidelný graf.

2.3.12. Máme dán graf G. Najděte takový jeho nadgraf N, že G je centrem grafu N.

Kapitola 3. Stromy a cykly

Stromy patří ke strukturám, se kterými se setkáváme nejen v přírodě, ale i v řadě aplikací: třídící a rozhodovací algoritmy, rodokmeny, ... Všechny příklady mají jedno společné: příslušná struktura neobsahuje (nebo by neměla obsahovat) objekty spojené „v kruhu“. Takový „uzavřený kruh“ nebo „cyklus“ by odpovídal nekonečné smyčce v algoritmu, incestu v rodině, a podobně.

3.1. Stromy

3.1.1. Dokažte, že každý netriviální strom má nejméně dva listy.

3.1.2. Bez použití Věty ?? dokažte, že graf T_n na n vrcholech je strom právě tehdy, jestliže má $n-1$ hran a je souvislý.

3.1.3. Bez použití Věty ?? dokažte, že graf T_n na n vrcholech je strom právě tehdy, jestliže má $n-1$ hran a je acyklický.

3.1.4. Dokažte, že strom T_n na alespoň třech vrcholech je cesta právě tehdy, když $\Delta(T_n) = 2$.

*3.1.5. Dokažte, že strom T_n je hvězdou (*hvězda *je strom, obsahující nejvýše jeden vrchol stupně vyššího, než 1) právě tehdy, když $\Delta(T_n) = n-1$.*

3.1.6. Mějme strom T_n a nechť $\Delta(T_n) = k$. Dokažte, že potom T_n obsahuje alespoň k vrcholů stupně 1.

3.1.7. Dokažte, že strom T_n je netriviální cesta právě tehdy, když obsahuje přesně dva vrcholy stupně 1.

3.1.8. Nechť F_n je les s k komponentami. Dokažte, že $h(F_n) = n-k$.

3.1.9. Charakterizujte třídu grafů, pro které platí, že každý jejich souvislý podgraf je jejich indukovaným podgrafem.

3.1.10. Nechť T_n je netriviální strom na n vrcholech a v je jeho vrchol takový, že $\deg(v) = k$. Dokažte, že $\omega(T_n - v) = k$.

3.1.11. Použijte výsledek (předcházejícího) Cvičení 3.1.10. k důkazu implikace (??) ⇒ (??) ve Větě ??

3.1.12. Dokažte, že má-li graf G s alespoň jednou hranou všechny vrcholy sudého stupně, potom G obsahuje cyklus.

3.1.13. Dokažte, že je-li $\delta(G) \geq 2$, potom G obsahuje cyklus.

3.1.14. Dokažte, že je-li $\delta(G) \geq 2$, potom G obsahuje dokonce i cyklus délky alespoň $\delta(G)+1$.

3.1.15. Ukažte, že ve stromu T s alespoň třemi vrcholy je excentricita listového vrcholu vždy větší, než excentricita sousedního vrcholu.

3.1.16. Ukažte, že ve stromu T s alespoň třemi vrcholy je vždy $\mathrm{rad}(T) < \mathrm{diam}(T)$.

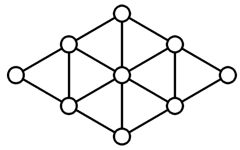
3.2. Kostry

*3.2.1. Kolik koster má unicyklický graf? (*Unicyklický *graf obsahuje jediný cyklus.)*

3.2.2. Kolik koster má bicyklický (graf s právě dvěma cykly) graf? Nápověda: které možnosti musíme rozlišit?

3.2.3. Navrhněte algoritmus pro hledání kostry (ne nutně minimální), který pracuje se složitostí řádově $O(m+n)$.

3.2.4. Je možno graf G na Obrázku 3.1. rozložit a) na dvě kostry; b) na dvě kostry se stejnou strukturou (na dvě isomorfní kostry)?



Obrázek 3.1.: Graf G na devíti vrcholech.

3.2.5. Kolik koster má kompletní graf bez jedné hrany?

3.3. Cykly a bipartitní grafy

3.3.1.♡ Dokažte, že každý strom je bipartitní graf.

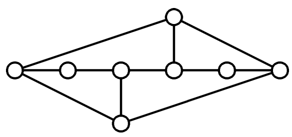
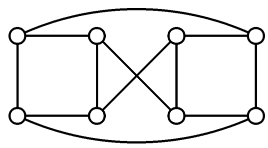
3.3.2. Nechť G je pravidelný bipartitní graf s partitami U a W a alespoň jednou hranou. Ukažte, že potom $|U| = |W|$. Je předpoklad existence alespoň jedné hrany nutný?

3.3.3. Dokažte, že každý podgraf bipartitního grafu je bipartitní.

3.3.4. Ukažte, že při putování koněm po šachovnici není možno vrátit se na výchozí políčko po lichém počtu tahů.

3.3.5. Sestavíme graf $\check{S}$, jehož vrcholy budou políčka klasické šachovnice 8×8 polí a hrany spojují vždy taková dvě políčka, mezi kterými lze táhnout věží. Je graf $\check{S}$ bipartitní? Najdete v grafu $\check{S}$ lichý cyklus?

3.3.6. V grafech na Obrázku 3.2. najděte bipartitní podgraf s co největším počtem hran. Dokažte, že tento počet je největší.

Obrázek 3.2.: Grafy, které nejsou bipartitní.

3.3.7. Ukažte, že graf G je unicyklický právě tehdy, když $\mu(G) = 1$.

3.3.8. Ukažte, že pokud graf obsahuje pouze liché cykly, tak žádné dva cykly nemohou mít společné hrany.

3.3.9. Ukažte, že souvislý k-pravidelný bipartitní graf pro $k \geq 2$ neobsahuje žádný most (most je taková hrana, že jejím odebráním dostaneme nesouvislý graf).

3.3.10. Kolik je všech cyklů v grafu K_n?

3.3.11. Kolik je cyklů a) délky 4, b) délky 5, c) délky 6, d) všech v grafu Q_n?

3.3.12. Kolik různých cyklů obsahuje kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$? Dva cykly považujeme za různé, pokud se liší v alespoň jedné hraně.

3.3.13. Jaké je cyklomatické číslo a) cyklu C_n b) kompletního bipartitního grafu $K_{m,n}$?

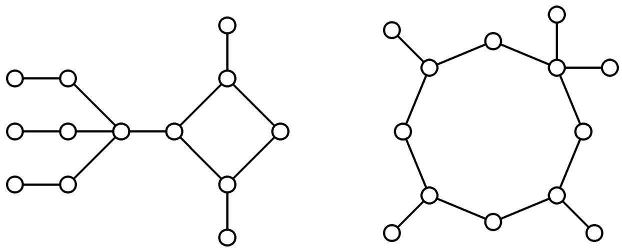
3.3.14. Najděte příklad tří grafů se stejným počtem vrcholů, se stejným cyklomatickým číslem a různým počtem cyklů.

3.3.15. Pro každé přirozené číslo k najděte příklad a) dvou grafů se stejným počtem vrcholů, stejným cyklomatickým číslem a počtem cyklů lišícím se o k, b) k grafů se stejným počtem vrcholů, stejným cyklomatickým číslem, přičemž každé dva grafy mají různý počet cyklů.

Kapitola 4. Isomorfismus grafů

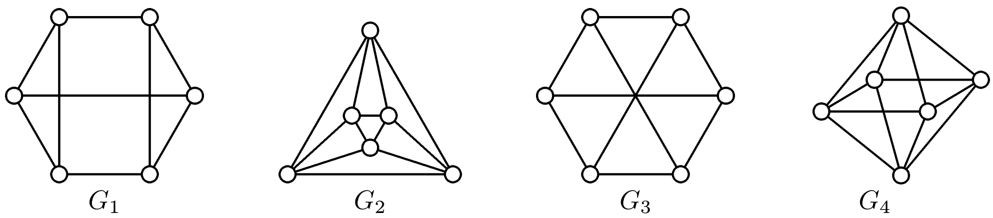
4.1. Pojem isomorfismu

4.1.1.♡ Ukažte, že grafy na Obrázku 4.1. nejsou isomorfní.



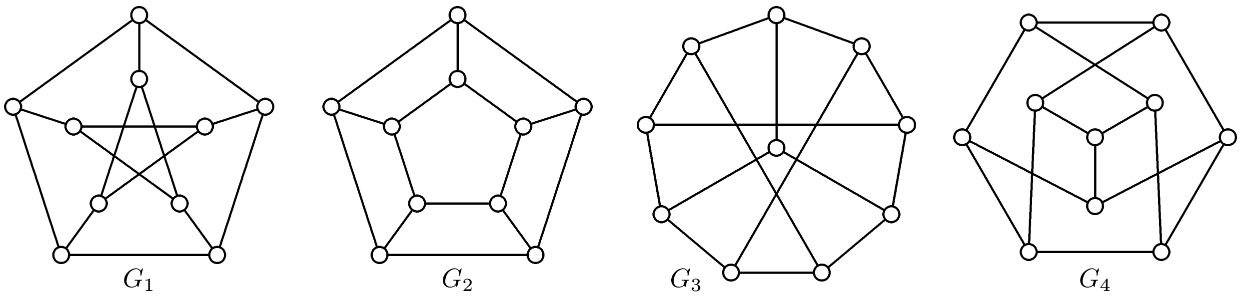
Obrázek 4.1.: Grafy G a H na třinácti vrcholech.

