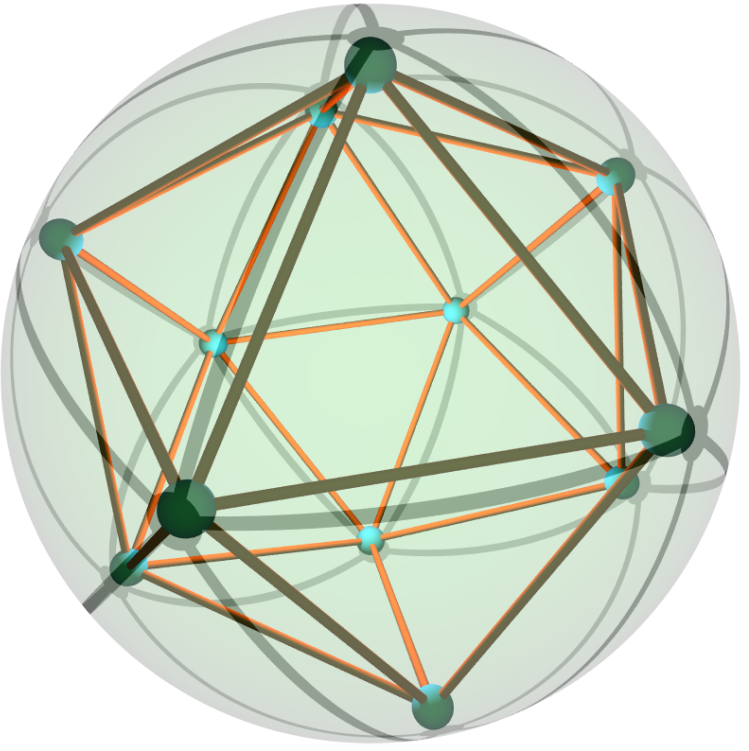
# Teorie grafů



Petr Kovář

2024

Petr Kovář
Teorie grafů

© Petr Kovář, 2024

# Úvodem

Text, který právě čtete, vznikal jako systematická příprava přednášek i cvičení a současně obsahuje řadu poznámek a postřehů souvisejících s předmětem *Teorie grafů* pro magisterské i doktorské studium na technické vysoké škole. Při výběru témat a přípravě textu jsem vycházel z osnov předmětu, ze skript *Úvod do Teorie grafů* Dalibora Frončka [F], z knihy *Kapitoly z diskrétní matematiky* od Jiřího Matouška a Jaroslava Nešetřila [MN], z knihy *Discrete Mathematics and Its Applications* od K. Rosena [R], z knihy *Introduction to Graph Theory* od Douglase B. Westa [W] a celé řady dalších. Využil jsem také řadu podnětů z internetu, zejména z `cut-the-knot.org`, `wikipedia.org` a `wolfram.com`.

Pokud máte pocit, že v textu je nějaká nesrovnalost, chyba nebo překlep, dejte mi prosím vědět. Budu rád, když mne upozorníte i na méně srozumitelné pasáže, abych je v dalších verzích textu mohl vylepšit.

### O projektu MI21

Vznik první verze textu byl podpořen v rámci projektu „Matematika pro inženýry 21. století – inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti.“ Hlavní motivací projektu bylo reakce na změny významu jednotlivých partií matematiky při řešení praktických problémů, způsobenou zejména velkým pokrokem v matematickém modelování, dramatickým zlepšováním software a rychlým zvyšováním výpočetních kapacit moderních počítačů.

Projekt byl řešen na Vysoké škole báňské – Technické univerzitě v Ostravě a na Západočeské univerzitě v Plzni v období 2009–2012. V rámci projektu vzniklo čtyřicet nových výukových materiálů z matematické analýzy, lineární algebry, numerických metod, metod optimalizace, diskrétní matematiky, teorie grafů, statistiky a několika odborných kurzů. Všechny hotové výukové materiály jsou volně k dispozici na webových stránkách projektu `http://mi21.vsb.cz`.

### Jak číst tento text

Text je psán pro čtenáře s hlubším zájmem o oblast diskrétní matematiky, který prošel některým ze základních kurzů kombinatoriky. Nultá kapitola shrnuje základní pojmy a symboly, které se objeví v dalších kapitolách. Doporučuji čtenářům ji prolistovat a při čtení pozdějších kapitol se případně vrátit k příslušnému tématu. Při studiu doporučuji nejprve dobře zvládnout první čtyři kapitoly textu, pořadí dalších kapitol už není rozhodující.

Na konci každé podkapitoly najdete příklady k procvičení probrané látky. Protože není smysluplné vybudovat nejdříve celou teorii a teprve potom řešit příklady, tak některá cvičení se odvolávají na pojmy, které budou zavedeny teprve v pozdějších kapitolách. Věřím, že není problém nalistovat si příslušnou definici (na konci textu najdete rejstřík), a pak takové příklady vyřešit.

Poslední podkapitola většiny kapitol se věnuje tématům, která přesahují rámec kurzu a která nejsou pro pochopení látky nezbytná. Chtěl jsem zvídavým čtenářům nabídnout širší pohled na probíranou látku a zmínit souvislosti s jinými disciplínami matematiky i vědními obory. Některé pojmy jsou zde zavedené volněji, často postavené jen na intuitivní představě, případně s odkazem na jinou literaturu. Věřím, že právě rozšiřující témata se budou líbit těm, kteří s matematikou půjdou dál, než ke zkoušce.

V textu kapitol a na konci podkapitol jsem zařadil množství odkazů na internet. Prosím o shovívavost, jestliže některé odkazy budou v době vašeho studia zastaralé. Připomínky posílejte na adresu `petr.kovar@vsb.cz`.

### Poděkování

Děkuji všem, kteří mi pomohli s přípravou textu, zejména pak Jiřímu Fialovi, Jiřímu Matouškovi, Jaroslavu Nešetřilovi, Jiřímu Rohlenovi a Jiřímu Tůmovi za cenné připomínky a podněty.

Děkuji Michaelu Kubesovi za pečlivé přečtení velké části jedné z verzí tohoto textu. Odhalil mnoho chyb a jeho promyšlené návrhy přispěly ke srozumitelnosti celého textu. Děkuji i Martině Litschmannové za užitečné připomínky k organizaci textu a k jazykové stránce. Dík patří i Jakubovi Závadovi, který pomohl opravit řadu překlepů v anglické verzi částí textu.

**K použitým symbolům**

Příklady označené „*“ patří k náročnějším. Jejich řešení obvykle vyžaduje delší výpočet nebo pečlivější rozbor. Pro řešení příkladů označených „**“ je třeba nějaký nápad nebo výsledek z jiné oblasti matematiky. Zdůrazněme ale, že hvězdička neznamená nutně „to nikdy nevyřeším“. Naproti tomu příklady označené „$^{\heartsuit}$“ jsou tak lehké, že jejich řešení je zpravidla možné zpaměti a jen s užitím základních pojmů.

Do textu jsem zařadil i několik příkladů označených symbolem „$^{?}$“, které mne potrápily a jejichž řešení neznám. Možná jsem se vzdal příliš brzy. Některé se týkají známých otevřených problémů teorie grafů. Věřím, že právě řešení takových problémů může být výzvou pro tříbení talentů.

V Krmelíně 20. února 2024.

# Obsah


Úvodem . . . i

**Přehled pojmů a označení . . . 1**

0.1. Motivační příklady . . . 1
0.2. Množiny a posloupnosti . . . 2
0.3. Relace . . . 7
0.4. Zobrazení a operace . . . 13
0.5. Kombinatorické výběry . . . 14
0.6. Důkazové techniky . . . 20
0.7. Co se nevešlo . . . 26
0.8. Doplňková témata . . . 27

**1. Grafy a podgrafy . . . 44**

1.1. Grafy a jednoduché grafy . . . 44
1.2. Stupeň vrcholu . . . 48
1.3. Podgrafy . . . 53
1.4. Implementace grafů v počítači . . . 55
1.5. Doplňková témata . . . 57

**2. Cesty a cykly v grafu . . . 64**

2.1. Sledy, tahy a cesty . . . 64
2.2. Souvislost a vzdálenost v grafu . . . 66
2.3. Excentricita, poloměr a průměr grafu . . . 68
2.4. Doplňková témata . . . 71

**3. Stromy, cykly a bipartitní grafy . . . 81**

3.1. Stromy . . . 81
3.2. Kostry . . . 84
3.3. Cykly a bipartitní grafy . . . 87
3.4. Doplňková témata . . . 90

**4. Izomorfismus grafů . . . 102**

4.1. Pojem izomorfismu . . . 102
4.2. Automorfismus grafů . . . 106
4.3. Doplňková témata . . . 109

**5. Vrcholová a hranová souvislost . . . 113**

5.1. Míra souvislosti grafu . . . 113
5.2. Bloky a artikulace grafů . . . 120
5.3. Doplňková témata . . . 126

**6. Párování a pokrytí . . . 131**

6.1. Párování . . . 131
6.2. Párování v bipartitních grafech . . . 134
6.3. Pokrytí v bipartitních grafech . . . 137
6.4. Úplné párování v obecných grafech . . . 139
6.5. Doplňková témata . . . 143

**7. Hranová barvení grafů . . . 148**

7.1. Hranová barvení a chromatický index grafu . . . 148
7.2. Hranová barvení některých speciálních tříd grafů . . . 153
7.3. Rozklady grafů . . . 155
7.4. Doplňková témata . . . 160

**8. Vrcholová barvení grafů . . . 163**

8.1. Vrcholové barvení a chromatické číslo grafu . . . 163
8.2. Brooksova věta . . . 167
8.3. Další meze chromatického čísla . . . 169

8.4. Doplňková témata . . . 171
**9. Planární grafy . . . 175**
9.1. Rovinné a planární grafy . . . 175
9.2. Topologický přístup . . . 177
9.3. Algebraický přístup a Eulerův vzorec . . . 181
9.4. Duální grafy a barvení planárních grafů . . . 184
9.5. Doplňková témata . . . 190
**10. Neplanární grafy . . . 206**
10.1. Průsečíkové číslo . . . 206
10.2. Tloušťka grafu . . . 207
10.3. Rod grafu . . . 208
10.4. Doplňková témata . . . 211
**11. Eulerovské a hamiltonovské grafy . . . 214**
11.1. Eulerovské grafy . . . 214
11.2. Hamiltonovské grafy . . . 217
11.3. Další výsledky . . . 225
11.4. Doplňková témata . . . 228
**12. Orientované grafy . . . 232**
12.1. Základní pojmy . . . 232
12.2. Cesty, cykly, dosažitelnost . . . 235
12.3. Turnaje . . . 241
12.4. Orientované eulerovské grafy . . . 246
12.5. Doplňková témata . . . 248
**13. Problémy a úlohy . . . 250**
13.1. Úlohy se známým řešením . . . 250
13.2. Úlohy bez řešení . . . 253
**Rejstřík . . . 255**
Otázka copyrightů . . . 277
**Literatura . . . 279**
Přehled použitých symbolů . . . 280

# Přehled pojmů a označení

V úvodní kapitole shrneme stručný přehled pojmů, se kterými budeme v textu pracovat a které spadají do jiných (předchozích) matematických kurzů. Budeme se snažit spíše o přehlednost, než o korektní vybudování teorie. Pro studenty, kteří si budou chtít doplnit znalosti podrobněji, uvedeme několik odkazů na konci podkapitol.

## 0.1. Motivační příklady

Následuje malá ochutnávka problémů, které se naučíme řešit užitím nástrojů teorie grafů.

**Příklad 0.1. „Handshaking problem“**
Máme skupinu $n$ lidí ($n \geq 2$) z nichž někteří si podali ruce. Ukažte, že ve skupině jsou alespoň dva lidé, kteří podali ruku stejnému počtu lidí ve skupině.

Každý z $n$ lidí mohl podat ruku nejvýše $n-1$ krát a nejméně 0 krát. To je celkem $n$ možných různých počtů. Nemůže však současně nastat, že někdo podá ruku všem $n-1$ ostatním a někdo jiný si nepodá ruku s nikým. Proto máme nejvýše $n-1$ různých počtů podání rukou mezi $n$ lidmi. Podle Dirichletova principu musí alespoň dva lidé podat ruku stejnému počtu lidí ve skupině. Jiné, kratší řešení si ukážeme v kapitole 1.2. ✓

**Příklad 0.2. Sedm mostů města Královce**
Městem Královec (nyní Kaliningrad na území Ruska) teče řeka Pregola, která vytváří dva ostrovy. V 18. století byly ostrovy spojeny s oběma břehy i navzájem celkem sedmi mosty. Otázka zní, zda je možné všechny mosty přejít tak, aby ten, kdo se o to pokouší, vstoupil na každý most pouze jednou.

V 11. kapitole ukážeme, že graf, jehož vrcholy reprezentují oba ostrovy a břehy a jehož hrany reprezentují mosty v dobové mapě Královce, není možno nakreslit jedním tahem, protože graf není Eulerovský. Řešení úlohy proto neexistuje. ✓

**Příklad 0.3. Vánoční pohledy**
Devět kamarádů na Vánoce posílalo pohlednice. Každý poslal pohlednici třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal pohlednice právě od těch tří kamarádů, kterým pohlednice sám poslal.

Budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že takovou výměnu pohlednic podle podmínek zadání lze uskutečnit. Všimneme si, že v tom případě si každá dvojice kamarádů buď žádnou pohlednici nevymění nebo si navzájem vymění dvě pohlednice. Proto celkový počet pohlednic musí být sudý (násobek dvou). Současně každý z devíti kamarádů napsal a poslal tři pohlednice, to je celkem $9 \cdot 3 = 27$ pohlednic (lichý počet), což je spor. Proto není možné, aby každý dostal pohlednice právě od těch tří kamarádů, kterým pohlednice sám poslal. Jiné elegantní řešení si ukážeme v kapitole 1.2. ✓

**Příklad 0.4.** Ke třem nově postaveným domům má být zavedena voda, elektřina a plyn. Pro přehlednost předpokládejme, že všechny tři domy jsou postavené na jedné straně cesty a společná přípojka pro plyn, společná přípojka pro vodu a také pro elektřinu jsou na druhé straně cesty. Vedení do každého domu povede v zemi a podle nových předpisů se jednotlivá vedení (výkopy) nesmí sdílet, dokonce ani křížit. Jak navrhnout trasu vedení tak, aby se jednotlivá vedení nekřížila? Pomůže, když domy a přípojky budou rozmístěny jinak po obou stranách cesty?

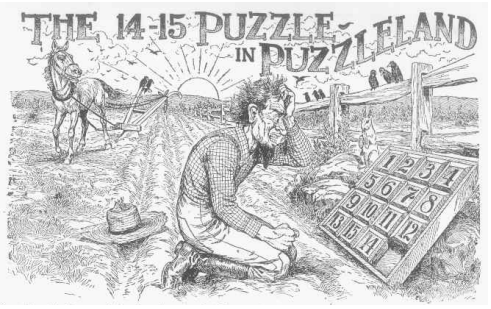
V kapitole 9. ukážeme, že řešení neexistuje ani když dovolíme libovolné rozmístění domů a společných přípojek. Vždy musí existovat alespoň jedno křížení. Zmíníme dokonce jedno zobecnění uvedeného problému. Pokud by domy a přípojky byly postaveny na hypotetické planetě ve tvaru anuloidu (torus), tak by bylo možno podle předpisů připojit dokonce čtyři domy ke čtyřem různým přípojkám (například ještě ke kanalizaci), větší počet domů nebo větší počet přípojek pak opět bude možné vybudovat jen pokud budou povoleny společné výkopy nebo jejich křížení. ✓

**Loydova patnáctka**

Hlavolam Patnáctka, nebo také Loydova patnáctka, sestává z patnácti kamenů umístěných do krabičky pro $4 \times 4$ kameny, přičemž kameny můžeme posouvat na sousední volnou pozici. Jeho autorství bývá připisováno Americkému vynálezci a matematikovi Samu Loydovi. Některé prameny však původ hlavolamu připisují poštmistrovi Noyesi Palmeru Chapmanovi z Canastoty ve státě new York. Cílem hlavolamu je přesunout kameny z výchozí pozice do stavu, kdy jsou kameny seřazeny vzestupně po řádcích a volná pozice je na posledním místě.

Různá rozmíchání Loydovy patnáctky a přípustné tahy můžeme popsat pomocí stavového grafu. Každé rozmístění kamenů do krabičky bude odpovídat některé z 16! permutací šestnáctiprvkové množiny (včetně volné pozice). Takový graf bude mít $16! \doteq 2,1 \cdot 10^{13}$ vrcholů. Každý přípustný tah reprezentujeme hranou, která spojuje výchozí a koncový stav kamenů daného tahu.

**Příklad 0.5.** Ukážeme, že z pozice, kdy jsou prohozené kameny s čísly 14 a 15 (Obrázek 0.1.) není možné dostat posloupností legálních tahů uspořádaný hlavolam, ve kterém jsou čísla po řádcích od 1 do 15?
Dá se ukázat, že stavový graf popsaný v předchozím odstavci není souvislý a že počáteční a cílový stav hlavolamu se nachází v různých komponentách stavového grafu. Je to proto, že každý tah spojuje dva vrcholy, které odpovídají permutacím se stejnou paritou. Proto cílový stav je v komponentě, která obsahuje pouze vrcholy se sudými permutacemi kamenů a výchozí stav patří do komponenty s vrcholy os lichými permutacemi kamenů. Žádná posloupnost legálních tahů proto neexistuje. ✓




Obrázek 0.1.: *Ilustrace Loydovy patnáctky z roku 1914.*

O rozboru hlavolamu z pohledu algebry je psáno také v textu [A].

**Odkazy:**

- https://cs.wikipedia.org/wiki/Patnáctka

**Další motivační úlohy**

Další klasickou úlohou diskrétní matematiky je skladovací problém. Jeho formulace je na straně 163.

Některé hry je možno modelovat grafem. Například hry na straně 90 nebo straně 143. Řadu mechanických hlavolamů je možno popsat stavovým grafem, ve kterém vrcholy odpovídají různým rozmícháním hlavolamu a hrany spojují dva stavy, které můžeme jedním tahem změnit z jednoho stavu do druhého. O rozboru hlavolamu z pohledu algebry je psáno v textu [A].

## 0.2. Množiny a posloupnosti

V textu budeme často pracovat s množinou přirozených čísel $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Zejména si všimněte, že na rozdíl od předmětu Diskrétní matematika nepovažujeme číslo 0 za přirozené číslo.

**Množiny**

*Množinou* rozumíme nějaký soubor objektů. Množiny obvykle značíme velkými písmeny $A, B, M, V, E$. *Prvky* množin značíme malými písmeny $a, b, x, u, v, e, \ldots$ Skutečnost, že prvek $a$ do množiny $M$ patří, zapíšeme $a \in M$ (řekneme, že $a$ je *prvek* množiny $M$) a pokud prvek $a$ do množiny $M$ nepatří, řekneme, že $a$ není *prvek* množiny $M$, a zapíšeme stručně $a \notin M$. *Prázdnou množinu* značíme symbolem $\emptyset$.

Množiny zadáváme buď výčtem prvků (například $X = \{a, b, c, d\}$) nebo popisem vlastnosti (například $M = \{x : x \in \mathbb{N},\ x > 5\}$. V některých případech využijeme zavedená označení, například

přirozená čísla $\mathbb{N}$, celá čísla $\mathbb{Z}$ nebo reálná čísla $\mathbb{R}$. Pořadí prvků množiny, na rozdíl od posloupnosti, nehraje roli, dokonce ani pro množinu reprezentující interval celých čísel (definici najdete dále v této kapitole). V množině není „první“ nebo „druhý“ prvek, na pořadí má smysl se odvolat jen pro určitý zápis dané množiny.

Předpokládáme, že v množině se každý prvek vyskytuje nejvýše jedenkrát. Proto například $\{a, b, a, c\} = \{a, b, c\}$ a je tedy rozumné předpokládat, že v seznamu se každý prvek vyskytuje jen jednou. V literatuře se objevuje pojem *multimnožina*, který popisuje takové zobecnění pojmu množiny, ve kterém je povoleno opakování prvků. V tomto textu opakované prvky v obyčejné množině ani v jejím zápise nepřipustíme s výjimkou stručného zápisu posloupnosti užitím trojtečky. Například seznam $1, 2, \ldots, n$ pro $n = 2$ obsahuje číslo 2 dvakrát a pro $n = 1$ je dokonce číslo 2 nadbytečné! Budeme dodržovat úmluvu, že v zápise použitím trojtečky uvedeme vždy dva první členy a po trojtečce poslední člen a případné zdvojení členů nebo překročení výčtu do přípustných hodnot nezahrneme.

Množina $A$ je *podmnožinou* $B$, jestliže pro každé $a \in A$ je také $a \in B$, což zapisujeme jako $A \subseteq B$. Jestliže chceme zdůraznit, že $A$ je *vlastní* podmnožinou množiny $B$, tj. $B$ obsahuje alespoň jeden prvek, který není v množině $A$, tak použijeme symbol $A \subset B$.

*Interval celých čísel* $[a, b]$ zavedeme jako množinu $\{x \in \mathbb{Z} : a \leq x \wedge x \leq b\}$. *Mohutnost* (konečné) množiny $M$ udává počet prvků v $M$ a značíme ji $|M|$. Mohutnost má smysl zavést i pro nekonečné (i nespočetné) množiny, v tomto textu ale budeme pracovat s mohutností jen konečných množin.

**Posloupnosti**

*Posloupnost* je seřazený seznam libovolných *prvků* nějaké pevně zvolené množiny $A$. Nekonečnou posloupnost můžeme formálně zavést jako *funkci*, která každému přirozenému číslu přiřadí nějaký prvek z množiny $A$. Konečnou $n$-prvkovou posloupností budeme rozumět funkci $a : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$ a zapisujeme ji $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nebo $(a_i)_{i=1}^n$. Podobně $i$-tý *člen* (prvek) posloupnosti značíme $a_i$ místo $a(i)$. Indexy členů posloupnosti jsou obvykle přirozená čísla, která začínají od 1. Někdy je vhodné za index prvního členu zvolit jiné celé číslo.

Posloupnosti mohou být konečné i nekonečné. Nekonečnou posloupnost zapíšeme $(a_1, a_2, \ldots)$ nebo $(a_i)_{i=1}^\infty$. Dokonce dovolíme, aby definiční obor funkce posloupnosti byla prázdná množina. Hovoříme pak o *prázdné posloupnosti*. Všimněte si, že podle definice se prvky v posloupnosti mohou opakovat v libovolném počtu kopií. Proto i z prvků konečné množiny můžeme sestavit nekonečnou posloupnost. V tomto textu budeme pracovat téměř výhradně s konečnými posloupnostmi. Posloupnost můžeme zadat několika různými způsoby:

*Výčtem prvků* Je-li posloupnost zadána výčtem prvků, tak jednoduše vypíšeme všechny členy posloupnosti $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Například $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29)$.

*Vzorcem pro n-tý člen* Zadáme funkční předpis, jak vypočítat $a_n$, například $a_n = n^2 + n + 41$ pro $n = 0, 1, \ldots, 39$.

*Rekurentně* Je-li posloupnost daná *rekurentně*, znamená to, že zadáme dostatečný počet prvních členů a vztah, jak vypočítat další člen z několika předchozích členů. Například zadáme dva první členy $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ a rekurentní předpis $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a dostaneme známou Fibonacciho posloupnost.

Prvky číselné posloupností můžeme sčítat. Pokud budeme sčítat všechny členy posloupnosti $(a_i)_{i=1}^n$, můžeme součet zapsat pomocí *sumačního znaménka* $\sum$ jako

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Podobně můžeme zapsat součet jen některých členů posloupnosti, například $\sum_{i=1}^n a_{2i}$ nebo dokonce součet nekonečné posloupnosti $\sum_{i=1}^\infty a_i$. Někdy je šikovné sečíst jen vybrané členy dané posloupnosti. S výhodou můžeme využít *indexovou množinu*, tj. množinu indexů vybraných členů. Například

$$\sum_{i \in \{2,4,7\}} i^2 = 2^2 + 4^2 + 7^2.$$

Při popisu indexové množiny se mohou využít i jiné zápisy, pokud jsou obecně srozumitelné. Například

$$\sum_{\substack{1\le i\le 10\\ i\neq 5}} i = 1+2+3+4+6+7+8+9+10.$$

Podobně jako se součtem můžeme pracovat se součinem prvků posloupnosti. Zatímco pro označení součtu používáme $\sum$ podle řeckého písmene $\Sigma$ jako „**s**uma“, tak pro označení součinu členů posloupnosti se používá $\prod$ podle řeckého písmene $\Pi$ jako „**p**rodukt“. Součin všech členů posloupnosti $(a_i)_{i=1}^n$, můžeme zapsat stručně

$$\prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Samozřejmě můžeme pracovat s indexovou množinou pro součiny podobně jako pro sumy. Pokud je posloupnost hodnot, přes kterou se má sčítat, prázdná, tak *prázdnou sumu* klademe rovnu 0. Podobně součin prvků prázdné posloupnosti klademe roven 1 (nikoliv nula!), například

$$\sum_{i=3}^{2} i = 0, \qquad \prod_{\substack{24\le i<29\\ i \text{ prvočíslo}}} i = 1.$$

**Operace s množinami**

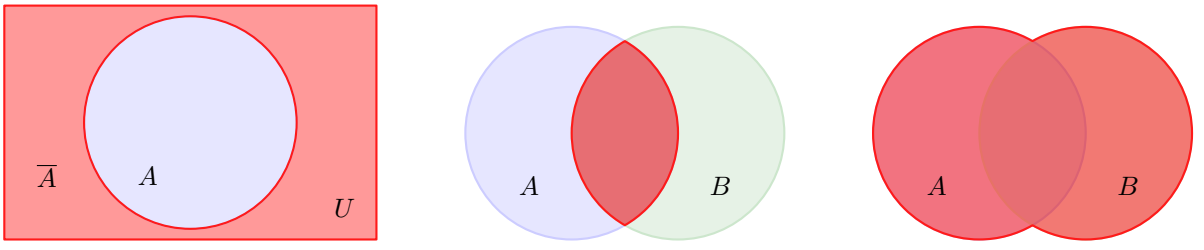
S množinami můžeme provádět různé operace. Oproti operacím s čísly jsou možnosti rozmanitější. Operací (obvykle binární) na množině $A$ rozumíme proces, který několika množinám (obvykle dvěma) přiřadí nějakou další množinu. Formální definici operace zmíníme později.