4.1.2. Rozhodněte, které grafy na Obrázku 4.2. jsou isomorfní.



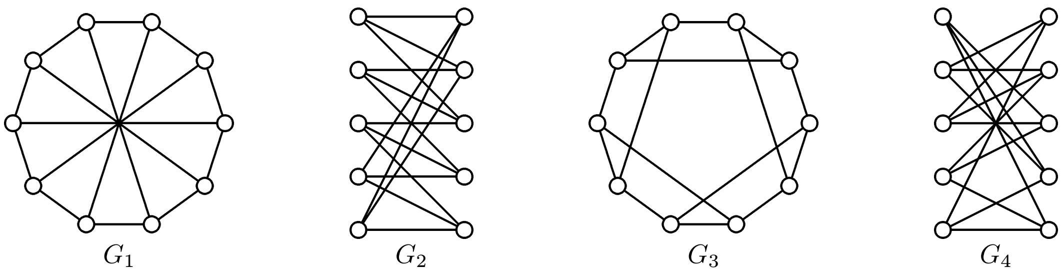
Obrázek 4.2.: Pravidelné grafy G_1, G_2, G_3 a G_4 na šesti vrcholech.

4.1.3. Rozhodněte, které z následujících grafů jsou isomorfní:



Obrázek 4.3.: Grafy G_1, G_2, G_3 a G_4.

4.1.4. Rozhodněte, které grafy na Obrázku 4.4. jsou isomorfní.



Obrázek 4.4.: Pravidelné grafy G_1, G_2, G_3 a G_4 na deseti vrcholech.

4.1.5. Nechť T_n a T'_n jsou dva stromy na n vrcholech pro které platí $\Delta(T_n) = \Delta(T'_n) = n - 2$. Ukažte, že potom $T_n \simeq T'_n$.

4.1.6. Dokažte že pro libovolné $n \geq 6$ existují vždy přesně tři neisomorfní stromy T_n takové, že $\Delta(T_n) = n - 3$.

4.1.7. Ukažte, že existuje 11 navzájem neisomorfních grafů na čtyřech vrcholech.

4.1.8. Ukažte, že každý graf G na n vrcholech je isomorfní nějakému podgrafu K_n.

4.1.9. Nechť T_n je libovolný strom na n vrcholech a G je libovolný graf takový, že $\delta(G) \geq n - 1$. Ukažte, že potom G má podgraf, isomorfní s T_n.

4.1.10. Ukažte, že a) pokud v předchozím Cvičení 4.1.9. bude $\delta(G) = n - 2$, tak tvrzení nemusí platit, a b) pokud místo T_n vezmeme libovolný graf s alespoň jedním cyklem, tak tvrzení nemusí platit.

4.1.11. Ukažte, že relace $\sim$ zavedená na straně ?? je relací ekvivalence na třídě všech grafů.

*4.1.12.**Najděte co největší třídu navzájem neisomorfních grafů na n vrcholech $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Třída by měla obsahovat alespoň 2^{kn} různých grafů pro nějaké $k \in \mathbb{Q}$, kde $k > 0$.*

4.1.13. Najděte příklad grafů G a H, které splňují podmínky (??)–(??) ve Větě ??, ale nejsou isomorfní. Nápověda: hledané grafy nejsou konečné.

4.1.14. Existuje více neisomorfních grafů se stupňovou posloupností $(1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6)$ nebo grafů se stupňovou posloupností $(3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8)$?

4.2. Automorfismus grafů

4.2.1. Ukažte, že vrcholově tranzitivní graf musí být pravidelný. Platí, že hranově tranzitivní graf musí být pravidelný?

4.2.2. Nalezněte netriviální automorfismus grafu H z Obrázku ??, který je různý od automorfismu uvedeného v textu na straně ??.

4.2.3. Kolik automorfismů má graf a) C_n; b) P_n; c) $K_{m,n}$; d) hyperkrychle Q_n?*

4.2.4. Nechť $G \simeq H$ a nechť existuje k různých isomorfismů z G do H. Co můžeme říci o počtu automorfismů grafu G?

4.2.5. Najděte nejméně tři nekonečné třídy vrcholově tranzitivních grafů.

4.2.6. Určete počet různých automorfismů vrcholově tranzitivního grafu na n vrcholech.

4.2.7. Ukažte, že je-li graf G strnulý, tak potom i $\overline{G}$ je strnulý graf.

4.2.8. Ukažte, že je-li graf G vrcholově tranzitivní, tak potom i $\overline{G}$ je vrcholově tranzitivní.

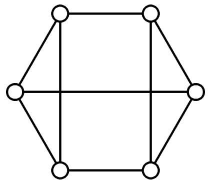
4.2.9. Platí, že je-li graf G hranově tranzitivní, tak potom i $\overline{G}$ je hranově tranzitivní? Pokud ano, dokažte a pokud ne, najděte protipříklad.

4.2.10. Najděte nejmenší netriviální graf a nejmenší netriviální strom, který má pouze triviální automorfismus. Ukažte, že nalezený příklad je nejmenší.

4.2.11. Kolik automorfismů mají všechny grafy na čtyřech vrcholech. Čeho si můžeme všimnout, abychom ušetřili polovinu práce?

4.2.12. Najděte příklad netriviálního grafu, který je pravidelný, ale není vrcholově tranzitivní.

4.2.13. Je graf na Obrázku 4.5. a) vrcholově tranzitivní? b) hranově tranzitivní?



Obrázek 4.5.: 3-pravidelný graf G.

4.2.14. Ukažte, že Petersenův graf (Obrázek ??) má přesně 120 automorfismů.*

4.2.15. Najděte příklad grafu, který má právě k automorfismů pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.

4.2.16.$^\heartsuit$ Najděte graf, který je hranově tranzitivní, ale není vrcholově tranzitivní. Pokud takový graf neexistuje, pečlivě zdůvodněte.

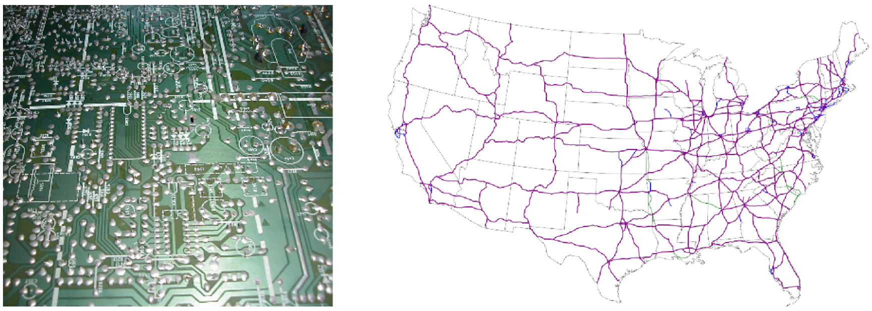
4.2.17. Najděte graf, který je vrcholově tranzitivní, ale není hranově tranzitivní. Pokud takový graf neexistuje, pečlivě zdůvodněte.

4.2.18. Najděte příklad strnulého 3-pravidelného grafu na dvanácti vrcholech.*

4.2.19. Ukažte, že graf G a jeho doplněk $\overline{G}$ mají stejnou grupu automorfismů.

Kapitola 5. Vrcholová a hranová souvislost

Jestliže nějaký graf reprezentuje komunikační síť, dopravní nebo i virtuální síť, je důležité vědět, jak odolná je taková síť vůči poruchám, které mohou narušit komunikaci nebo transport v síti. Výpadky mohou být dvojího druhu: porucha může nastat jednak v rámci každého spojení, které odpovídá hraně grafu, nebo v křižovatkách/uzlech sítě, které odpovídají vrcholům grafu. V této kapitole si ukážeme, jak takovou souvislost grafu měřit a že souvislost grafu je možno popsat číselným parametrem.



Obrázek 5.1.: *Elektrická síť a dopravní síť (Eisenhowerův systém dálnic).*

5.1. Míra souvislosti grafu

5.1.1.$^\heartsuit$ *Ukažte, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ $2k$-pravidelný graf neobsahuje most.*

5.1.2. Označme $\kappa'(G) = k$, kde $k > 0$ a nechť F je libovolná množina nějakých k hran z $E(G)$. Ukažte, že potom $\omega(G - F) \le 2$.

5.1.3. Pro každé $k > 0$ nalezněte k-souvislý graf G a takovou množinu vrcholů $V' \subseteq V(G)$, $|V'| = k$, že $\omega(G - V') > 2$.

5.1.4. Pro každé $k > 0$ a $r > 1$ nalezněte k-souvislý graf G a takovou množinu vrcholů $V' \subseteq V(G)$, $|V'| = k$, že $\omega(G - V') > r$.

5.1.5. Dokažte, že pro každý hranově k-souvislý graf $G = (V, E)$ platí $|E| \ge k|V|/2$.

5.1.6. Nechť v grafu G platí $\delta(G) \ge |V(G)| - 2$. Ukažte, že potom platí $\kappa(G) = \delta(G)$. Najděte graf G', pro který platí $\delta(G') = |V(G')| - 3$ a $\kappa(G') < \delta(G')$.

5.1.7. Nechť v grafu G platí $\delta(G) \ge |V(G)|/2$. Ukažte, že potom platí $\kappa'(G) = \delta(G)$. Najděte graf G', pro který je $\delta(G') = \lfloor(|V(G')|/2) - 1\rfloor$ a $\kappa'(G') < \delta(G')$.

5.1.8. Dokažte Větu ??, tj. že v každém 3-pravidelném grafu G platí $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

5.1.9. Ukažte, že graf je strom právě tehdy, když každá jeho hrana je most. Platí, že graf je strom právě tehdy, když každý jeho vrchol je artikulace?

5.1.10. Dokažte, že souvislý graf G je unicyklický právě tehdy, když $|V(G)| = |E(G)|$.

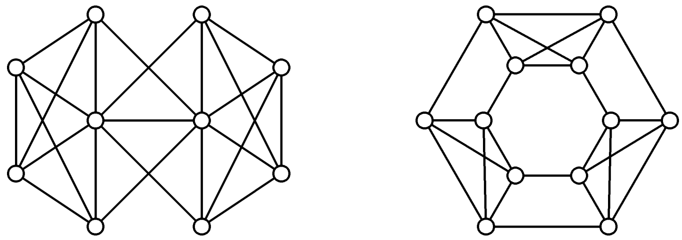
5.1.11. Dokažte, že hrana souvislého grafu je most právě tehdy, když neleží v žádném cyklu.

5.1.12. Nechť G je k-souvislý a nechť H je graf, který vznikne z G přidáním vrcholu v a k hran vv_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, kde v_i jsou navzájem různé vrcholy grafu G. Ukažte, že H je k-souvislý. Mohl by být $(k+1)$-souvislý?

5.1.13. Nechť G je k-souvislý graf na n vrcholech a nechť H je graf, který vznikne z G přidáním vrcholu v a n hran vv_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, kde v_i jsou navzájem různé vrcholy grafu G. Ukažte, že H je $(k+1)$-souvislý.

5.1.14. Pro libovolná přirozená čísla a, b, c taková, že $0 < a \le b \le c$, sestrojte graf G, pro který platí $\kappa(G) = a$, $\kappa'(G) = b$ a $\delta(G) = c$.

5.1.15. Nechť pro graf G platí $\kappa(G) \ge 1$, $\kappa'(G) \ge 1$. Jaké jsou možné hodnoty $\kappa(G - v)$, $\kappa(G - e)$, $\kappa'(G - v)$, $\kappa'(G - e)$?



Obrázek 5.2.: Grafy G a H.

5.1.16. *Určete $\kappa(G)$, $\kappa'(G)$ a $\delta(G)$ grafů G a H na Obrázku 5.2.*

5.1.17. *Ukažte, že každý souvislý 3-pravidelný bipartitní graf je vrcholově 2-souvislý.*

5.2. Bloky a artikulace grafů

5.2.1. *Graf G' nazveme* rozdělením *grafu G, jestliže vznikne z G přidáním vrcholů stupně 2 do jeho hran, tedy hranu uv nahradíme dvojicí hran uw a wv, kde w je nový vrchol G', nebo dokonce (u,v)-cestou $u, w_1, w_2, \ldots, v$ (definice je na straně ??). (Graf G' potom také nazýváme* homeomorfním obrazem *nebo* homeomorfem *grafu G.) Použijte rozdělení grafu pro důkaz Věty ??*

5.2.2. *Nechť netriviální souvislý graf G neobsahuje sudé cykly. Dokažte, že potom každý blok grafu G je buď K_2 nebo lichý cyklus.*

5.2.3. *Máme dán graf G. Ukažte, že graf $\mathrm{Blok}(G)$ je acyklický a je-li G souvislý, tak $\mathrm{Blok}(G)$ je strom.*

5.2.4. *Ukažte, že každý souvislý graf, který není blokem, obsahuje alespoň dva koncové bloky.* Koncový blok *je blok, obsahující jedinou artikulaci.*

5.2.5. *Můžeme v zadání předchozího Cvičení 5.2.4. vynechat požadavek souvislosti?*

5.2.6. *Můžeme v zadání Cvičení 5.2.4. místo souvislosti požadovat existenci alespoň jedné hrany?*

5.2.7. *Určete největší množství artikulací, které mohou ležet v souvislém grafu na n vrcholech.*

5.2.8. *Jaké je největší množství artikulací, které mohou ležet v jediném bloku konečného grafu na n vrcholech.*

5.2.9. *Nechť G na více než dvou vrcholech má $\kappa(G) = 1$. Ukažte, že potom G obsahuje takovou artikulaci w, že všechny bloky obsahující w s výjimkou nejvýše jednoho, jsou koncovými bloky G.*

5.2.10. *Ukažte, že souvislý sudý graf (sudý graf má všechny vrcholy sudého stupně) neobsahuje žádný most.*

Kapitola 6. Párování a pokrytí

6.1. Párování

6.1.1. Kolo W_{n+1} *je graf, který vznikne z cyklu* C_n *s vrcholy* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *přidáním vrcholu* v_0 *a všech hran* $v_0v_1, v_0v_2, \dots, v_0v_n$. *Určete, pro které hodnoty* n *má* W_{n+1} *úplné párování.*

6.1.2. Které úplné tripartitní grafy mají úplné párování?

6.1.3. Kolik různých úplných párování mají grafy a) K_n, *b)* C_n*?*

6.1.4. Dokažte, že strom má nejvýše jedno úplné párování.

6.1.5. Pro každé $k > 1$ *najděte příklad* k*-pravidelného grafu, který nemá úplné párování.*

6.1.6. Pro každé $p > 0$ *najděte graf* G *a takové jeho maximální párování* M, *že pro největší párování* M^* *v grafu* G *platí* $|M^*| = |M| + p$.

6.1.7.♡ *Pro každé* $p > 0$ *najděte souvislý graf* G, *že pro největší párování* M^* *v grafu* G *platí* $|V(G)| = 2|M^*| + p$.

6.1.8. Dva hráči hrají následující hru. Střídavě obarvují vrcholy grafu G *tak, že první hráč obarvuje modrou barvou, druhý hráč červenou barvou a každý musí vybarvit některý nevybarvený vrchol, který je sousední s vrcholem, jež jeho protihráč vybarvil v předchozím tahu. Ten hráč, který nemůže obarvit další vrchol podle pravidel, prohrál. Ukažte, že první hráč může vyhrát vždy, když* G *nemá úplné párování a druhý hráč může vždy vyhrát, když graf* G *má úplně párování.*

6.2. Párování v bipartitních grafech

6.2.1. Dokažte následující modifikaci Hallovy věty: Nechť* G *je bipartitní graf s partitami* U *a* W. *Potom* G *má úplné párování* M *právě tehdy, když*

$$|S| \leq |N(S)| \text{ pro každou množinu } S \subseteq (U \cup W).$$

Ukažte, že podmínku bipartitnosti nelze vynechat.

6.2.2. Nechť $A_1, A_2, \dots, A_m$ *jsou podmnožiny (ne nutně disjunktní) množiny* S. Systém různých reprezentantů *množin* $A_1, A_2, \dots, A_m$ *je množina* $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ *taková, že* $a_i \in A_i$ *pro* $1 \leq i \leq m$, *kde* $a_i \neq a_j$ *pro* $i \neq j$. *Ukažte, že množiny* $A_1, A_2, \dots, A_m$ *mají systém různých reprezentantů právě tehdy, když platí, že* $|\bigcup_{i \in J} A_i| \geq |J|$ *pro každou množinu* $J \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$.

6.2.3. Na šachovnici s 64 políčky je možno poskládat 32 dominových kostek (obdélníků o rozměru 1×2 *pole) tak, že pokrývají celou šachovnici. Ukažte, že šachovnici, ze které vynecháme dvě diagonálně protilehlá rohová pole, nemůžeme pokrýt dominovými kostkami.*

6.2.4. Po vynechání některých dvou polí šachovnice z předchozího Cvičení 6.2.3. je někdy možné pokrýt zbylá pole šachovnice dominovými kostkami a někdy to možné není. a) Najděte na šachovnici všechny dvojice polí, které je možno vynechat, přičemž bude možné pokrýt zbytek šachovnice dominovými kostkami. b) Ukažte, jak v úloze a) zbylá pole šachovnice pokrýt dominovými kostkami.

6.2.5.♡ *Mějme šachovnici o rozměru* $n \times n$ *polí pro liché* $n \geq 3$. *Dokažte, že je možné navštívit koněm každé políčko právě jednou, a vrátit se zpět na výchozí políčko.*

6.2.6. Mějme bipartitní graf G *na* $2n$ *vrcholech, jehož každá partita má právě* n *vrcholů. a) Dokažte, že pokud* $\delta(G) \geq n/2$, *pak* G *obsahuje úplné párování. b) Platí tvrzení i pro* $\delta(G) \geq n/2 - 1$*?*

6.3. Pokrytí v bipartitních grafech

6.3.1. Bez využití důkazu Věty ?? dokažte speciální případ Tutteovy věty: Strom T má úplné párování právě tehdy, pokud počet lichých komponent grafu $T - v$ je roven jedné pro každý vrchol $v \in V(T)$.

6.3.2. Na daném počtu vrcholů najděte a) graf s největším počtem hran, který nemá úplné párování, b)[?] souvislý graf s největším počtem hran, který nemá úplné párování. Využijte Tutteovu větu.

6.3.3. Jaký je největší stupeň vrcholů a) v grafu G, b) ve stromu T, který má úplné párování?

6.3.4. Jaký je největší stupeň vrcholů a) v grafu G, b) ve stromu T (oba na sudém počtu vrcholů), který nemá úplné párování?

6.3.5. Využijte Tutteovu větu k nalezení charakterizace maximálních grafů bez úplného párování.

Kapitola 7. Hranová barvení grafů

Harmonogram pracovních úkonů
V minulé kapitole jsme při formulaci přiřazovacího problému každému pracovníkovi přiřadili jeden úkol. V praxi však můžeme řešit obtížnější úlohu, kdy u jednoho stroje anebo u jednoho obrobku se má vystřídat několik pracovníků. Pochopitelně budeme chtít, aby každý pracovník pracoval v daném okamžiku u každého stroje sám. Takovou úlohu můžeme modelovat následujícím způsobem. Budeme mít bipartitní graf jehož jedna jeho partita odpovídá pracovníkům a druhá strojům nebo výrobkům. Hranou spojíme každou takovou dvojici vrcholů x a y, kdy pracovník x má vykonat nějakou činnost u stroje y. Budeme chtít, aby

- v daný časový úsek u stroje pracoval vždy jen jeden pracovník,
- nakonec byly vykonány všechny činnosti,
- soubor všech činností byl dokončen v co nejkratším čase.

Pro modelování uvedeného problému zavedeme pojem hranového barvení bipartitního grafu.

Rozvrhy
Podobný model můžeme použít při sestavování rozvrhů. Máme bipartitní graf, ve kterém jednu partitu tvoří studijní skupiny a druhou vyučované předměty. Stejnou barvou obarvíme všechny hrany, které odpovídají výuce ve stejnou dobu. Pochopitelně nám půjde o takové hranové barvení, ve kterém hrany jedné barvy tvoří nezávislou množinu – párování. Budeme hledat příslušné hranové barvení s co nejmenším počtem barev. Protože na každé učebně může v danou chvíli probíhat výuka jediné skupiny a jediného předmětu (s daným vyučujícím), bude obarvení hran různými barvami odpovídat rozvrhu hodin. Počet barev bude odpovídat celkové délce vyučování.