Při popisu operací bývá užitečné zavést pojem univerza. Univerzem $U$ rozumíme takovou obecnou množinu, která obsahuje všechny prvky, se kterými budeme pracovat. Každá množina $A$ pak bude podmnožinou $U$. V analýze bývá univerzem $\mathbb{R}$, případně $\mathbb{C}$, v aritmetice $\mathbb{N}$. V teorii grafů může, v závislosti na řešeném problému, takovým univerzem být například množina „všech vrcholů“ grafu. Všimněte si, že hrany pak *nebudou* do zvoleného univerza patřit.

Nejjednodušší operací je doplněk množiny na univerzu $U$. Jestliže máme množinu $A$ v univerzu $U$, tak její doplněk je množina, která obsahuje právě všechny prvky univerza $U$, které nejsou v množině $A$. Doplněk množiny značíme $\overline{A}$, případně $\overline{A}_U$, pokud chceme zdůraznit množinu univerza, a formálně definujeme $\overline{A}_U = \{a \in U : a \notin A\}$. Neformálně můžeme doplněk popsat pomocí Vennova diagramu na Obrázku 0.2. Více o Vennových diagramech je psáno na straně 29.

**Otázky:**

- Může platit $\overline{A} = A$?
- Může platit $\overline{A} \subseteq A$?




Obrázek 0.2.: *Doplněk množiny $A$ na univerzu $U$, průnik množin $A \cap B$ a sjednocení množin $A \cup B$ jsou vyznačeny červeně.*

Různých binárních operací existuje mnoho (kolik?). Průnik dvou množin $A$, $B$ značíme $A \cap B$ a jedná se o množinu prvků, které jsou v obou množinách současně. Formálně definujeme $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$. Sjednocení dvou množin $A$, $B$ značíme $A \cup B$ a jedná se o množinu prvků, které jsou v alespoň jedné z množin. Formálně definujeme $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$. Neformální popis průniku a sjednocení množin $A$ a $B$ pomocí Vennova diagramu je na Obrázku 0.2.

Pro doplněk, průnik a sjednocení dvou množin $A$ a $B$ platí De Morganova pravidla

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Obrázek 0.3.: *Rozdíl množin $A \setminus B$ a symetrická diference množin $A \triangle B$ jsou vyznačeny červeně.*

Rozdíl množin značíme $A \setminus B$ (v tomto pořadí). Jedná se o množinu prvků z množiny $A$, které nejsou v množině $B$. Formálně definujeme $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$. Symetrická diference množin $A$ a $B$ se značí $A \triangle B$ nebo $A \ominus B$. Někdy také $A \Delta B$ či $A + B$. V tomto textu budeme používat označení $A \triangle B$. Jedná se o prvky, které jsou obsaženy v právě jedné ze dvou množin $A$ a $B$, formálně $A \triangle B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$. Symetrickou diferenci můžeme nadefinovat také jako $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ nebo $A \triangle B = (\overline{A \cap B})_{A \cup B}$. Rozdíl a symetrická diference množin znázorněné Vennovým diagramem jsou na Obrázku 0.3.

Podobně, jako jsme na straně 3 zavedli sumační symbol pro součet prvků posloupnosti, můžeme zavést symbol pro průnik a sjednocení posloupnosti množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n, \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.$$

Analogicky zavedeme i průnik a sjednocení posloupnosti množin přes indexovou množinu $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$, kde $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$\bigcap_{j \in J} A_j = A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_k}, \qquad \bigcup_{j \in J} A_j = A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \ldots \cup A_{j_k}.$$

Uvědomme si, že průnik posloupnosti množin a sjednocení posloupnosti množin můžeme takto zavést, protože operace průnik a sjednocení množin je podle definice asociativní. Průnik a sjednocení přes indexovou množinu navíc vyžaduje, aby příslušné operace byly komutativní, což platí (Cvičení 0.2.2.).

Symbolům $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\triangle$ i dalším podobným říkáme *binární operátory*.

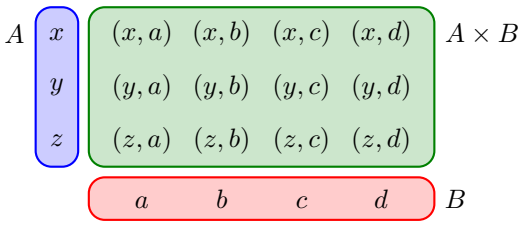
**Otázky:**

- Je operace rozdíl množin pro některé dvě množiny komutativní?
- Je operace rozdíl množin pro některé tři množiny asociativní?
- Je operace symetrické diference množin pro některé dvě množiny asociativní?

**Další operace s množinami**

Zavedeme další užitečné operace – kartézský součin a kartézskou mocninu množin. Mějme dvě množiny $A$ a $B$. Jejich kartézský součin bude množina uspořádaných dvojic prvků z $A$ a $B$, kterou označíme $A \times B$. Definujeme

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$




Obrázek 0.4.: *Znázornění kartézského součinu množin* $A \times B = \{x, y, z\} \times \{a, b, c, d\}$.

Pro konečné množiny se dá snadno ukázat, že platí $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Grafické znázornění je na Obrázku 0.4. Všimněte si, že obecně neplatí $A \subseteq A \times B$ ani $A \in A \times B$.

Kartézský součin množin obecně *není* komutativní operace. Komutativita je splněna pouze v triviálních případech, kdy $A = B$ nebo když alespoň jedna z množin je prázdná. Kartézský součin můžeme zobecnit i pro součin více množin. Definujeme a značíme $n$-ární kartézský součin množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jako

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, n\},$$

přičemž unární kartézský součin $A_1$ klademe roven $A_1$. V některé literatuře najdeme rekurzívní definici $n$-árního součinu, která využívá konstrukci $A^n = A^{n-1} \times A$. Striktně vzato bez nějaké další úmluvy nejsou tyto definice ekvivalentní a obecně by takto zavedená operace nebyla asociativní, protože například pro $A = \{a\}$ bychom měli

$$A \times (A \times A) = \{(a, (a, a))\} \neq \{((a, a), a)\} = (A \times A) \times A.$$

Zavedeme proto úmluvu, že prvky kartézského součinu $n$ množin pro libovolné uzávorkování budou uspořádané $n$-tice sestavené po řadě z prvků množin součinu. Nyní snadno zavedeme také $n$-tou *kartézskou mocninu* množiny $A$ jako

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ krát}},$$

přičemž definujeme $A^1 = A$ a $A^0 = \{\emptyset\}$.

**Otázky:**

- Co je výsledkem kartézského součinu $A \times \emptyset$?
- Co je výsledkem kartézské mocniny $\emptyset^2$?
- Co je výsledkem kartézské mocniny $\emptyset^0$?
- Platí obecně $A \subseteq (A \times A)$?
- Platí vždy $A \cap (A \times B) = \emptyset$?

Jestliže množina $S$ obsahuje jako prvky jen množiny, říkáme, že $S$ je *systém* množin. Je to nejen přehlednější, ale i srozumitelnější než „množina množin“. Ke každé množině $A$ umíme sestrojit systém množin, který obsahuje všechny její podmnožiny. Tento systém značíme $2^A$ a nazýváme jej *potenční množina* nebo *potenční systém* množiny $A$, protože obsahuje všechny potenciální podmnožiny množiny $A$. Snadno se ukáže (například indukcí), že mohutnost potenční množiny $2^A$ množiny $A$ je $|2^A| = 2^{|A|}$ (Cvičení 0.2.11.). Nyní snadno nahlédneme, odkud pochází i poněkud zvláštní označení potenční množiny.

**Otázky:**

- Jaký je rozdíl mezi $\emptyset$ a $\{\emptyset\}$?
- Jak vypadá potenční množina prázdné množiny?
- Jaká množina má prázdnou potenční množinu?
- Platí $A \in 2^A$ nebo $A \subseteq 2^A$?

## Cvičení

*0.2.1.*$^{\heartsuit}$ *Ukažte, že pro libovolné univerzum $U$ a libovolnou množinu $A \in U$ platí $\overline{\overline{A}} = A$.*

*0.2.2.*$^{\heartsuit}$ *Ukažte, že operace průnik množin a sjednocení množin je komutativní a asociativní.*

*0.2.3.*$^{\heartsuit}$ *Ukažte, že operace rozdíl množin není komutativní ani asociativní.*

*0.2.4. Ukažte, že operace symetrická diference množin je asociativní.*

*0.2.5. Nadefinujeme symetrickou diferenci přes indexovou množinu $J$, přičemž $|J| \geq 2$, následujícím způsobem: $\triangle_{j\in J}A_j = (((A_{j_1} \triangle A_{j_2}) \triangle A_{j_2}) \triangle \ldots \triangle A_{j_k})$, kde $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$. Ukažte, že platí*

$$\triangle_{j\in J}A_j = \left\{x \in \cup_{j\in J}A_j : \left|\{A_j : x \in A_j\}\right| \text{ je liché číslo}\right\},$$

*neboli symetrická diference posloupnosti množin obsahuje pouze ty prvky, které se vyskytují v lichém počtu množin daného systému množin.*

*0.2.6.* Najděte všechny takové množiny $A$, pro které platí $A \subseteq powersetA$.*

*0.2.7. Kolik existuje takových trojic množin $A$, $B$, $C$, aby platilo $A \subseteq B \subseteq C$?*

*0.2.8. Najděte obecný vztah pro součet a) prvních $n$ lichých čísel, b) prvních $n$ sudých kladných čísel.*

*0.2.9. Vypočítejte součet $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i i$.*

*0.2.10. Pro každé přirozené číslo $n$ najděte největší systém $S$ podmnožin nějaké $n$-prvkové množiny tak, aby $\forall A, B \in S$ platilo $A \cap B \neq \emptyset$.*

*0.2.11. Ukažte, že potenční množina libovolné konečné množiny $A$ má $2^{|A|}$ prvků.*

## 0.3. Relace

Pokud dvě věci spolu souvisí, tak v běžné řeči někdy říkáme, že jsou v relaci[1]. Tuto vlastnost budeme nyní formalizovat pro matematické objekty.

**Základní vlastnosti relací**

*Relace mezi množinami* $A$ a $B$ je nějaká (libovolná) podmnožina $R$ kartézského součinu $A \times B$. Součin $A \times B$ obsahuje všechny uspořádané dvojice prvků z $A \times B$, relace $R$ obecně obsahuje jen některé z nich – ty dvojice prvků, které jsou v relaci. Vlastnost, že dva prvky $a \in A$, $b \in B$ *jsou v relaci* zapisujeme zkráceně $aRb$ místo $(a, b) \in R$. Jestliže dvojice prvků není v relaci, píšeme $a \not R b$ místo $(a, b) \notin R$. Prvek $a$ se nazývá *předchůdce* prvku $b$ a naopak prvek $b$ se nazývá *následovník* prvku $a$.

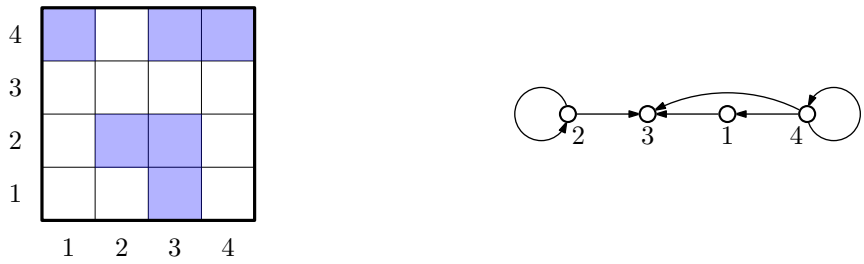
Řada relací má svá ustálená označení, kterému říkáme *relační symbol*. Například relace rovnosti značíme $=$, relace menší $<$, relace menší nebo rovno $\leq$ nebo relace ekvivalence $\sim$. V takovém případě je značení $a < b$ (rozuměj $aRb$) mnohem přehlednější, než „$(a, b) \in <$“.

Speciální a velmi důležitý případ je (binární) *relace na množině* $A$. Jedná se o libovolnou podmnožinu druhé kartézské mocniny $A^2$. Relaci $R$ na množině $A$ můžeme přehledně znázornit několika způsoby. Jedním je algebraický zápis pomocí čtvercové matice $M = (m_{ij})$ řádu $|A|$. Každému prvku množiny $A$ přiřadíme nějaký (jiný) řádek a sloupec. Jestliže platí $iRj$ (prvky $i$ a $j$ jsou v relaci $R$), tak položíme $m_{ij} = 1$. V opačném případě definujeme $m_{ij} = 0$. Například relaci $R = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (4, 1), (4, 4)\}$ na množině $A = [1, 4]$ můžeme znázornit pomocí následující matice $M$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] Relací máme na mysli vzájemný vztah, nikoliv rozhlasové nebo jiné vysílání.