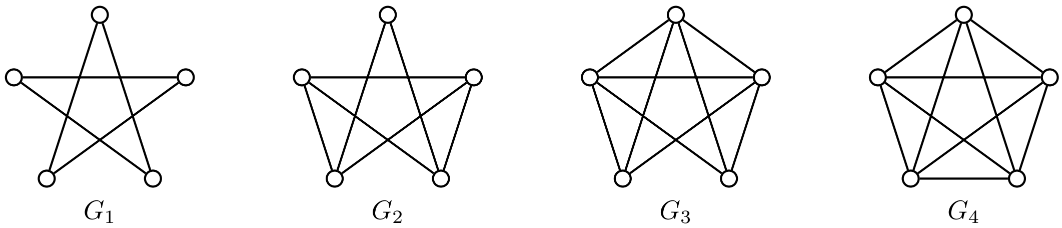
Otázka: Uvedený model rozvrhu předpokládá, že máme k dispozici neomezený počet učeben. Jak by bylo možné model upravit, aby bylo možno vzít v úvahu, že počet učeben je omezený?

7.1. Hranová barvení a chromatický index grafu

7.1.1.$^{\heartsuit}$ *Ukažte, že každý pravidelný graf třídy 1 s alespoň jednou hranou má úplné párování.*

7.1.2. Najděte a) příklad grafu, b)* nekonečně mnoho grafů, c)$^?$ všechny grafy, které jsou třídy 1, avšak přidáním libovolné *hrany se stanou třídy 2.*

7.1.3. Určete chromatický index grafů na Obrázku 7.1.



Obrázek 7.1.: Grafy G_1, G_2, G_3 a G_4 na pěti vrcholech.

7.1.4. *Ukažte, že v každém pravidelném grafu G s lichým počtem vrcholů a alespoň jednou hranou je $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.*

7.1.5. *Najděte příklad grafu G, který nesplňuje předpoklad Důsledku ?? a přitom $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.*

7.1.6. *Nalezněte algoritmus hranového $(\Delta(G) + 1)$-barvení libovolného grafu G.*

7.1.7. *Dokažte nebo vyvraťte: $\chi'(G \cup H) \leq \chi'(G) + \chi'(H)$.*

7.1.8. *Najděte dobré hranové barvení grafu Q_n (hyperkrychle řádu n) a dokažte, že $\chi'(Q_n) = \Delta(Q_n)$.*

7.1.9. *Ukažte, že v libovolném grafu G platí $\alpha(G) \geq |V(G)|/(\Delta(G) + 1)$.*

7.2. Hranová barvení některých speciálních tříd grafů

7.2.1. *Dokažte, že $\chi'(K_{n,m}) = \Delta(K_{n,m})$.*

7.2.2. *Ukažte, že každý bipartitní graf G má $\Delta(G)$-pravidelný bipartitní nadgraf. Pomocí tohoto tvrzení a Důsledku ?? dokažte Větu ??*

7.2.3. *Nalezněte algoritmus hranového $\Delta(G)$-barvení bipartitního grafu G.*

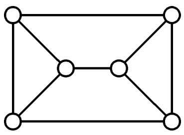
7.2.4. *Dokažte, že $\chi'(K_{2n-1}) = \chi'(K_{2n}) = 2n - 1$.*

7.2.5. *Najděte chybu v následujícím důkazu Věty ??:*
Nejprve ukážeme, že každý bipartitní graf $G = (U \cup W, E)$ je podgrafem nějakého $\Delta(G)$-pravidelného bipartitního grafu. Pokud nejsou partity U a W stejné velikosti, přidáme do menší partity tolik vrcholů, aby byly obě partity stejné velikosti. Dále, protože součet stupňů vrcholů v každé partitě je stejný, najdeme ke každému vrcholu $u \in U$ stupně menšího než $\Delta(G)$ vrchol $w \in W$ stupně menšího než $\Delta(G)$. Jestliže $uw \notin E$, tak spojíme u a w hranou. Pokud však $uw \in E$, tak najdeme nějaké další dva jiné vrcholu $u' \in U$ a $w' \in W$, které jsou sousední, ale w' není sousední s u a u' není sousední s w. Takové vrcholy jistě existují, protože $\deg(u) < \Delta(G)$ a $\deg(v) < \Delta(G)$. Nejprve odebereme hranu $u'w'$ a potom přidáme hrany uw' a $u'w$. Tím se zvýší stupeň vrcholů u a w a stupeň vrcholů u' a w' se nezmění.

Je-li výsledný graf pravidelný, důkaz končí, jinak opakujeme uvedený postupu dokud výsledný nadgraf nebude pravidelný.

7.3. Rozklady grafů

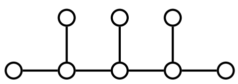
7.3.1.♡ *Rozložte graf G na Obrázku 7.2. na tři cesty P_4. Pokud to není možné, pečlivě zdůvodněte.*



Obrázek 7.2.: Graf G.

7.3.2. *Rozložte Petersenův graf na čtyři cesty libovolné délky. Pokud to není možné, pečlivě zdůvodněte.*

7.3.3. *Ukažte, že neexistuje H-rozklad kompletního grafu K_8, kde H je graf na Obrázku 7.3.*



Obrázek 7.3.: Graf H, který nefaktorizuje kompletní graf K_8.

*7.3.4.** *Ukažte, že každý kubický graf bez mostů je možno rozložit na kopie grafu P_4. (Nápověda: využijte Větu ??)*

7.3.5. *Ukažte, že pokud je možno kubický graf G rozložit na P_4, tak G má úplné párování.*

Kapitola 8. Vrcholová barvení grafů

V minulé kapitole jsme barvili hrany grafu. V této kapitole budeme barvit vrcholy grafu a ukážeme několik pěkných praktických motivací.

Skladovací problém
Ve skladu je uloženo mnoho druhů potravin. Podle předpisů řada druhů potravin nemůže být skladována společně, musí být skladovány v oddělených prostorách. Například ovocné saláty nesmí být skladovány společně s čerstvými syrovými vejci nebo krájené salámy nesmí být skladovány společně se syrovým masem. Jaký je nejmenší počet oddělených místností, který ve skladu potřebujeme? Ukážeme, že řešení problému můžeme řešit užitím grafového modelu, ve kterém vrcholy budou odpovídat jednotlivým skladovaným komoditám a hrany budou spojovat vždy ty dva vrcholy, jestliže odpovídající komodity nemohou být skladovány společně.

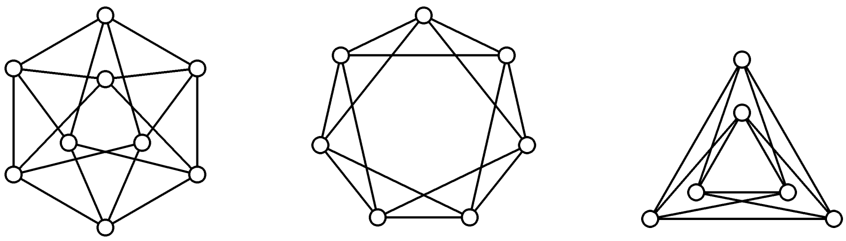
Plánování zkouškových termínů
Při plánování zkouškových termínů není vhodné, aby se kryly termíny zkoušek dvou kurzů, které mají mnoho společných studentů. Navíc na vysokých školách v některých zemích je jen jediný pokus na vykonání závěrečné zkoušky a zkoušku je možno vykonat jen v jednom pevně stanoveném termínu. V takovém případě je nutné, aby žádné dva kurzy se společným studentem neměly závěrečnou zkoušku ve stejnou dobu.

Sestavíme graf, ve kterém vrcholy odpovídají jednotlivým kurzům a hranou spojíme každé dva kurzy s alespoň jedním společným studentem. Takové obarvení vrcholů grafu, ve kterém žádné dva sousední vrcholy nemají společnou barvu, odpovídá možnému rozvrhu závěrečných zkoušek, přičemž různé barvy odpovídají různým dnům i časům zkoušek. Je sice možné každý vrchol obarvit jinou barvou (v daný čas bude probíhat vždy jen jedna zkouška), to ale není ekonomické. Pochopitelně se budeme snažit minimalizovat počet různých barev vrcholů grafu.

Další úloze, která odpovídá vrcholovému barvení nějakého grafu, se budeme věnovat v kapitole ??

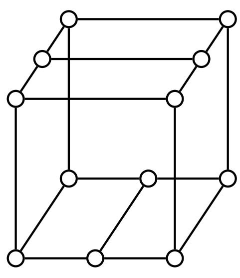
8.1. Vrcholové barvení a chromatické číslo grafu

8.1.1. Určete chromatické číslo grafů na Obrázku 8.1.



Obrázek 8.1.: Grafy G, H a R.

8.1.2. Určete chromatické číslo a najděte příslušné dobré vrcholové barvení následujících grafů a) Petersenův graf (Obrázek ??), b) Grötzschův graf (Obrázek ??), c) graf B na Obrázku 8.2.).



Obrázek 8.2.: Graf B.

8.1.3.$^\heartsuit$ *Jaké je chromatické číslo cyklu C_n?*

8.1.4. *Určete chromatické číslo bipartitního (ne nutně kompletního) grafu G.*

8.1.5.$^\heartsuit$ *Určete chromatické číslo grafu P_n.*

8.1.6. *Jaké je chromatické číslo stromu T_n?*

8.1.7. *Určete $\chi(W_{n+1})$.*

8.1.8. *Určete chromatické číslo grafu Q_n (hyperkrychle řádu n).*

8.1.9. *Najděte příklad grafu, pro který algoritmus popsaný v důkazu Lemmatu ?? nenajde dobré vrcholové barvení s nejmenším počtem barev.*

8.1.10. *Najděte příklad grafu G a jeho vrcholu v tak, aby platilo $\chi(G-v)<\chi(G)$ a $\chi(\overline{G}-v)<\chi(\overline{G})$.*

8.1.11. *Ukažte, že je-li H podgrafem grafu G, tak $\chi(H)\leq\chi(G)$. Platí, že je-li H vlastním podgrafem grafu G, tak $\chi(H)<\chi(G)$?*

8.2. Brooksova věta

8.2.1. *Máme dána přirozená čísla n a r, kde $n>r\geq 3$. Najděte příklad grafu G na n vrcholech, jehož chromatické číslo je $\chi(G)=\Delta(G)=r$.*

8.2.2. *Najděte příklad grafu, který neobsahuje trojúhelník a přitom na jeho obarvení jsou potřeba alespoň čtyři barvy.*

8.2.3. *Pro každou dvojici přirozených čísel k a l, kde $2\leq k\leq l+1$, najděte příklad grafu G tak, aby $\chi(G)=k$ a $\Delta(G)=l$.*

8.2.4. *Ukažte, že vrcholově k-chromatický graf má alespoň $\binom{k}{2}$ hran.*

8.3. Další meze chromatického čísla

8.3.1. *Popište všechny barevně 3-kritické grafy.*

8.3.2. *Ukažte, že barevně k-kritický graf a) je souvislý, b) neobsahuje artikulaci.*

8.3.3. *Dokažte Větu ?? indukcí.*

8.3.4. *Pro libovolné přirozené číslo $n\geq 3$ najděte příklad grafu s n vrcholy, pro který je a)*$^\heartsuit$ *$\chi(G)<1+m(G)$, b) $\chi(G)=1+m(G)$, kde $m(G)$ je délku nejdelší cesty v grafu G.*

8.3.5. *Ukažte, že jestliže libovolné dva liché cykly grafu G mají společný vrchol, potom $\chi(G)\leq 5$.*

8.3.6. *Dokažte nebo vyvraťte: $\chi(G\cup H)\leq\chi(G)+\chi(H)$.*

8.3.7. *Najděte alespoň čtyři nekonečné třídy barevně k-kritických grafů pro nějakou hodnotu k.*

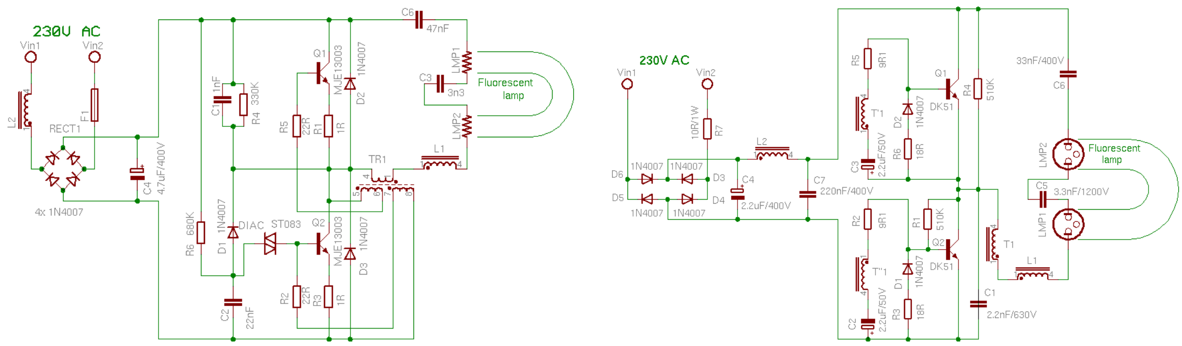
8.3.8. *Najděte nekonečnou třídu barevně k-kritických grafů pro každé přirozené číslo $k>1$.*

8.3.9. *Mějme graf G s maximálním stupněm 3. Dokažte, že jeho vrcholy lze obarvit dvěma barvami (ne nutně dobrým barvením) tak, že nevznikne jednobarevná cesta se třemi vrcholy.*

Kapitola 9. Planární grafy a neplanární grafy

V této kapitole se budeme věnovat nejen struktuře grafu, ale i různým nakreslením daného grafu. Ukážeme, že takové nakreslení, ve kterém se hrany zbytečně „nekříží“ je nejen přehlednější, ale je motivováno praktickými aplikacemi.

Návrh tištěných spojů
Přirozeným požadavkem při navrhování tištěných spojů je, aby v návrhu bylo co nejméně nevodivých křížení. Taková místa křížení je třeba „přemostit“ drátem a nebo je potřeba použít vícevrstevný tištěný spoj. Schéma na Obrázku 9.1. vpravo obsahuje jediné křížení, kterému je navíc možno se vyhnout[1]. Schéma vlevo obsahuje celou řadu nevodivých křížení a na první pohled rozhodně není zřejmé, zda je možno schéma překreslit bez křížení hran. Ukážeme si, jak využít nástrojů teorie grafů při návrhu a rozboru tištěných spojů. Pěkné využití Věty o čtyřech barvách, jednoho z nejznámějších výsledků teorie grafů, pro hledání výrobních vad procesorů je podrobně popsáno na straně ??.



Obrázek 9.1.: *Dvě různá schémata tištěných spojů úsporných zářivek.*

Otázka: Je možno nakreslit schémata na Obrázku 9.1. tak, aby se vodiče nekřížily?

Tři domy a tři studny
Z rekreační matematiky je známa následující úloha, která také souvisí s kreslením grafu do roviny:

Podle pověsti žily v Temném hvozdu tři čarodějnice. Každá bydlela ve své vlastní sluji a každá potřebovala k provozování své živnosti vodu z každé ze tří studánek: s živou vodou, s mrtvou vodou a s pitnou vodou. Jenomže cestou ke studánkám se čarodějnice nesmí potkat, ani zkřížit vyšlapanou cestičku jiné čarodějnice. Ptáme se, jak mohla vypadat mapa lesa se slujemi, studnami a cestičkami? Ukážeme, že taková mapa neexistuje (nelze ji nakreslit na čtvrtku papíru).

9.1. Rovinné a planární grafy

9.1.1. Dokažte nebo vyvraťte: Pro každé přirozené číslo n existuje a) 4-pravidelný planární graf, b) 5-pravidelný planární graf, které mají alespoň n vrcholů. Existují takové souvislé grafy?

9.1.2. Ukažte, že graf $K_{3,3} - e$ je planární.

9.1.3. Dokažte, že každý podgraf planárního grafu je planární.

9.1.4. Ukažte, že K_5 je nejmenší neplanární graf co do počtu vrcholů a $K_{3,3}$ je nejmenší neplanární graf co do počtu hran.

9.2. Topologický přístup

9.2.1. Dokažte Větu ??

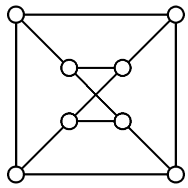
[1] V usměrňovači s Graetzovým zapojením se obvykle přívody diod zakreslují tak, že se vodiče kříží v nevodivém spojení. Tomuto křížení se při samotné realizaci tištěného spoje snadno vyhneme vhodným umístěním kontaktu zdroje napětí.

9.2.2. *Dokažte, že každé rozdělení neplanárního grafu je neplanární.*

9.2.3. *Určete všechny planární úplné tripartitní grafy.*

9.2.4. *Určete všechny planární úplné r-partitní grafy pro $r > 3$.*

9.2.5. *Je graf G na Obrázku 9.2. planární?*



Obrázek 9.2.: Graf G.

9.2.6. *Je Möbiův žebřík planární graf?*

9.2.7. *Ukažte, že Petersenův graf (Obrázek ??) není planární.*

9.3. Algebraický přístup a Eulerův vzorec

9.3.1. *Dokažte Eulerův vzorec indukcí vzhledem k počtu hran.*

9.3.2. *Dokažte Eulerův vzorec pro nesouvislé grafy třemi různými způsoby.*

9.3.3. *Najděte příklad grafu G, ve kterém každá oblast je ohraničena hranami nejvýše dvou komponent, přičemž a) G má alespoň tři komponenty, b) G má právě k komponent, pro každé $k \geq 2$.*

9.3.4. *Dokažte Důsledek ??*

9.3.5. *Dokažte Důsledek ??*

9.3.6. *Nalezněte alternativní důkaz neplanárnosti grafu K_5.*

9.3.7. *Nalezněte alternativní důkaz neplanárnosti grafu $K_{3,3}$.*

9.3.8. *Obvod grafu G je délka nejkratšího cyklu v grafu G. Ukažte, že čím je obvod g planárního grafu G větší, tím méně může mít graf G hran.*

9.3.9. *S využitím Eulerova vzorce (Věta ??) dokažte, že Petersenův graf na Obrázku ?? není planární, víte-li že obvod Peteresenova grafu je 5.*

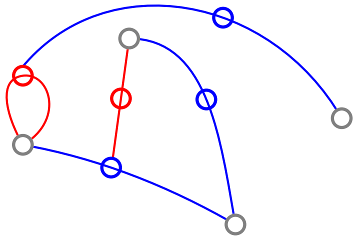
9.3.10. *Dokažte, že planární graf G s více než třemi vrcholy a $\delta(G) \geq 3$ má alespoň 4 vrcholy stupně 5 nebo menšího.*

9.3.11. *Nechť G má alespoň 11 vrcholů. a) Dokažte, že buď G nebo jeho komplement $\overline{G}$ je neplanární. b) Najdete příklad grafu G', který má 8 vrcholů a G' i $\overline{G'}$ jsou planární? c)** Najdete příklad grafu G', který má 10 vrcholů a G' i $\overline{G'}$ jsou planární?*

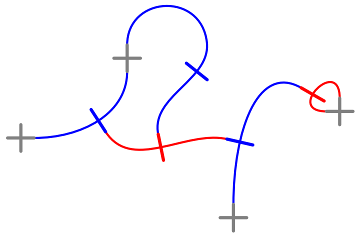
9.3.12. *Najdete příklad grafu a dvou jeho nakreslení (a) do roviny b) a na jinou plochu) tak, aby se hrany neprotínaly a obě nakreslení měla jiný počet oblastí? Vysvětlete!*

9.3.13. *Najděte příklad planárního grafu, pro který neplatí vztah z Důsledku ??, tj. pro který platí $h(G) > 3v(G) - 6$.*

9.3.14. *Hra „šprouti“ (z anglického „sprouts“, „výhonky“). Na papíře je nakresleno n puntíků. Hra je zajímavá už pro malá n, třeba 5. Hráči se střídají, kdo nemůže udělat další tah, prohrál. V každém tahu spojí hráč křivkou dva puntíky tak, aby nezkřížil žádnou jinou křivku a na křivku nakreslí nový puntík. Puntík se smí použít jako konec nové křivky jen pokud z něj vedou nejvýše dvě další křivky. Ukažte, že pro*



Obrázek 9.3.: Rozehraná hra se čtyřmi výchozími puntíky, kdy je na tahu červený hráč.