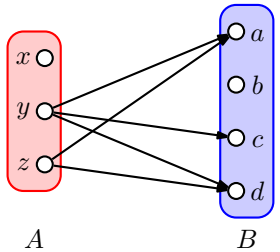
Uvedeme i dva grafické způsoby znázornění relace. Podle toho, zda jsou prvky $i$ a $j$ v relaci budeme vybarvovat jednotková políčka ve čtvercovém schématu o rozměru $|A| \times |A|$ políček (počítáme jako v prvním kvadrantu souřadné soustavy). Příklad znázornění relace $R$ na množině $A$ je na Obrázku 0.5. vlevo. Zcela odlišné grafické znázornění pomocí šipek je na Obrázku 0.5. vpravo. Každému prvku množiny $A$ přiřadíme bod v rovině a dva body $x$, $y$ spojíme šipkou směřující z $x$ do $y$ právě tehdy, když $xRy$.




Obrázek 0.5.: *Dvě různá grafická znázornění téže relace $R$ na množině $[1, 4]$.*

Pro přehledné znázornění relace mezi dvěma různými množinami můžeme použít obdélníkové matice nebo obdélníková grafická schémata. Na Obrázku 0.6. vlevo je relace $S = \{(y, a), (y, c), (y, d), (z, a)\}$ mezi množinami $A = \{x, y, z\}$ a $B = \{a, b, c, d\}$ zapsaná v matici $N$ a grafický způsob znázornění relace $S$ pomocí šipek je na Obrázku 0.6. vpravo.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$




Obrázek 0.6.: *Znázornění relace $S$ mezi množinami $A = \{x, y, z\}$ a $B = \{a, b, c, d\}$.*

**Speciální typy relací**

Relací na konečně množině existuje sice konečně mnoho, ale i pro malé množiny může počet různých relací být velký. Například na desetiprvkové množině můžeme sestavit $2^{100} \doteq 1,3 \cdot 10^{30}$ různých relací. Pro zajímavost srovnejme počet různých relací na patnáctiprvkové množině $2^{225} \doteq 5,4 \cdot 10^{67}$ a odhadovaný počet atomů ve Sluneční soustavě $1,2 \cdot 10^{57}$. Jak by asi vypadal seznam všech takových relací? Protože obvykle není možno zkoumat všechny relace na dané (byť poměrně malé) konečné množině, zaměříme se jen na relace, které mají pěkné vlastnosti a praktický význam. Takové „pěkné“ vlastnosti mají své názvy. Řekneme, že (binární) relace na množině $A$ je

- *reflexivní* jestliže $\forall x \in A$ platí $(x, x) \in R$,
- *ireflexivní* jestliže $\forall x \in A$ platí $(x, x) \notin R$,
- *symetrická* jestliže $\forall x, y \in A$ platí $(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$,
- *antisymetrická* jestliže $\forall x, y \in A$ platí $(x, y), (y, x) \in R \Rightarrow x = y$,
- *asymetrická* jestliže $\forall x, y \in A$ platí $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$,
- *tranzitivní* jestliže $\forall x, y, z \in A$ platí $(x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$,
- *lineární* (nebo také *úplná*) jestliže $\forall x, y \in A$ platí $(x, y) \in R \vee (y, x) \in R$.

Uvedeme několik příkladů. Relace rovnosti $=$ je reflexivní, tranzitivní, symetrická i antisymetrická. Relace menší $<$ je tranzitivní, antisymetrická a je ireflexivní na rozdíl od relace $\leq$, která je tranzitivní, antisymetrická a reflexivní. Relace „dorozumět se“ je obvykle symetrická, nemusí však být tranzitivní.

Mějme celá čísla $a$, $b$. Řekneme, že $a$ *dělí* $b$ a píšeme $a \mid b$, jestliže existuje takové celé číslo $k$, že $b = ka$. V opačném případě řekneme, že $a$ *nedělí* $b$ a píšeme $a \nmid b$. Snadno se přesvědčíme, že relace dělitelnosti $\mid$ je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní na nějaké (konečné i nekonečné)

množině přirozených čísel. Relace dělitelnosti | na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$ je reflexivní, tranzitivní a antisymetrická, není však úplná ani symetrická. Stejné vlastnosti má i dělitelnosti | na množině přirozených čísel včetně nuly ($\mathbb{N} \cup \{0\}$). Zejména si všimněte, že je reflexivní. Avšak relace dělitelnosti na množině všech celých čísel $\mathbb{Z}$ *není* antisymetrická.

Není obtížné spočítat, kolik existuje různých symetrických relací, antisymetrických relací, asymetrických relací na dané $n$-prvkové množině $A$ (Cvičení 0.3.5.). Je znám počet relací na $A$, které jsou současně symetrické a tranzitivní, které jsou současně reflexivní, symetrické a tranzitivní (relace ekvivalence) nebo které jsou současně lineární, antisymetrické a tranzitivní. Na druhou stranu určení počtu všech tranzitivních relací (bez dalšího omezení) na množině $A$, je stále otevřený problém.

**Uspořádání a ekvivalence**

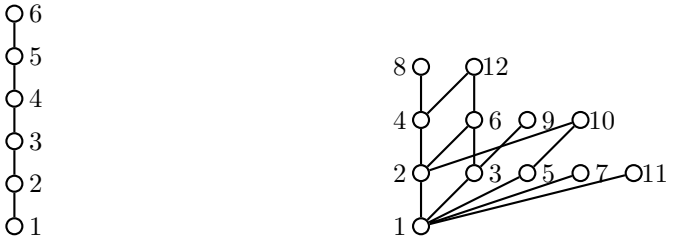
Mezi všemi relacemi mají významné postavení dvě: relace částečného uspořádání a relace ekvivalence. Relace *částečného uspořádání* na množině $A$ je každá binární relace, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Částečné uspořádání se značí symbolem $\preceq$, protože se může jednat i o jiné uspořádání, než je klasická relace uspořádání $\leq$ čísel podle velikosti. Názvem „částečné“ chceme zdůraznit, že se nemusí jednat o úplnou relaci na množině $A$, tj. ne každá dvojice prvků musí být v relaci $xRy$ nebo $yRx$. Takové dva prvky se nazývají *neporovnatelné*. Například relace „býti podmnožinou“ (relace inkluze $\subseteq$) je relace částečného uspořádání na nějaké množině. Už na dvouprvkové množině $\{x, y\}$ najdeme dvě neporovnatelné podmnožiny $\{x\}$ a $\{y\}$. Je-li naopak relace $\preceq$ lineární, tak říkáme, že relace je *lineární uspořádání* (Obrázek 0.7. vlevo). Příkladem lineárního uspořádání je obyčejné uspořádání celých, racionálních nebo reálných čísel podle velikosti nebo třeba abecední (lexikografické) uspořádání slov ve slovníku (Cvičení 0.3.4.).

Taková podmnožina $B$ množiny $A$ s uspořádáním $\preceq$, ve které jsou každé dva prvky porovnatelné, se nazývá *řetězec* (anglicky „chain“). Naopak, každá podmnožina $C$ množiny $A$, ve které jsou každé dva prvky neporovnatelné, se nazývá *úplně neuspořádaná množina* nebo *antiřetězec* (z anglického „antichain“).

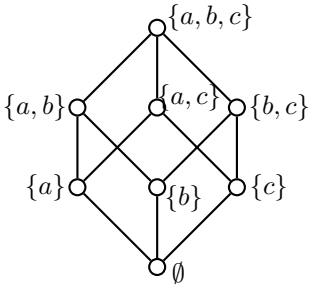
Relaci částečného uspořádání na konečně množině můžeme přehledně znázornit pomocí *hasseovského diagramu*. Prvky množiny $A$ zakreslíme jako body v rovině. Dále dodržíme následující dvě pravidla

(i) Je-li $x \preceq y$, tak bod $x$ zakreslíme níž než bod $y$.
(ii) Dva body spojíme hranou, jestliže $x \preceq y$ a neexistuje žádné $t \in A$ takové, aby $x \preceq t$ a současně $t \preceq y$.

Říkáme, že $y$ je *bezprostřední následovník* prvku $x$. Všimněte si, že vzájemná úroveň každých dvou prvků v relaci je určena jednoznačné, protože relace $\preceq$ je antisymetrická. Navíc *všechny* další spojnice vyplývají z tranzitivity relace, proto je do diagramu nemusíme zakreslovat. Tyto spojnice „navíc“ by celý diagram jen znepřehlednily (viz strana 28).




Obrázek 0.7.: *Lineární uspořádání relace menší nebo rovno* $\leq$ *na množině* $[1, 6]$ *a částečné uspořádání relace dělitelnosti* | *na množině* $[1, 12]$.




Obrázek 0.8.: *Relace podmnožiny* $\subseteq$ *na systému podmnožin množiny* $\{a, b, c\}$.

Relace dělitelnosti | na nějaké množině přirozených čísel je pěkným příkladem relace částečného uspořádání, které obecně *není* lineární (Obrázek 0.7. vpravo). Dalším běžným příkladem nelineární relace uspořádání je relace inkluze $\subseteq$ na potenční množině nějaké $n$-prvkové množiny (Obrázek 0.8., Cvičení 2.4.14.).

**Otázky:**

- Jaký je rozdíl mezi dělitelností čísel $a$, $b$ a dělením čísel $a$, $b$?
- Vysvětlete, která z následujících tvrzení jsou pravdivá: a) nula dělí každé číslo, b) každé číslo dělí nulu, c) nulou můžeme dělit každé číslo, d) nulu můžeme dělit každým číslem.

V matematice, na rozdíl od běžné řeči, rozlišujeme pojmy největší a maximální. Tyto pojmy jsou (někdy explicitně, jindy nepřímo) spjaty s nějakou relací částečného uspořádání. Množina s uspořádáním $\preceq$ se nazývá *poset* z anglického **p**artially **o**rdered **set**. Mějme nějaký poset $(A, \preceq)$. Prvek $m \in A$ se nazývá

1) *největší*, jestliže pro každý prvek $x \in A$ platí $x \preceq m$,
2) *nejmenší*, jestliže pro každý prvek $x \in A$ platí $m \preceq x$,
3) *maximální*, jestliže pro každý prvek $x \in A$ platí implikace $m \preceq x \Rightarrow x = m$,
4) *minimální*, jestliže pro každý prvek $x \in A$ platí implikace $x \preceq m \Rightarrow x = m$.

Jinými slovy, aby prvek $m$ posetu $(A, \preceq)$ byl maximální, nesmí existovat jiný prvek $x$ $(x \neq m)$, který by byl „následovníkem prvku $m$“, tedy v relaci „napravo od $m$“ $m \preceq x$. Z uvedené definice snadno odvodíme, že každý největší prvek je zároveň maximální. Opačné tvrzení platit nemusí. Podobně je tomu s nejmenšími a minimálními prvky posetu. Minimální prvek posetu $(A, \preceq)$ není následovníkem žádného jiného prvku a prvek je nejmenší, jestliže každý prvek v posetu $(A, \preceq)$ je jeho následovníkem. Například poset $([1, 12], |)$ na Obrázku 0.7. vpravo má šest maximálních prvků a nemá největší prvek. Naproti tomu nejmenším a zároveň minimálním prvkem je 1. Význam rozdílu obou pojmů bude patrný zejména v kapitole 6.

Příklady nekonečného posetu bez maximálního prvku jsou $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$ a $(\langle 0, 1), \leq)$. Všechny tři uvedené posety mají nejmenší prvek (jaký?) Naproti tomu poset $(\mathbb{Z}, \leq)$ nemá žádný nejmenší, největší ani maximální a minimální prvek. Všimněte si, že poset $(\mathbb{N} \cup \{0\}, |)$ *má* největší prvek, jaký?

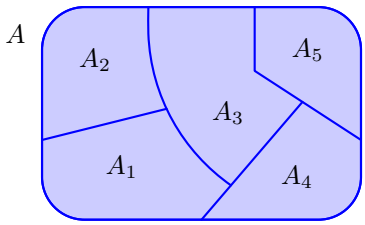
**Otázky:**

- Prvky řetězce uspořádané množiny jsou podle definice hasseovského diagramu zakresleny v různých hladinách. Je hladina každého prvku určena jednoznačně?
- Jaké jsou maximální a minimální prvky posetu $([1, 12], |)$ na Obrázku 0.7. vpravo?
- Jaký prvek bychom mohli do množiny $A = [1, 12]$ posetu $(A, |)$ přidat, aby poset $(A \cup \{m\}, |)$ měl největší prvek? Jaké by v tom případě byly maximální prvky?

V celém textu budeme často rozdělovat nějaké množiny na disjunktní části. *Rozklad* množiny $A$ je takový systém $S$ neprázdných podmnožin množiny $A$, které jsou po dvou navzájem disjunktní a jejichž sjednocení je množina $S$. Formálně je rozklad množiny $A$ systém podmnožin $A_i \subseteq A$ (kde $i \in I$ a $I$ je nějaká indexová množina), pro který platí

(i) $A_i \neq \emptyset$ pro každé $i \in I$,
(ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i, j \in I$, $i \neq j$,
(iii) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

Každá množina $A_i$ se nazývá *třída rozkladu* množiny $A$. Všimněte si, že definice zformulovaná pomocí indexové množiny zahrne i rozklad na nekonečně mnoho tříd rozkladu, zatímco kdybychom řekli, že rozklad je tvořen třídami $A_1, A_2, \ldots, A_k$, tak tříd bude právě $k$, tedy konečně mnoho. Samozřejmě třídy rozkladu $A_i$ mohou být libovolné neprázdné konečné i nekonečné množiny. Rozklad množiny na konečně mnoho podmnožin můžeme znázornit podobně jako na Obrázku 0.9., jednotlivé třídy mohou být konečné i nekonečné podmnožiny $A$. Rozklad na nekonečně mnoho tříd rozkladu lze znázornit jen schématicky.