Obrázek 9.4.: Rozehraná hra se čtyřmi výchozími křížky, kdy je na tahu červený hráč.

n počátečních puntíků má hra nejvýše $3n-1$ tahů. Na Obrázku 9.3. jsou pro přehlednost tahy obou hráčů odlišeny barevně.

9.3.15. Ukažte, že hra šprouti (Cvičení 9.3.14.) pro n počátečních puntíků má vždy alespoň $2n$ tahů.*

9.3.16. Hra „podvodní šprouti“. („Brussels sprouts“) Místo puntíků budeme kreslit křížky. Nové křivky se připojují pouze k ramenům křížků. Nový křížek vytvoříme vždy přeškrtnutím křivky nakreslené v daném tahu. Ukažte, že hra má vždy právě $5n-2$ tahů. Na Obrázku 9.4. jsou pro přehlednost tahy obou hráčů odlišeny barevně.*

*9.3.17.**Hrana se, v nějakém pevně zvoleném nakreslení, nazývá* sudá, *jestliže protíná jiné hrany grafu v sudém počtu průsečíků (ne koncových bodů). Ukažte, že pokud existuje takové nakreslení grafu G, ve kterém je každá hrana sudá, tak je G planární.*

*9.3.18.**Označme S množinu všech bodů s celočíselnými souřadnicemi v rovině. Mějme libovolný n-úhelník, jehož vrcholy patří do množiny S (n-úhelník může být i nekonvexní). Označme u počet všech bodů z S, které leží uvnitř n-úhelníka a h počet všech bodů z S, které leží na hranici n-úhelníka.*
a) Předpokládejme, že každý trojúhelník, jehož žádný vnitřní bod a kromě vrcholů ani žádný bod na hranici nepatří do S má obsah $\frac{1}{2}$. Ukažte, že obsah n-úhelníka je $u+\frac{h}{2}-1$.
b) Uměli byste ukázat, že každý trojúhelník, jehož žádný vnitřní bod a kromě vrcholů ani žádný bod na hranici nepatří do S má obsah $\frac{1}{2}$?

9.4. Duální grafy a barvení planárních grafů

9.4.1. Mějmě libovolný rovinný graf G. Ukažte, že duální multigraf $G^\star$ je planární.

9.4.2. Mějmě libovolný rovinný graf G. Ukažte, že duálním grafem k duálnímu grafu $G^\star$ je opět původní graf G.

9.4.3. Dokažte Větu ??: pro každý planární graf G bez trojúhelníků platí $\chi(G)\le 4$.

9.4.4. Ukažte, že pokud je jednoduchý graf G planární, tak graf G', který vznikne z grafu G nahrazením některých hran násobnými hranami a přidáním smyček k některým vrcholům, je také planární.

9.4.5. Mějme nějaké rovinné nakreslení grafu G. Nadefinujte oblastní barvení grafu *a* dobré oblastní barvení *grafu G. Zaveďte* oblastní chromatické číslo *$\chi_o(G)$.*

9.4.6.$^\heartsuit$ Najděte příklad rovinného grafu, který neobsahuje K_4 jako podgraf, ale na jeho dobré vrcholové barvení jsou potřeba alespoň čtyři barvy.

9.4.7. Najděte příklad (nerovinného) grafu, který neobsahuje a) graf K_5 jako podgraf, ale na jeho dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň pět barev, b) graf K_n jako podgraf, ale na jeho dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň n barev.

9.4.8. Dokažte slabší verzi věty o čtyřech barvách: pro každý planární graf G je $\chi(G) \leq 6$.

9.4.9. Najděte jiný důkaz, že pro každý planární graf G platí $\chi(G) \leq 6$ (použijte Větu ??).

9.4.10. Dokažte, Větu o 5 barvách, tj. že pro každý planární graf G je $\chi(G) \leq 5$.*

9.4.11. Najděte chybu v následujícím důkazu:
Mějme takový graf G, že na jeho dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň 5 barev. V grafu G musí být nějaké vrcholy stupně alespoň 4, které jsou sousední s vrcholy čtyř ostatních barev, jinak bychom je mohli přebarvit a použít méně než 5 barev. Dále jistě najdeme takovou množinu pěti vrcholů různé barvy, které tvoří podgraf K_5, protože na dobré vrcholové obarvení každého podgrafu $K_5 - e$ stačí podle Brooksovy Věty ?? jen 4 barvy. V rovinném grafu podle Kuratowského věty neexistuje podgraf isomorfní s K_5 a proto (podle předchozího zdůvodnění) na obarvení rovinného grafu budou stačit vždy čtyři barvy.

9.4.12.$^\heartsuit$ Ukažte, že duálním grafem kola W_{n+1} je kolo W_{n+1}.

9.4.13. Podle Věty ?? víme, že graf K_6 není planární. Ukažte, že existuje takový planární graf G, jehož vrcholy je možno obarvit šesti barvami (ohodnotit) $1, 2, \ldots, 6$ tak, že každý vrchol obarvený barvou i je sousední s vrcholy všech zbývajících pěti barev.

9.4.14. Najděte dobré vrcholové barvení planárního grafu z předchozího příkladu pomocí čtyř barev.

9.4.15. Ukažte, že tvrzení ze Cvičení 9.4.13. není možné zesílit, tj. neexistuje rovinný graf G, jehož vrcholy je možno obarvit sedmi barvami (ohodnotit) $1, 2, \ldots, 7$ tak, že každý vrchol i je sousední s vrcholy všech zbývajících šesti barev.

9.4.16. Pro každé přirozené číslo k najděte příklad planárního grafu G a alespoň k takových jeho různých rovinných nakreslení, že pro každé nakreslení dostaneme jiný (neisomorfní) duální a) multigraf $G^\star$ b) graf $G^\star$.

9.4.17. Najděte všechny maximální vnějškově planární grafy na a) pěti vrcholech, b) šesti vrcholech. Maximální vnějškově planární jsou zavedeny na straně ??.

9.4.18. Ukažte, že grafy K_4 a $K_{2,3}$ jsou planární, ale nejsou vnějškově planární.

9.4.19. Ukažte, že chromatické číslo vnějškově planárních grafů je nejvýše 3.

9.4.20. Ukažte, že každý 2-souvislý vnějškově planární graf obsahuje právě jeden cyklus, který prochází všemi vrcholy (hamiltonovský cyklus).

9.5. Neplanární grafy

9.5.1. Určete $\nu(K_{3,3})$ bez použití Věty ??

9.5.2. Určete $\nu(K_{2,2,2})$.

9.5.3. Určete $\nu(K_{1,2,3})$.

9.5.4. Existuje relace uspořádání mezi čísly $\nu(G)$ a $\theta(G)$ pro všechny grafy G? Jestliže ano, nalezněte nějakou. Jestliže ne, uveďte protipříklad.

9.5.5. Určete průsečíkové číslo Petersenova grafu.

9.5.6. Dokažte Větu ??, že tloušťka grafu G je alespoň $\left\lceil \frac{h(G)}{3v(G)-6} \right\rceil$.

9.5.7. Bez užití Věty ?? ukažte, že a) $\theta(K_8) = 2$, b) $\theta(K_{11}) = 3$, c) $\theta(K_{12}) = 3$.*

9.6. Rod grafu

9.6.1. Nakreslete vnoření a) grafu $K_{3,3}$ do toru, b) grafu $K_{4,4}$ do toru.

9.6.2. Nakreslete vnoření a) grafu K_5 na Möbiův pásek, b) grafu $K_{3,3}$ na Möbiův pásek.

9.6.3. Nakreslete vnoření a) grafu K_6 do toru, b) grafu K_7 do toru.

9.6.4. Ukažte, že pro plochy rodu většího než 0 obecně nemá smysl definovat bez dalšího omezení počet oblastí grafu nakresleného (vnořeného) na takovou plochu.

9.6.5. *Ukažte, že pro graf vnořený do toru platí* $v(G) - h(G) + o(G) \geq 0$.

9.6.6. *Užitím vztahu ze Cvičení 9.6.5. ukažte, že pro graf* G *vnořený do toru musí platit* $h(G) \leq 3v(G)$.

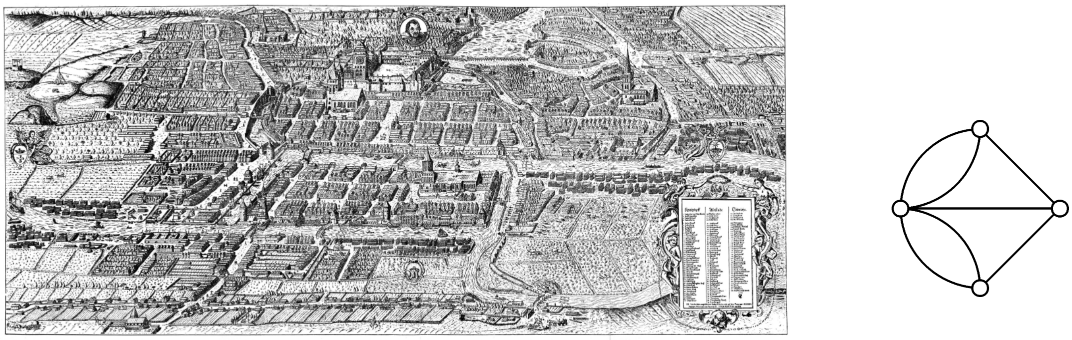
9.6.7. *Ukažte, že kompletní graf* K_8 *není možno vnořit do toru.*

9.6.8. *Ukažte, že chromatické číslo grafu, který lze vnořit do toru, je nejvýše* 7.

Kapitola 10. Eulerovské a hamiltonovské grafy

Sedm mostů města Královce

Historicky první úlohou, která byla vyřešena s pomocí pojmů teorie grafů, byla *úloha sedmi mostů města Královce*. Pruské město Královec leží na řece Pregole. Řeka vytváří dva ostrovy, které byly v 18. století spojeny s oběma břehy i navzájem celkem sedmi mosty. Měšťané řešili problém, zda je možno všechny mosty přejít tak, abychom vstoupili na každý most pouze jednou. Leonhard Euler v roce 1736 dokázal, že to není možné. Při formulaci problému použil abstraktní strukturu odpovídající pojmu graf a současně tak zavedl novou matematickou disciplínu – teorii grafů. Grafům, které je možno celé projít (všechny jejich hrany) jedním uzavřeným tahem, se dnes říká eulerovské.



Obrázek 10.1.: *Město Královec v roce 1613 a sedm mostů přes řeku Pregolu.*

Jedním tahem

Pojem eulerovského grafu úzce souvisí s kreslením jedním tahem. Jako praktické aplikace pro kreslení jedním tahem můžeme zmínit návrh trasy popelářského nebo kropícího vozu, optimalizace řezání vodním paprskem nebo robotické svařování, případně plánování tras sněžných pluhů na silnicích.

10.1. Eulerovské grafy

10.1.1. Dokažte Důsledek ??: Souvislý graf G lze nakreslit jedním otevřeným tahem právě tehdy, když obsahuje právě dva vrcholy lichého stupně.

10.1.2. Nechť G je souvislý graf a S je jeho hranový řez. Ukažte, že potom každá komponenta grafu $G' = G - S$ obsahuje vrchol, který je koncovým vrcholem některé hrany řezu S.

10.1.3. S využitím Cvičení 10.1.2. dokažte tvrzení použité v důkazu Věty ??: Máme-li souvislý graf G a v něm cyklus C, tak v každé komponentě grafu $G - E(C)$ existuje vrchol, který leží v grafu G na cyklu C.

10.1.4. Dokažte Větu ??: Souvislý graf G lze nakreslit k hranově disjunktními otevřenými tahy, přičemž počáteční a koncové vrcholy každých dvou tahů jsou navzájem různé, právě tehdy, obsahuje-li $2k$ vrcholů lichého stupně.

10.1.5.♡ Ukažte, že ve Cvičení 10.1.4. není možné vynechat požadavek souvislosti.

10.1.6. Zkuste Cvičení 10.1.4. zobecnit i pro nesouvislé grafy.

10.1.7. Nakreslete eulerovský graf se sudým počtem vrcholů a lichým počtem hran. Pokud to není možné, zdůvodněte to.

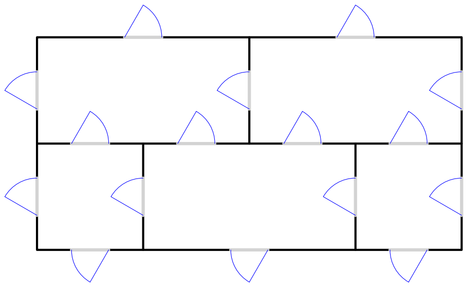
10.1.8. Najděte chybu v následujícím důkazu: Ukážeme, že neexistuje eulerovský graf se sudým počtem vrcholů a lichým počtem hran. Podle Věty ?? je souvislý graf eulerovský právě tehdy, když má všechny vrcholy sudého stupně. Eulerovský graf se sudým počtem vrcholů a lichým počtem hran neexistuje, protože *součet sudého počtu $2k$ sudých čísel $2l_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, 2k$ je dělitelný 4. Využijeme, že součet sudého počtu lichých čísel l_i je sudý, tj. $\sum_{i=1}^{2k} l_i = 2m$.*

$$\sum_{i=1}^{2k} 2l_i = 2\sum_{i=1}^{2k} l_i = 2 \cdot 2m = 4m.$$

Podle Věty ?? je součet stupňů roven dvojnásobku počtu hran $|E|$. Nyní $4m = 2|E|$ protože $|E| = 2m$, musí být v eulerovském grafu se sudým počtem vrcholů vždy sudý počet hran.

10.1.9. Ukažte, že každý sudý graf bez izolovaných vrcholů je možno rozložit na cykly.

10.1.10.$^\heartsuit$ *Je možno projít dům, jehož půdorys na Obrázku 10.2., tak, abychom každými dveřmi prošli právě jednou?*



Obrázek 10.2.: Půdorys domu s vyznačenými dveřmi.

10.1.11. Existuje eulerovský graf, který má nejvýše dva vrcholy stejného stupně?

10.2. Hamiltonovské grafy

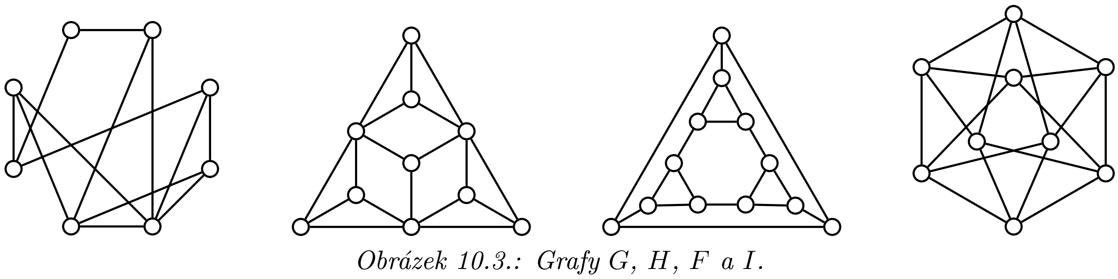
10.2.1. Dokažte, že každý hamiltonovský graf je nejméně 2-souvislý.

10.2.2. Najděte nějaký 2-souvislý pravidelný bipartitní graf s partitami stejné velikosti, který není hamiltonovský.

10.2.3. Dokažte nebo vyvraťte: má-li graf G dva navzájem hranově disjunktní hamiltonovské cykly, potom je G 3-souvislý.

10.2.4. Dokažte, že každý bipartitní hamiltonovský graf má partity stejné velikosti.

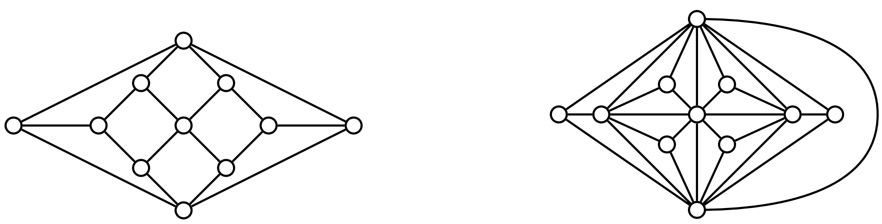
10.2.5. Nalezněte uzávěry grafů na Obrázku 10.3. Které z uvedených grafů jsou hamiltonovské?



Obrázek 10.3.: Grafy G, H, F a I.

10.2.6. Dokažte Diracovu větu bez použití Oreho věty.

10.2.7. Rozhodněte, zda a) Herschelův graf na Obrázku 10.4. vlevo nebo b) Goldnerův–Hararyův graf na Obrázku 10.4. vpravo jsou hamiltonovské.



Obrázek 10.4.: Herschelův graf a Goldnerův–Hararyův graf.

10.2.8. *Ukažte, že Petersenův graf není hamiltonovský.*

10.2.9. *Graf G se nazývá* hypohamiltonovský*, jestliže není hamiltonovský, avšak graf $G-v$ je hamiltonovský pro každý vrchol v grafu G. Ukažte, že Petersenův graf je hypohamiltonovský.*

10.2.10. *Dokažte, že kolo W_{n+1} je hamiltonovský graf pro libovolné $n \geq 3$.*

10.2.11. *Ukažte, že podmínka $\delta(G) \geq n/2$ v Diracově větě nemůže být nahrazena podmínkou $\delta(G) \geq (n-1)/2$.*

10.2.12. *Ukažte, že v definici uzávěru grafu na straně ?? nemůžeme nahradit podmínku $\deg(u)+\deg(v) \geq n$ za podmínku $\deg(u)+\deg(v) \geq n-1$.*

10.2.13. *Dokažte, že pro každé $n \geq 1$ je úplný tripartitní graf $K_{n,2n,3n}$ hamiltonovský, zatímco $K_{n,2n,3n+1}$ není hamiltonovský.*

10.2.14. *Jednání u kulatého stolu je přítomno $n \geq 4$ osob, přičemž každé dvě z nich dohromady znají všech $n-2$ ostatních. Ukažte, že mohou okolo stolu sedět tak, že každá osoba sedí mezi dvěma lidmi, které zná.*

10.2.15.$^{\heartsuit}$ *Ukažte, že každý k-pravidelný graf na $2k-1$ vrcholech je hamiltonovský.*

10.2.16. *Ukažte, že v každém grafu G, který obsahuje hamiltonovskou cestu, pro každou vlastní podmnožinu S množiny $V(G)$ platí $\omega(G-S) \leq |S|+1$.*

10.2.17. *Ukažte, že a) Diracova věta je speciálním případem Oreho věty, b) Oreho Věta je speciálním případem Pósovy věty.*