Obrázek 0.9.: *Rozklad množiny $A$ na pět tříd $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$.*

**Otázky:**

- Najdete příklad rozkladu, který má konečně mnoho nekonečných tříd rozkladu?
- Najdete příklad rozkladu, který má nekonečně mnoho konečných tříd rozkladu?
- Najdete příklad rozkladu, který má nekonečně mnoho nekonečných tříd rozkladu?

Další významnou relací je relace ekvivalence. Každou binární relaci na množině $A$, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní nazveme relace *ekvivalence*. Relace ekvivalence se značí podle kontextu různými symboly, zpravidla $=$, $\equiv$, $\sim$, $\approx$, $\simeq$, $\cong$ a podobně. V následujících odstavcích budeme používat symbol $\simeq$.

Každou relaci ekvivalence můžeme znázornit, stejně jako každou relaci, maticí nebo pomocí šipek. Všimněte si, že znázornění pomocí hasseovského diagramu obecně *nemůžeme* použít (proč?). Nejpřehlednější je znázornění pomocí rozkladu množiny $A$ na tzv. třídy ekvivalence. Další věta ukáže, že mezi relacemi ekvivalence na dané množině a rozklady této množiny je úzká souvislost. *Třída ekvivalence* příslušná prvku $x \in A$ v relaci $\simeq$ je množina všech takových prvků $A$, které jsou s $x$ v relaci $\simeq$. Značíme ji $[x]_{\simeq}$, případně $[x]$, pokud je z kontextu zřejmé, s jakou relací ekvivalence pracujeme.

**Věta 0.1.** *Je-li $\simeq$ ekvivalence na množině $A$, tak všechny různé třídy ekvivalence $\simeq$ tvoří rozklad množiny $A$. Naopak, je-li $A_1, A_2, \ldots, A_k$ rozklad množiny $A$, tak existuje taková relace ekvivalence $\simeq$ na množině $A$, že $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou třídy ekvivalence $\simeq$.*

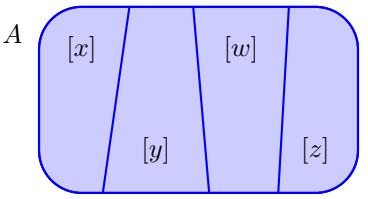
*Důkaz.* Jedná se o dvě implikace, dokážeme první z nich. Druhá je ponechána jako Cvičení 0.3.8.

Mějme relaci ekvivalence $\simeq$ na dané množině $A$. Pro každý prvek $x \in A$ bude příslušná třída rozkladu $[x]$ neprázdná, protože z reflexivity je $x \simeq x$, a proto $x$ jistě patří do $[x]$. Protože do každé třídy $[x]$ zařazujeme pouze prvky $A$, jistě platí $\cup_{x \in A}[x] \subseteq A$. Dále, protože každý prvek $x \in A$ patří do třídy $[x]$, platí $A \subseteq \cup_{x \in A}[x]$ a celkem dostaneme $\cup_{x \in A}[x] = A$.

Zbývá ověřit, zda jsou disjunktní různé třídy rozkladu. Postupujeme nepřímo a ukážeme, že je-li $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, tak $[x] = [y]$. Je-li $z \in [x]$, tak podle definice $[x]$ platí $z \simeq x$. Protože $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, tak existuje $w \in [x] \cap [y]$ a x definice tříd $[x]$, $[y]$ je proto $w \simeq x$ a $w \simeq y$. Dále ze symetrie relace $\simeq$ dostaneme $x \simeq w$. Víme, že $z \simeq x$, $x \simeq w$ a $w \simeq y$, a z tranzitivity relace $\simeq$ pak plyne $z \simeq y$. To ale znamená, že $z \in [y]$ a platí $[x] \subseteq [y]$. Opačná inkluze se dokáže analogicky záměnou symbolů $x$ a $y$. □

Vidíme, že oba pojmy, rozklad množiny $A$ a relace ekvivalence na množině $A$, jsou jen dva různé pohledy na stejnou věc. Podle důkazu Věty 0.1. můžeme k libovolnému rozkladu $S$ (jistému systému

podmnožin) množiny $A$ sestavit relaci ekvivalence tak, že třídy rozkladu příslušné této ekvivalenci budou právě třídy původního rozkladu. A také naopak, máme-li relaci ekvivalence $\simeq$ na množině $A$, uděláme rozklad množiny $A$ příslušný relaci $\simeq$ a sestrojíme relaci ekvivalence postupem podle důkazu předchozí věty, dostaneme právě relaci ekvivalence $\simeq$ (Obrázek 0.10.).




Obrázek 0.10.: *Třídy relace ekvivalence na množině A.*

**Otázky:**

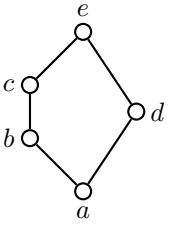
- Je možno (a jak) znázornit některé relace ekvivalence pomocí hasseovského diagramu?
- Jaký je rozdíl mezi relačním symbolem a binárním operátorem?
- Je symbol a) „množinové $\in$“, b) „množinové $\subseteq$“, c) „množinové $=$“, d) „množinový součin $\times$“ binární operátor?

**Odkazy:**

- http://math.chapman.edu/~jipsen/finitestructures/Lat8.pdf
- http://en.wikipedia.org/wiki/Equivalence_relation

## Cvičení

*0.3.1. Máme poset $P = (A, \preceq)$ daný hasseovským diagramem na Obrázku 0.11. a) Popište příslušnou relaci $\preceq$ na množině $A$ pomocí uspořádaných dvojic. b) Najděte největší a nejmenší prvky (pokud existují). c) Najděte nejdelší řetězec $B$ v posetu $(A, \preceq)$. d) Najděte největší antiřetězec $C$ v posetu $(A, \preceq)$.*




*Obrázek 0.11.: Poset $P = (A, \preceq)$.*

*0.3.2. Ukažte, že relace $R$ na množině $A$ je tranzitivní právě tehdy, když platí $R \circ R \subseteq R$, kde „$\circ$“ značí skládání relací.*

*0.3.3. Dokažte, že je-li $A$ reflexivní relace, tak platí $A \circ A = A$ právě tehdy, když $A$ je tranzitivní relace.*

*0.3.4. Sestavte definici lexikografického uspořádání slov.*

*0.3.5. Máme množinu $A$ s $n$ prvky. Kolik existuje relací na množině $A$, které jsou a) reflexivní, b) symetrické, c) antisymetrické, d) asymetrické, e) symetrické i antisymetrické současně, f) všech?*

*0.3.6. Řekneme, že dvě čísla $x, y \in \mathbb{R}$ jsou v relaci $\star$, jestliže $\exists k \in \mathbb{N} : x^k = y^k$. Ukažte, že $\star$ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{R}$.*

*0.3.7. Najděte příklad relace na množině $A$, která je symetrická, tranzitivní, ale není reflexivní.*

*0.3.8. Dokažte zbývající implikaci Věty 0.1. Je-li $A_1, A_2, \ldots, A_k$ rozklad množiny $A$, tak existuje taková relace ekvivalence $\simeq$ na množině $A$, že $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou třídy ekvivalence $\simeq$.*

## 0.4. Zobrazení a operace

Zobrazení a operace můžeme chápat jako speciální případy relací mezi množinami.

**Zobrazení**

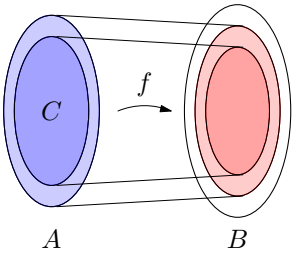
Zobrazení budeme chápat jako pravidlo, které každému prvku množiny $A$ (množina *vzorů*) přiřazuje právě jeden prvek z množiny $B$ (množina *obrazů*). Všimněte si, že toto „přiřazení“ je vztahem mezi dvojicemi prvků, kdy jeden prvek je z množiny $A$ a druhý prvek je z množiny $B$. Proto formálně definujeme *zobrazení množiny* $A$ do množiny $B$ jako relaci mezi množinami $A$ a $B$, ve které je každý prvek množiny $A$ v relaci s právě jedním prvkem množiny $B$. Podle uvedené definice ne každý prvek množiny obrazů $B$ je nutně v relaci (následovníkem) nějakého prvku množiny $A$. Množina vzorů $A$ je současně *definičním oborem* $D(f)$ zobrazení $f$ a *obor hodnot* zobrazení $f$ je taková podmnožina $H(f)$ množiny $B$, jež obsahuje všechny prvky $B$, které jsou v relaci (následovníkem) s nějakým prvkem množiny $A$.

Někdy bývá zobrazení definováno jako pravidlo, které některým prvkům z množiny $A$ přiřazuje nejvýše jeden prvek z množiny $B$. Takové zobrazení pak nazýváme *zobrazení z množiny* $A$ do množiny $B$ (nepřehlédněte předložku „z“ v názvu) a definujeme jej jako relaci mezi množinami $A$ a $B$, ve které je každý prvek množiny $A$ v relaci s nejvýše jedním prvkem množiny $B$. Všimněte si, že podle definice nemusí být každý prvek množiny vzorů $A$ v relaci s nějakým prvkem množiny obrazů $B$. Definičním oborem je pak taková podmnožina množiny $A$, která obsahuje všechny prvky $A$, které jsou v relaci (předchůdcem) s nějakým prvkem množiny $B$.

Obrázek 0.12.: *Zobrazení $A$ do $B$ a z $A$ do $B$ se zvýrazněným definičním oborem a oborem hodnot.*

Zobrazení $f$ množiny $A$ (nebo i z množiny $A$) do množiny $B$ značíme $f : A \to B$. Protože takové přiřazení je pro každý prvek z $A$ jednoznačné, můžeme místo zápisu relace užitím uspořádaných dvojic použít stručnější a přehlednější zápis $b = f(a)$, kde $a \in A$ je *vzor* prvku $b$, $b \in B$, kterému říkáme *obraz* prvku $a$.

Mějme dáno nějaké zobrazení $f : A \to B$ a podmnožinu $C \subseteq A$. *Restrikce* zobrazení $f$ na množinu $C$ je zobrazení $f' : C \to B$ takové, že $\forall c \in C$ platí $f'(c) = f(c)$. Je zřejmé, že pro každé zobrazení z množiny $A$ do množiny $B$ můžeme najít takovou největší podmnožinu $C \subseteq A$, aby restrikce $f' : C \to B$ byla zobrazením množiny $C$ do množiny $B$, nikoliv $z$ množiny $C$ do $B$.




Obrázek 0.13.: *Restrikce zobrazení $f : A \to B$ na množinu $C$.*

**Operace**

Teprve nyní můžeme formálně popsat *operaci* na množině. *Binární operací* na univerzu $U$ rozumíme libovolné zobrazení $U \times U \to U$. Každé uspořádané dvojici prvků z množiny $U$ přiřadíme výsledek operace – nějaký další prvek z množiny $U$.

Podobně $n$-ární operace na univerzu $U$ je zobrazení $U^n \to n$, kde $U^n$ je $n$-tá kartézská mocnina množiny $U$. Všimněte si, že má smysl hovořit i o *unárních operacích*, tedy operacích $U \to U$. Příkladem takových operací (a operátorů) může být opačné znaménko „$-$“ na množině reálných čísel, faktoriál „!“ na množině přirozených čísel včetně nuly ($\mathbb{N} \cup \{0\}$), mocniny a dokonce libovolná funkce může být chápána jako unární operace. Výjimečně se lze setkat s pojmem *nulární operace*, což je vlastně konstanta.

## Cvičení

*0.4.1. Logické spojky konjunkce „$\wedge$“, disjunkce „$\vee$“ a implikace „$\Rightarrow$“ patří mezi binární logické operátory $\{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, kde 0 a 1 odpovídají pravdivostním hodnotám. Kolik takových různých binárních operátorů existuje?*

*0.4.2. Mějme binární operaci $\boxdot$ a unární operaci $\boxminus$ definované pro všechna reálná čísla předpisem $a \boxdot b = (a+b)/2$ a unární operaci $\boxminus a = (1-a)^2$. Určete a) $(\boxminus a) \boxdot (1 - \boxminus a)$, jestliže $\boxminus a = 3$ b) $\boxminus\boxminus\boxminus a$, jestliže $a \boxdot 5 = 3$.*

## 0.5. Kombinatorické výběry

Běžně se setkáme s problémem, kdy máme za úkol odpovědět na otázku „kolik“ je objektů jistého typu. Jedná-li se o konečně velkou množinu, pak určení celkového počtu možností nám může pomoci udělat si představu o rozsahu zkoumaného problému. Budeme-li, podobně jako mudrc v jednom starém příběhu, chtít na první políčko šachovnice položit jedno zrnko rýže a na každé další políčko dvojnásobek zrnek, než na políčko předchozí, tak dojdeme k překvapujícímu závěru, že na celém světě není dostatek zrnek pro splnění úkolu[2].