10.2.18. *Ukažte, že všechny grafy platónských těles jsou hamiltonovské.*

10.2.19. *Ukažte, že hyperkrychle Q_n řádu $n \geq 2$ je hamiltonovská.*

10.2.20. *Pro libovolné přirozené číslo k najděte příklad grafu, který obsahuje k hranově disjunktních hamiltonovských cyklů a jehož vrcholová souvislost je 2.*

10.2.21. *Ukažte, že není možné putovat koněm po šachovnici $4\times n$ polí, navštívit každé políčko právě jednou, a vrátit se zpět na výchozí políčko.*

10.3. Další výsledky

10.3.1. *Ukažte, že hamiltonovsky souvislý graf na více než třech vrcholech má všechny vrcholy stupně nejméně 3.*

10.3.2. *Ukažte, že grafy na Obrázku ?? jsou hamiltonovsky souvislé.*

10.3.3. *Ukažte, že bipartitní grafy s alespoň třemi vrcholy nejsou hamiltonovsky souvislé.*

10.3.4. *Nechť H je libovolné rozdělení grafu $K_{2,3}$. Dokažte, že graf H není hamiltonovský, avšak graf H^2 je hamiltonovský.*

10.3.5. *Nalezněte příklad 2-souvislého grafu, který není hamiltonovský, a ukažte, že jeho druhá mocnina je hamiltonovská.*

10.3.6. *Pro které z úloh a) Hamiltonova hra, b) jezdec na šachovnici je možno rozhodnout o existenci řešení užitím některých vět z této kapitoly?*

10.3.7. *Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?*

- *a) každý graf obsahující uzavřený eulerovský tah je vrcholově 2-souvislý.*
- *b) každý graf obsahující uzavřený eulerovský tah je hranově 2-souvislý.*
- *c) každý graf obsahující hamiltonovský cyklus je vrcholově 2-souvislý.*

*10.3.8.** *Ukažte, že každý souvislý graf G obsahuje buď hamiltonovskou cestu nebo cestu délky alespoň $2\delta(G)$. Lze vynechat požadavek souvislosti?*

10.3.9. *Najdete souvislý kubický graf, který má takové dobré hranové 3-barvení, ve kterém hrany libovolných dvou barev indukují hamiltonovskou cestu? Najdete nekonečně mnoho takových grafů?*

Kapitola 11. Orientované grafy

Na straně ?? jsme zmínili několik zobecnění jednoduchého grafu a mezi nimi i orientovaný graf. S orientovanými grafy se přirozeně setkáme při řešení různých praktických problémů. Modelujeme-li silniční síť grafem, tak se obvykle jedná o orientovaný graf, neboť v silniční síti mohou být jednosměrky. V potrubní síti bez čerpadel teče kapalina vždy jen jedním směrem (dolů), v elektrické síti a v produktovodech se dopravuje energie od zdroje ke spotřebičům. Také schémata konečných automatů jsou orientované grafy.

11.1. Základní pojmy

11.1.1.$^\heartsuit$ a) Najděte všechny neisomorfní digrafy s jedním nebo dvěma vrcholy. Které z nich jsou jednoduché? a) Najděte všechny neisomorfní jednoduché digrafy se třemi vrcholy.

11.1.2.$^\heartsuit$ Předpokládejme, že rozlišujeme vrcholy digrafu D (například označením). a) Kolik existuje různých digrafů na n vrcholech? b) Kolik existuje různých jednoduchých digrafů na n vrcholech?

11.1.3.$^\heartsuit$ Dokažte Větu ??

11.1.4.$^\heartsuit$ Definujte pojmy incidence *vrcholu a hrany,* sousednost *vrcholů a* nezávislost *vrcholů i hran pro orientované grafy.*

11.1.5.$^\heartsuit$ Definujte pro orientované grafy další pojmy, které jsme definovali pro neorientované grafy: podgraf, faktor, indukovaný podgraf, vnější a vnitřní stupňová posloupnost orientovaného grafu.

11.1.6.$^\heartsuit$ Definujte a) incidenční matici, b) matici sousednosti orientovaného grafu. V čem se liší od analogických matic pro neorientované grafy?

11.1.7. Ukažte, že v kompletním digrafu D platí $\sum_{v\in V(D)} \mathrm{odeg}^2(v) = \sum_{v\in V(D)} \mathrm{ideg}^2(v_i)$. Je možno tvrzení zobecnit i pro jiné než kompletní digrafy?

11.1.8. Najděte příklad jednoduchého orientovaného digrafu na n vrcholech, ve kterém má každý vrchol jiný odchozí stupeň.

11.2. Cesty, cykly, dosažitelnost

11.2.1.$^\heartsuit$ Dokažte nebo vyvraťte vrcholovou verzi Věty ??

11.2.2. Vysvětlete, která z následujících tvrzení jsou pravdivá. a) Pro každý digraf D platí $D(\mathrm{sym}(D)) \simeq D$, b) Existuje digraf D, pro který platí $D(\mathrm{sym}(D)) \simeq D$, c) Pro každý digraf D platí $B(\mathrm{sym}(D)) \simeq D$, d) Existuje digraf D, pro který platí $B(\mathrm{sym}(D)) \simeq D$. Jak se změní odpovědi na předchozí otázky, když místo symetrizace $\mathrm{sym}(D)$ budeme pracovat s deorientací $U(D)$?

11.2.3. Nechť D je digraf, který neobsahuje žádný orientovaný cyklus. Ukažte, že potom $\delta^+(D) = 0$.

11.2.4.$^\heartsuit$ Orientovaný digraf D^o, který vznikne změnou orientace všech hran orientovaného digrafu D, nazveme opačným digrafem *k digrafu D. Ukažte, že $\mathrm{ideg}_D(v) = \mathrm{odeg}_{D^o}(v)$ pro každý vrchol $v \in D$.*

11.2.5. Nechť D je orientovaný graf, neobsahující žádný orientovaný cyklus. Ukažte s pomocí výsledku předchozího Cvičení 11.2.4., že $\delta^-(D) = 0$.

11.2.6. Ukažte, že jednoduchý digraf D, ve kterém platí $\delta^+(D) = k > 0$, obsahuje orientovaný cyklus délky nejméně $k + 1$.

11.2.7. Odvoďte a dokažte nutnou a postačující podmínku pro existenci uzavřeného orientovaného tahu v digrafu D.

11.2.8. Ukažte, že každý graf G má takovou orientaci $D(G)$, že pro všechny vrcholy $v \in G$ platí

$$\left|\mathrm{ideg}_{D(G)}(v) - \mathrm{odeg}_{D(G)}(v)\right| \leq 1.$$

11.2.9. Dokažte nebo vyvraťte: Pro každé $n > 1$ existuje takový jednoduchý digraf D na n vrcholech, že $\mathrm{ideg}_D(u) = \mathrm{ideg}_D(v)$ a $\mathrm{odeg}_D(u) = \mathrm{odeg}_D(v)$ pro každé dva různé vrcholy $u, v \in D$.

11.2.10. Dokažte nebo vyvraťte: Počet vrcholů lichého vnějšího (vnitřního) stupně v orientovaném grafu musí být sudý.

11.3. Turnaje

11.3.1. Najděte isomorfismus obou turnajů na Obrázku ??

11.3.2. Dokažte Větu ??

11.3.3. Najděte příklad silně souvislého digrafu, ve kterém neexistuje král.

11.3.4. Ukažte, že vyvážený turnaj na n vrcholech existuje právě tehdy, když n je liché.

11.3.5. Dokažte Lemma ??, že ke každému vrcholu v s kladným příchozím stupněm najdeme v turnaji D alespoň jednoho krále u, že $uv \in A(D)$.

11.3.6. Dokažte Větu ??, že žádný turnaj nemá právě dva krále.

11.3.7. Mějme takový turnaj D, že $\Delta^-(D) > 0$. Ukažte, že turnaj D obsahuje alespoň tři krále.

11.3.8. Ukažte, že neexistuje turnaj na čtyřech vrcholech, ve kterém je každý vrchol králem.

11.3.9. Pro každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$, kde $n \geq 2, 4$ najděte příklad turnaje na n vrcholech, ve kterém je každý vrchol králem.

11.3.10. Mějme dvě přirozená číslo $k, n \in \mathbb{N}$, kde $n \geq k$, $k \neq 2$ a neplatí současně $n = k = 4$. Najděte příklad turnaje na n vrcholech, který má právě k králů.

11.3.11. Sestavte algoritmus, který v daném turnaji D na n vrcholech najde hamiltonovskou cestu. Složitost algoritmu by měla být nejvýše $O(n^2)$.

11.4. Orientované eulerovské grafy

11.4.1. Ukažte, že pro každý neorientovaný sudý graf (má všechny vrcholy sudého stupně) existuje jeho vyvážená orientace.

11.4.2. Dokažte Větu ??: ukažte, že digraf je eulerovský právě tehdy, když je vyvážený a silně souvislý.

11.4.3. Zformulujte a dokažte nutnou a postačující podmínku pro to, aby digraf bylo možno nakreslit jedním otevřeným orientovaným eulerovským tahem.

11.4.4. Ukažte, že vyvážený orientovaný graf je slabě souvislý právě tehdy, když je silně souvislý.

11.4.5. Sejf se otvírá digitální klávesnicí, přičemž sejf se otevře při zadání správné posloupnosti bez ohledu na předchozí stisknuté klávesy. Je-li například 1234 *heslo otvírající sejf, tak pro otevření můžeme zadat* **1234**, *nebo* 8**1234** *nebo klidně* 63825431**234**.

K prolomení kódu můžeme postupně zadat všechna čísla od 0000 *do* 9999. *Avšak to bychom museli naťukat celkem* $4 \cdot 10000 = 40000$ *cifer, což by trvalo zbytečně dlouho. Jaký je nejmenší počet cifer, který zajistí prolomení kódu? Jak sestrojit příslušnou posloupnost čísel?*

11.4.6. Zobecněte a vyřešte úlohu ze Cvičení 11.4.5. i pro n-ciferná čísla s číslicemi $1, 2, \ldots, q$.