V této podkapitole připomeneme několik základních početních postupů při hledání (konečného) počtu objektů jistého typu. *Výběrem* budeme rozumět podmnožinu nějaké množiny, případně posloupnost sestavenou z prvků dané množiny. V prvním případě výběr nazveme *neuspořádaný*, v druhém případě *uspořádaný*. Jestliže se v rámci jednoho výběru nemohou prvky (nebo jejich zkoumané vlastnosti) opakovat, jedná se o výběr *bez opakování*. V opačném případě se jedná o výběr *s opakováním*.

Nejprve zmíníme tři jednoduché a jeden komplikovanější početní postup pro určení počtu výběrů jistého typu.

**Kombinatorické pravidlo součtu**

Nejprve uvedeme následující jednoduché pozorování.

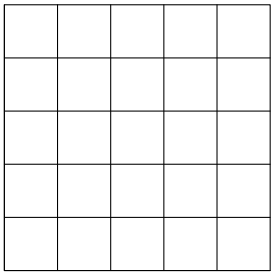
**Lemma 0.2.** *Jestliže $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je rozklad konečné množiny $A$, pak počet prvků množiny $A$ je dán součtem počtu prvků v jednotlivých třídách rozkladu $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tj.*

$$|A| = |\cup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Snadno si rozmyslíme, že každý prvek konečné množiny $A$ je vždy do celkového počtu započítám právě jednou a tvrzení proto platí.

**Pravidlo součtu** *Jestliže existuje $n_1$ výběrů daného typu provedených jedním způsobem a $n_2$ výběrů provedených druhým způsobem, přičemž žádný z výběrů nelze provést oběma způsoby, pak existuje právě $n_1 + n_2$ různých výběrů daného typu.*

[2] Odhaduje se, že v jedné tuně je asi 35 miliónů zrnek rýže. Budeme-li postupovat podle naznačeného schématu, pak bychom na šachovnici potřebovali více než 500 miliard tun zrnek rýže, což mnohonásobně překračuje celosvětovou roční produkci rýže.



Obrázek 0.14.: *Čtvercová mřížka.*

**Příklad 0.6.** Kolik různých čtverců najdeme ve čtvercové mřížce na Obrázku 0.14.?

Mřížka vznikne nakreslením šesti vodorovných a šesti svislých úseček. Čtverce rozdělíme do několika skupin podle délky stran. Skupina $A_1$ obsahuje čtverce o straně 1. Ihned je zřejmé, že $|A_1| = 25$. Čtverce o straně 2 mohou mít levý horní roh jen na prvních čtyřech úsečkách (počítáno jak zleva, tak shora). Proto $|A_2| = 16$. Podobně určíme $|A_3| = 9$, $|A_4| = 4$ a $|A_5| = 1$. Protože každý čtverec v mřížce spadá do právě jedné množiny $A_1, A_2, \ldots, A_5$, tak celkový počet čtverců je

$$\sum_{i=1}^{5} |A_i| = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$$

✓

**Kombinatorické pravidlo součinu**

Zatímco kombinatorické pravidlo součtu využíváme při počítání možností, které nemohou nastat současně, tak kombinatorické pravidlo součinu využijeme pro počítání výběrů, které sestávají z několika nezávislých podvýběrů.

**Lemma 0.3.** *Jestliže $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny, tak počet prvků jejich kartézského součinu $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ je dán součinem počtu prvků v jednotlivých množinách $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tj.*

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Prvky kartézského součinu si můžeme představit jako body v *konečném* $n$-rozměrném prostoru. Souřadnice každého bodu je tvořena uspořádanou $n$-ticí prvků jednotlivých množin.

**Pravidlo součinu** *Mějme výběr, který sestává ze dvou podvýběrů (částí). Jestliže první podvýběr můžeme provést $n_1$ způsoby a druhý podvýběr $n_2$ způsoby, přičemž počet způsobů jednoho podvýběru nezávisí na konkrétní volbě (výsledku) druhého podvýběru, tak existuje právě $n_1 \cdot n_2$ různých výběrů daného typu.*

Kombinatorické pravidlo součinu se někdy nazývá také *princip nezávislých výběrů*. Zdůrazňuje se tak, že počet možností každého podvýběru nezávisí na tom, která možnost byla vybrána v druhém podvýběru.

**Příklad 0.7.** Klasické domino obsahuje 28 dílků s počty ok 0 až 6. Kolik je takových dvojic dominových kostek, které můžeme přiložit k sobě (na každé kostce najdeme políčko se stejným počtem ok)?

Rozlišíme dva disjunktní případy.

(i) Jedna z kostek obsahuje dvakrát stejný počet ok, kostka $\{i, i\}$, potom druhá kostka obsahuje jedno políčko s $i$ oky a druhé políčko s jiným počtem ok $j$. Kostku $\{i, i\}$ můžeme vybrat ze sedmi možností a druhou kostku $\{i, j\}$ pak vybereme vždy z šesti možných. S využitím kombinatorického pravidla součinu dostaneme, že takových dvojic kostek existuje $7 \cdot 6 = 42$.

(ii) Každá kostka obsahuje dva různé počty. Společná hodnota počtu ok $i$ může být libovolná ze sedmi možných. Na každé kostce se pak vyskytuje ještě jiný počet ok: na první hodnota $j$ a na druhé hodnota $k$. Zatímco $j$ vybíráme z šesti možností, tak $k$ už jen z pěti možností.

Jestliže nyní počet dvojic kostek vypočítáme podle kombinatorického pravidla součinu jako $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$, tak každou dvojici kostek započítáme dvakrát. Protože nezávisí na pořadí výběru kostek (která je první a která druhá), je hledaný počet dvojic kostek poloviční, tedy 105.

Celkem máme, s využitím kombinatorického pravidla součtu, $42 + 105 = 147$ dvojic kostek, neboť každá dvojice kostek s jedním společným počtem ok odpovídá právě jednomu z uvedených případů. ✓

**Příklad 0.8. Postupka**

Házíme třikrát kostkou. Kolik existuje takových možností, kdy v každém dalším hodu padají větší čísla než v předchozím?

Všimněte si, že při řešení nemůžeme použít kombinatorické pravidlo součinu bez rozmyslu. Jestliže v prvním hodu padle číslo 1, tak v druhém hodu máme čtyři (proč ne pět?) možné hody, které odpovídají zadání. Pokud ale v prvním hodu padle číslo 4, tak v druhém hodu máme jen jedinou možnost, pro druhý i třetí hod. Počet možností $n_2$ druhého podvýběru *závisí* na výsledku prvního výběru. Řešení příkladu si ukážeme později v této kapitole. ✓

**Dirichletův princip**

Při důkazech počítáním možností se často s výhodou využije následující tvrzení.

**Dirichletův princip** *Jestliže alespoň $nk + 1$ předmětů je rozděleno do $k$ přihrádek, pak v některé přihrádce je alespoň $n + 1$ předmětů.*

Důkaz je ponechán jako Cvičení 0.5.2.

**Sestavování posloupností – variace**

Pomocí kombinatorických pravidel součtu a součinu můžeme odvodit vztahy pro všechny klasické výběry jako permutace, kombinace i variace s opakováním i bez opakování. V tomto textu jen připomeneme vztahy pro počty příslušných výběrů, jejich odvození najde čtenář například v [HKS], [MN] nebo [T].

Každou $k$-prvkovou posloupnost sestavenou z prvků nějaké $n$-prvkové množiny nazýváme *$k$-prvkovou variací s opakováním z prvků $n$-prvkové množiny*. Jejich počet $V^*(n, k)$ je dán vztahem

$$V^*(n, k) = n^k.$$

Jestliže nedovolíme, aby se prvky v posloupnosti opakovaly, hovoříme o *$k$-prvkové variaci (bez opakování) z prvků $n$-prvkové množiny*. Jejich počet $V(n, k)$ je dán vztahem

$$V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Oba vztahy snadno odvodíme užitím kombinatorického pravidla součinu.

**Příklad 0.9.** Kolik různých značek Morseovy abecedy je možné vytvořit, jestliže tečky a čárky sestavujeme do skupin o jednom až čtyřech znacích?

S využitím kombinatorického pravidla součtu si úlohu rozdělíme na čtyři části pro skupiny $N_1, N_2, N_3, N$ s jedním, dvěma, třemi a čtyřmi znaky. Při sestavování znaků skupiny $N_i$ vybíráme $i$-krát vždy ze dvou možností (tečka a čárka) s možností opakování. Proto $|N_i|$ je rovna počtu $i$-prvkových variací s opakováním ze dvou prvků. Platí $|N_i| = V^*(2, i) = 2^i$. Celkem dostaneme hledaný počet znaků

$$\sum_{i=1}^{4} |N_i| = \sum_{i=1}^{4} 2^i = 2 + 4 + 8 + 16 = 30,$$

proto může existovat nejvýše 30 symbolů Morseovy abecedy dlouhých nejvýše čtyři znaky. ✓

**Sestavování podmnožin – kombinace**

Každou $k$-prvkovou podmnožinu nějaké $n$-prvkové množiny nazýváme *$k$-prvkovou kombinací z prvků $n$-prvkové množiny*. Jejich počet $C(n,k)$ je dán vztahem

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pokud ve výběru $k$ prvků dané $n$-prvkové množiny dovolíme opakování vybraných prvků, hovoříme o *$k$-prvkové kombinaci s opakováním z prvků $n$-prvkové množiny*. Počet takových výběrů $C^*(n,k)$ je dán vztahem

$$C^*(n,k) = \binom{k+n-1}{n-1} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Všimněte si, že takový výběr *není* ani posloupností (neboť pořadí vybraných prvků nehraje roli), ani podmnožinou dané $n$-prvkové množiny, neboť se prvky výběru mohou opakovat. Jedná se o počet různých $k$-prvkových multimnožin sestavených z prvků nějaké $n$-prvkové množiny. Alternativně bychom takový výběr mohli popsat jako počet všech zobrazení nějaké $k$-prvkové množiny $A$ do $n$-prvkové množiny $B$, přičemž nerozlišujeme taková zobrazení, která se liší záměnou (permutací) prvků množiny $A$. Přehledně jsou všechny základní kombinatorické výběry shrnuty na straně 37.

**Příklad 0.10. Postupka (podruhé)**
Házíme třikrát kostkou. Kolik existuje takových možností, kdy v každém dalším hodu padají větší čísla než v předchozím?

Všimneme si, že každá přípustná trojice hodů obsahuje tři různá čísla, přičemž pořadí čísel během tří hodů je jednoznačně určeno. Počet takových trojic proto přesně odpovídá výběru tříprvkové podmnožiny z šestiprvkové množiny výsledků. Jedná se o kombinace $C(6,3) = \binom{6}{3} = 20$. ✓

**Příklad 0.11.** Kolika způsoby, je možné napsat $k$ jako součet $n$ sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.

Hledáme počet takových řešení rovnice

$$k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

kde hodnoty proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou nezáporná celá čísla. Představíme si číslo $k$ jako součet $k$ jedniček. Nyní rozdělíme těchto $k$ jedniček do $n$ skupin tak, že mezi ně (případně před či za jedničky) přidáme $n-1$ symbolů „+“ a dostaneme vždy jiný součet čísla $k$ pomocí $n$ sčítanců. Jedná se tedy o výběr $n-1$ symbolů „+“ v řadě s celkem $k+n-1$ symboly ($k$ jedniček a $n-1$ symbolů „+“). Hledaný počet řešení rovnice určíme jako kombinace $(n-1)$-prvkové kombinace z $k+n-1$ prvků.

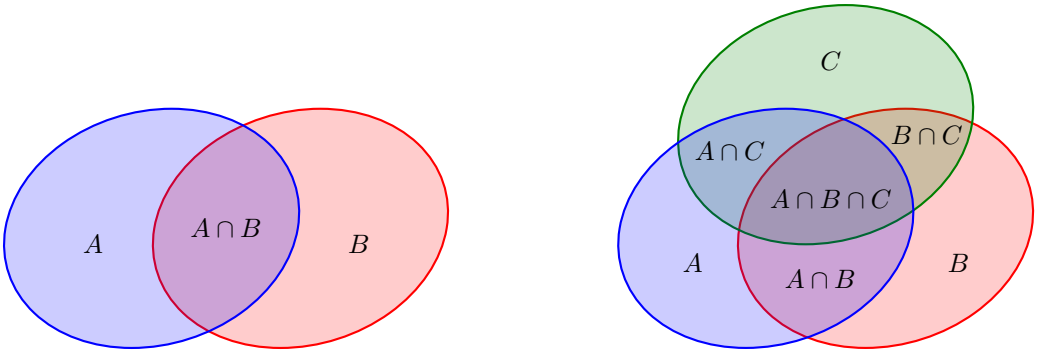
$$C(k+n-1, n-1) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

**Jiné řešení:**
Opět si představíme číslo $k$ jako součet $k$ jedniček. Každé jedničce přiřadíme jednu z $n$ přihrádek (sčítanců $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Jedná se o neuspořádaný výběr některého z $n$ indexů s možností opakování. Proto je počet řešení rovnice roven počtu $k$-prvkových kombinací z $n$ prvků s možností opakování.

$$C^*(n,k) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

✓

**Princip inkluze a exkluze**
Při hledání počtu výběrů, které lze rozdělit do několika disjunktních podvýběrů, můžeme použít kombinatorické pravidlo součtu. Avšak v případech, kdy složený výběr není rozdělen na disjunktní podvýběry, kombinatorické pravidlo součtu použít nelze, neboť bychom některé výběry započítali vícekrát. Pro dva nebo tři podvýběry s neprázdnými průniky není těžké dopočítat se správného




Obrázek 0.15.: *Počet prvků sjednocení množin je* $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$, *respektive* $|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$.

počtu výběrů pečlivým rozborem (přičtením a odečtením) jednotlivých možností (Obrázek 0.15.). Pro komplikovanější systémy výběrů však raději použijeme obecnější početní postup – princip inkluze a exkluze. Princip ukazuje, jak v obecném výběru započítat každý z podvýběrů právě jednou, tj. vyloučit duplicity, které vzniknou z neprázdných průniků jednotlivých podvýběrů.

Pro počet prvků ve sjednocení (konečného) systému (konečných) množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jistě platí

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right| \le \sum_{j=1}^{n} |A_j|,$$

přičemž rovnost nastane pouze v případě, kdy jsou každé dvě různé množiny disjunktní. Zavedeme-li přirozenou konvenci, že $\bigcup_{i=1}^{1} A_i = A_i$, je počet prvků obecného systému množin popsán v následujícím lemmatu.

**Lemma 0.4. Princip inkluze a exkluze**
*Počet prvků ve sjednocení systému množin* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *je*

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right| = \sum_{\substack{I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|. \tag{1}$$

*Jestliže každá množina* $A_i$ *má stejný počet prvků a také každý průnik* $k$ *různých množin má stejný počet prvků, je počet prvků ve sjednocení systému množin* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *určen jednodušším vztahem*

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \left|\bigcap_{j=1}^{i} A_j\right|. \tag{2}$$

**Otázky:**

- Kolik sčítanců má suma ve vztahu (1) a kolik ve vztahu (2)?
- Jak se změní vztahy (1) a (2), pokud jsou všechny množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ navzájem disjunktní?

**Příklad 0.12.** Máme čísla $1, 2, \ldots, 1000$. Kolik čísel zůstane po vyškrtání všech násobků $2, 3, 5, 7$?
Symbolem $A_i$ označíme množinu všech násobků čísla $i$ mezi 1 a 1000. Vyškrtaná čísla pak leží ve sjednocení množin $A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7$. Podle principu inkluze a exkluze určíme jejich počet

$$\begin{aligned}|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| =& |A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7| -\\ &-|A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_7| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_7| - |A_5 \\ &+|A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_7| + |A_2 \cap A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7| -\\ &-|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7|.\end{aligned}$$

Všimneme-li si, že $A_i \cap A_j = A_{ij}$ (index $ij$ chápeme jako součin $i \cdot j$), pak snadno určíme velikosti jednotlivých průniků.

- Násobků dvojky je $|A_2| = \frac{1000}{2} = 500$.
- Násobků trojky je $|A_3| = \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor = 333$.
- Násobků pětky je $|A_5| = \frac{1000}{5} = 200$.
- Násobků sedmičky je $|A_7| = \lfloor \frac{1000}{7} \rfloor = 142$.
- Násobků $2 \cdot 3 = 6$ je $|A_6| = \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor = 166$.
- Násobků $2 \cdot 5 = 10$ je $|A_{10}| = \frac{1000}{10} = 100$.
- Násobků $2 \cdot 7 = 14$ je $|A_{14}| = \lfloor \frac{1000}{14} \rfloor = 71$.
- Násobků $3 \cdot 5 = 15$ je $|A_{15}| = \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor = 66$.
- Násobků $3 \cdot 7 = 21$ je $|A_{21}| = \lfloor \frac{1000}{21} \rfloor = 47$.
- Násobků $5 \cdot 7 = 35$ je $|A_{35}| = \lfloor \frac{1000}{35} \rfloor = 28$.
- Násobků $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ je $|A_{30}| = \frac{1000}{33} = 33$.
- Násobků $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ je $|A_{42}| = \lfloor \frac{1000}{42} \rfloor = 23$.
- Násobků $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ je $|A_{70}| = \lfloor \frac{1000}{70} \rfloor = 14$.
- Násobků $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ je $|A_{105}| = \lfloor \frac{1000}{105} \rfloor = 9$.
- Násobků $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ je $|A_{210}| = \lfloor \frac{1000}{210} \rfloor = 4$.

Při určení velikostí množin jsme využili, že se jedná o množinu po sobě jdoucích čísel začínajících číslem 1. Odečtením počtu vyškrtaných čísel od počtu všech daných čísel, dostaneme (s využitím principu inkluze a exkluze)

$$1000 - |A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 1000 - 500 - 333 - 200 - 142 + 166 + 100 + 71 + 66 + 47 + 28 - 33 - 23 - 14 - 9 + 4 = 2$$

což je hledaný počet čísel, která zůstanou po vyškrtání násobků $2, 3, 5, 7$. ✓

**Příklad 0.13.** Kolik existuje surjektivních zobrazení $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové množiny.

Počet všech zobrazení $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové množiny se rovná počtu všech uspořádaných výběrů $k$ prvků z $n$ možných obrazů, tj. jejich počet je $V^*(n, k) = n^k$. Avšak ne každé uvedené zobrazení pro $n > 1$ je surjektivní.

Bez újmy na obecnosti mějme $K = \{1, 2, \ldots, k\}$ a $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ (můžeme je chápat jako množiny indexů prvků libovolných dvou neprázdných konečných množin). Pro $i = 1, 2, \ldots, n$ označíme $A_i$ množinu všech zobrazení $K \to N$ takových, že prvek $i \in N$ není obrazem žádného prvku. Je zřejmé, že všechna zobrazení $K \to N$, která nejsou surjektivní, patří do sjednocení $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Počet takových zobrazení určíme pomocí principu a inkluze užitím vztahu (2), neboť velikost průniku několika vybraných množin $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_i}$ (přičemž $j_1, j_2, \ldots, j_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) nezávisí na výběru konkrétních množin, jen na jejich počtu. Platí

$$|A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_i}| = (n - i)^k,$$

protože vztah udává počet zobrazení množiny $K$ do nějaké $(n - i)$-prvkové množiny. Dle vztahu (2) pak ihned dostaneme

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \left| \bigcap_{j=1}^{i} A_j \right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} (n - i)^k.$$

Odečteme-li nyní od počtu všech zobrazení $K \to N$ počet všech zobrazení, která nejsou surjektivní, dostaneme hledaný počet surjekcí

$$n^k - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = n^k - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} (n - i)^k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n - i)^k.$$

Poslední sčítanec sumy je vždy nulový (odpovídá počtu zobrazení neprázdné množiny do prázdné množiny). Je zajímavé si uvědomit, že vztah platí i pro $n > k$ a dává správný číselný výsledek 0 (Cvičení 0.5.5.). ✓

## Cvičení

*0.5.1. Dokažte, že pro libovolné množiny $A$, $B$ a $n \in \mathbb{N}$ platí a) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$; b) $|A^n| = |A|^n$.*

*0.5.2. Dokažte Dirichletův princip.*

*0.5.3. Máme k dispozici neomezené množství neobarvených krychliček a šest různých barev. Mac Mahonovy kostky[3] je sada všech různých krychliček, z nichž každá má stěny obarvené šesti různými barvami. Dvě kostky považujeme za shodné, pokud jednu můžeme dostat z druhé vhodným otočením. Kolik existuje různých Mac Mahonových kostek?*

*0.5.4. Házíme třikrát kostkou. Kolik existuje takových možností, kdy v každém dalším hodu nepadají menší čísla než v předchozím?*

*0.5.5. Vysvětlete, proč vztah $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^k$ pro počet surjekcí z $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové množiny dává pro $n > k$ číselně správný výsledek 0.*

*0.5.6. Mějme obdélníkovou síť $m \times n$ čtverečků (podobně jako v Příkladu 0.6.). Kolik různých a) čtverců, b) obdélníků v síti najdeme?*

## 0.6. Důkazové techniky

Matematika, ale i jiné moderní vědní disciplíny se vyznačují svou exaktností. Rozumíme tím schopnost odvodit či doložit pravdivost předkládaných tvrzení, tj. zdůvodnit, proč jisté předpoklady garantují splnění nějakého tvrzení. V moderní matematice je pojem matematického důkazu pečlivě formalizován.

V matematické logice podléhá formulace tvrzení i důkazů přísným pravidlům, včetně použité abecedy, syntaxe, tzv. primitivních pojmů, axiomů a logických kroků. Při formulaci tvrzení a jejich dokazování v matematice zpravidla vystačíme s běžným jazykem. Někdy se tak dopouštíme jistých nepřesností, zejména s víceznačností některých formulací. V tomto textu se snažíme o pečlivé formulace, využíváme ustálené slovní obraty a formulace tak, aby text byl korektní a současně srozumitelný.

Historický vývoj důkazu sahá hluboko do minulosti. K nejznámějším historicky doloženým důkazům patří různé převážně grafické důkazy Pythagorovy věty. Zatímco tvrzení samotné najdeme na Babylonské tabulce z doby cca. 1900–1600 př.n.l., nebo na „Rhindově Papyru“ z Egypta 1788–1580 př.n.l., tak důkaz je přisuzován tzv. Pythagorejské škole (560–480 př.n.l.) a nezávisle také v Číně cca. 500–200 před n.l.

V moderní matematice je matematický důkaz chápán jako posloupnost elementárních ověřitelných kroků vedoucích od známých nebo předpokládaných tvrzení k novému dokazovanému tvrzení. Sytém axiomů se liší dle použité teorie. Zatímco v geometrii se jedná zpravidla o pět Euklidových axiomů, tak v diskrétní matematice (i teorii grafů) se jedná o tzv. Peanovy axiomy. Protože řada myšlenek zasahuje i do dalších matematických disciplin, pracujeme s pojmy a tvrzeními spadajícími například do teorie množin nebo aritmetiky.

V dalším textu připomeneme hlavní myšlenku matematického důkazu i nejběžnější důkazové techniky.

#### Výrok a výroková forma

*Výrokem* je takové tvrzení, kterému má smysl přiřadit pravdivostní hodnotu pravda („true“ či 1) nebo nepravda („false“ či 0). Z jednoduchých výroků můžeme sestavovat složené výroky pomocí logických spojek. Mezi nejčastější logické spojky patří *konjunkce* „a současně“, *disjunkce* „nebo“

[3] Mac Mahonovy kostky, podobně jako pentomino, jsou jedním ze známých hlavolamů, pro který existuje řada úloh rekreační matematiky. Viz například http://www.mathematische-basteleien.de/macmahon.htm.

a unární logický operátor *negace* „není pravda že“. V tomto textu konjunkci značíme „$\wedge$“, disjunkci „$\vee$“ a negaci „$\neg$“.

Další často používanou spojkou je *implikace*, která se používá jednak při formulaci tvrzení vět, kdy tvrzení věty je splněno jen za určitých předpokladů, tak při odvozování a sestavování důkazů tvrzení. V tomto textu implikaci značíme „$\Rightarrow$“ a ekvivalenci „$\Leftrightarrow$“. *Ekvivalence* nám umožní sestavit složený výrok, který říká, že oba výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu. Tvrzení ve tvaru ekvivalence mají často hluboký význam, neboť ukazují, jak jeden problém formulovat či dokonce řešit v kontextu jiné úlohy a naopak.

*Výroková forma* je tvrzení, které obsahuje jakousi výrokovou proměnnou. Výroková forma není výrokem sama o sobě, výrok dostaneme například dosazením konkrétní hodnoty za výrokovou proměnnou. V běžné řeči rozdíl mezi výrokem a výrokovou formou snadno přehlédneme, což bývá zdrojem chyb a zdánlivých paradoxů. Například často uváděný příklad „dnes je pěkně“ není výrokem, neboť pravdivost tvrzení závisí na konkrétním datu nebo místě, kde jeho platnost posuzujeme. Tato výroková forma vyslovená v určitou chvíli může mít jinou pravdivostní hodnotu na různých místech. Napsané tvrzení snadno změní pravdivostní hodnotu podle toho, kdy výrok čteme.

Takovým nepřesně vyjádřeným tvrzením se v matematice snažíme vyhnout pečlivou formulací. Míra podrobnosti formulace závisí na kontextu a očekávaném čtenáři.

Ukažme si rozdíl výroku a výrokové formy na dalším příkladu. Bez dalšího kontextu je

$$x \geq 0$$

výrokovou formou. Nemá smysl rozhodovat o pravdivosti nebo nepravdivosti tvrzení, že $x$ je nezáporné číslo. Často se však zápis $x \geq 0$ objeví na konci výpočetního postupu. Pak chápeme zápis $x \geq 0$ jako součást složeného výroku „jestliže reálné číslo $x$ je řešení nerovnice, tak $x \geq 0$“, případně „řešením nerovnice jsou všechna reálná čísla, pro která platí $x \geq 0$“. Zatímco bez kontextu se o výrok nejedná, tak po zasazení do obvyklého, byť nevysloveného kontextu se o výrok jedná.

**Kvantifikátory**

Z výrokové formy může získat výrok, aniž bychom dosazovali konkrétní hodnotu výrokové proměnné, a sice použitím kvantifikátoru. *Kvantifikátor* je proto důležitý nástroj, pomocí kterého lze sestavit výroky, které zpravidla mají významnou vypovídací hodnotou. Nejběžnější kvantifikátory jsou univerzální (všeobecný) kvantifikátor a existenční kvantifikátor.

Univerzální kvantifikátor „pro každý prvek $x$ dané množiny $M$“ značíme $\forall x \in M$. Symbol pochází z prvního písmene anglického slova „all“. Použitím univerzálního kvantifikátoru říkáme, že z výrokové formy dostaneme pravdivý výrok bez ohledu na to, který prvek množiny $M$ zvolíme a do výrokové formy dosadíme. Takový výrok zpravidla říká, že máme množinu řešení nějaké úlohy.

Existenční kvantifikátor čteme „existuje prvek $x$ dané množiny $M$“ a značíme $\exists x \in M$. Symbol pochází z prvního písmene anglického slova „exist“. Použitím existenčního kvantifikátoru říkáme, že v dané množině existuje alespoň jeden prvek (jeden nebo více prvků), jehož dosazením dostane z výrokové formy pravdivý výrok. Výrok s použitím existenčního kvantifikátoru zpravidla říká, že nějaká úloha má řešení.

Někdy se používá ještě kvantifikátor jednoznačné existence „existuje právě jeden prvek $x$ dané množiny $M$“, značíme jej $\exists! x \in M$. Použitím kvantifikátoru jednoznačné existence říkáme, že v dané množině existuje jediný prvek, jehož dosazením dostane z výrokové formy pravdivý výrok. Takový výrok zpravidla říká, že nějaká úloha má řešení a toto řešení je určeno jednoznačně.

Ještě připomeneme, že negací výroku s existenčním kvantifikátorem je výrok se všeobecným (v jistém smyslu opačným) kvantifikátorem a negací výrokové formy. Jestliže $P(x)$ je výroková forma, tak negace kvantifikovaných výroků můžeme obecně zapsat:

$$\neg\left(\forall x \in m : P(x)\right) = \exists x \in M : \neg P(x)$$
$$\neg\left(\exists x \in m : P(x)\right) = \forall x \in M : \neg P(x).$$

Abychom mohli popsat nejběžnější důkazové techniky, podívejme se nejprve na obvyklou strukturu dokazovaných tvrzení.

**Struktura tvrzení**

Matematická tvrzení mají zpravidla tvar implikace $P \Rightarrow T$, kde $P$ je *předpoklad* a $T$ je samotné *tvrzení*. Předpokladu říkáme také *postačující podmínka* implikace a tvrzení je *nutná podmínka* implikace.

Předpoklad může být i nevyslovený, jestliže vyplývá z kontextu. Při sestavování důkazu však s předpokladem zpravidla pracujeme a musíme z kontextu poznat, jaký předpoklad je. Říká-li věta například „Každý pravidelný graf sudého stupně s alespoň jednou hranou má 2-faktor“, tak tvrzení můžeme přirozeně přeformulovat do tvaru implikace „Jestliže $G$ je pravidelný graf sudého stupně, který má alespoň jednu hranu, potom graf $G$ má 2-faktor.“ Předpoklad věty říká, že máme pravidelný graf $G$ sudého stupně, který má alespoň jednu hranu. Tvrzení věty říká, že graf $G$ má 2-faktor. Jestliže věta platí, tak existence 2-faktoru nutně vyplývá ze splnění předpokladu. Naopak, aby platilo tvrzení, stačí aby byl splněn předpoklad.

Většinu důležitých tvrzení formulujeme jako věty. Důsledek věty je takové tvrzení, které snadno vyplyne z již dokázané věty. Důkaz důsledku bývá zpravidla krátký, stačí jeden nebo dva kroky a z tvrzení věty odvodíme tvrzení důsledku. Lemma je pomocné tvrzení, které někdy není zajímavé samo o sobě, ale popisuje nějaký obrat nebo vlastnost, která usnadní konstrukci či důkaz jiné věty.

Ne každé tvrzení však umíme dokázat. Tvrzení, o kterém máme důvod předpokládat, že je pravdivé, ale není znám jeho důkaz, se nazývá *hypotéza*. Jakmile se tvrzení podaří dokázat, stane se z hypotézy věta. Bohužel nemůžeme čekat, že všechna tvrzení se podaří dokázat. Kurt Gödel v roce 1931 ukázal, že axiomatická výstavba teorie má své limity. V každé dostatečně bohaté teorii je možné formulovat tvrzení, tzv. „nerozhodnutelná tvrzení“, která v rámci teorie není možné dokázat, ani vyvrátit.

**Struktura důkazu**

Důkaz tvrzení je posloupnost kroků, které na sebe logicky navazují, každý krok vyplývá z předchozích kroků dle pravidel odvozování. Posloupnost kroků obvykle vychází z předpokladu tvrzení, využívá již dokázaná tvrzení a axiomy dané teorie, a postupně odvodí dokazované tvrzení. Sestavení důkazu je tvořivá činnost, autor musí správnou posloupnost kroků objevit. Naproti tomu verifikace důkazu je jednodušší, spočívá v ověření všech jednotlivých kroků důkazu.

Některé typy důkazů mají jistou ustálenou strukturu, která nalezení celého postupu usnadňuje. Typickým příkladem je důkaz matematickou indukcí. Elegantní důkazy naopak využívají nějaký překvapivý obrat nebo pozorování, které usnadní náročný krok důkazu a které přináší radost a pozitivní prožitek i čtenáři. Matematik Paul Erdős o obzvláště elegantních důkazech říkal, že pochází z *Knihy* (anglicky „The Book“), bájné příručky, která obsahuje ty nejelegantnější důkazy všech možných tvrzení. V roce 2003 vyšla kniha „Proofs from THE BOOK“, ve které editoři shromáždili 32 důkazů, které jsou často vnímány jako mimořádně pěkné.

V dalších odstavcích připomeneme několik nejčastějších důkazových technik.

**Přímý důkaz**

Přímý důkaz je nejjednodušší důkazová technika. Jestliže tvrzení ve tvaru implikace $P \Rightarrow T$ dokazujeme přímo, tak vyjdeme z předpokladu $P$ a za použití pravidel odvozování, axiomů a dříve dokázaných tvrzení odvodíme tvrzení věty $T$.

**Příklad 0.14.** Ukážeme, že druhá mocnina lichého celého čísla je liché číslo.

Mějme liché celé číslo $n$, tj. $n = 2t + 1$ pro nějaké $t \in \mathbb{Z}$. Druhá mocnina čísla $n$ je $n^2 = (2t+1)^2 = 4t^2 + 2t + 1 = 2(2t^2 + t) + 1$. Protože číslo $2t^2 + t$ je jistě celé číslo a $2(2t^2 + t)$ je jistě sudé číslo, tak $2(2t^2 + t) + 1$ je liché celé číslo. ✓

**Příklad 0.15.** Ukážeme, že rovnice $x^2 + 4x + 6 = 0$ nemá řešení v množině reálných čísel.

Kvadratický trojčlen upravíme na čtverec. Dostaneme $x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1$. První sčítanec $(x+2)^2$ je jistě nezáporný a druhý sčítanec je kladný. Proto $x^2 + 4x + 6 > 0$ a rovnice nemá řešení v množině reálných čísel. ✓

**Nepřímý důkaz**

Nepřímý důkaz tvrzení ve tvaru implikace $P \Rightarrow T$ využívá faktu, že *obměna* $\neg T \Rightarrow \neg P$ má stejnou vždy pravdivostní hodnotu, jako původní implikace $P \Rightarrow T$. Tabulka 0.1. porovnává pravdivostní hodnoty obou složených výroků $P \Rightarrow T$ i $\neg T \Rightarrow \neg P$.

| $P$ | $T$ | $P \Rightarrow T$ | $\neg T \Rightarrow \neg P$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabulka 0.1.: *Tabulka pravdivostních hodnot implikace a obměny implikace.*

Někdy může být jednodušší místo implikace $P \Rightarrow T$ dokazovat její obměnu $\neg T \Rightarrow \neg P$.

**Příklad 0.16.** Jestliže součin dvou celých čísel $ab$ je sudý, tak alespoň jedno z čísel $a$, $b$ je sudé.
Postupuje nepřímo, tj. dokážeme obměnu implikace: jestliže jsou celá čísla $a$, $b$ lichá, tak jejich součin $ab$ je lichý. Všimněte si, že místo tří možných případů parity čísel $a$, $b$ tak stačí rozebrat případ jediný.

Protože $a$ je liché číslo, tak existuje celé číslo $t$ takové, že $a = 2t + 1$. Podobně $b = 2s + 1$, kde $s \in \mathbb{Z}$. Potom součin $ab = (2t+1)(2s+1) = 4st + 2s + 2t + 1 = 2(2st + s + t) + 1$. Protože $2st + s + t$ je celé číslo, tak $2(2st + s + t)$ je sudé číslo a $2(2st + s + t) + 1$ je liché číslo.

Dokázali jsme obměnu implikace, která platí právě tehdy, když platí původní implikace. Tvrzení je dokázáno. ✓

**Důkaz sporem**

Dokazujeme-li sporem tvrzení ve tvaru implikace $P \Rightarrow T$, tak ukážeme, že současné splnění předpokladu a neplatnost tvrzení ve ke *sporu*. Sporem rozumíme situaci, kdy odvodíme platnost nějakého tvrzení a současně platnost negace tvrzení: $A \wedge \neg A$. V teorii vybudované z konzistentních axiomů nemáme žádný spor[4]. Symbolicky můžeme zapsat strukturu důkazu implikace $P \Rightarrow T$ sporem takto:

$$P \wedge \neg T \Rightarrow \ldots \Rightarrow A \wedge \neg A. \tag{3}$$

Předpokládáme-li bezespornost teorie, tak v okamžiku, kdy narazíme na spor, můžeme tvrdit, že implikace $P \Rightarrow T$ platí, tj. za předpokladu $P$ platí tvrzení $T$. Zdůvodnění je následující: Narazíme-li za použití pravidel odvozování v řetězci implikací (3) na spor, tak musí být výchozí krok řetězce implikací neplatný, tj. neplatí konjunkce $P \wedge \neg T$. Konjunkce neplatí, jestliže alespoň jeden z výrazů není pravdivý. Pokud není pravdivý předpoklad $P$, tak nejsou splněny předpoklady dokazované věty a taková situace není pro důkaz tvrzení relevantní. Jedinou zbývající možností je, že není pravdivá negace tvrzení $\neg T$ a platí $\neg(\neg T)$, tedy platí $T$. Uvedené zdůvodnění je společné všem důkazům sporem, proto se zpravidla již neuvádí. Zkušený čtenář ví, že dostaneme-li v důkazu sporem dvě navzájem se vylučující tvrzení, dostáváme spor $A \wedge \neg A$. Proto můžeme ihned tvrdit, že za splnění předpokladu $P$ platí tvrzení $T$. Máme tak dokázanou implikaci $P \Rightarrow T$.

Mezi klasické příklady důkazu sporem patří Euklidův důkaz, že existuje nekonečně mnoho prvočísel.

**Příklad 0.17.** Ukážeme, že prvočísel je nekonečně mnoho.
Postupujeme sporem. Využijeme základní větu aritmetiky, každé přirozené číslo větší než 1 můžeme napsat jednoznačně jako součin prvočísel. Pro spor předpokládáme, že prvočísel je konečně mnoho, označíme je $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Avšak číslo $x$, kde $x = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$, není dělitelné ani jedním z prvočísel! Dostáváme spor. Předpoklad, že prvočísel je konečně mnoho, vede ke sporu, proto není pravdivý, tj. prvočísel je nekonečně mnoho. ✓

Jen upozorníme, že na konstrukci důkazu sporem se nemůžeme spolehnout v takové teorii, kde samotné axiomy vedou ke sporu. Proto řada autorů preferuje místo důkazu sporem důkaz přímý, či

[4] Z Gödelovy Druhé věty o neúplnosti však vyplývá, že bezespornost dostatečně bohaté teorie, mezi které diskrétní matematika patří, bezespornost můžeme pouze předpokládat, nemůžeme ji však dokázat.

nepřímý, neboť důkaz sporem využívá bezespornost dané teorie. Ještě upozorníme, že v teorii, která obsahuje spor, je možné dokázat libovolné tvrzení včetně negace každého tvrzení. O fenoménu tak zvané logické exploze je psáno na straně 42.

**Důkaz matematickou indukcí**

Matematická indukce je důkazová metoda, která se používá zejména pro důkazy tvrzení ve tvaru

$$\forall n \in M : P(n),$$

kde $M$ je nějaká množina čísel aritmetické posloupnosti. Důkaz matematickou indukcí má vždy dvě principiálně různé části. *Základ indukce* je část, ve které ukážeme platnost tvrzení výrokové formy $P(n)$ pro jednu nejmenší, případně několik nejmenších, hodnot $n$. Hodnotu označíme $n_0$. V *indukčním kroku* pak ukážeme obecný postup, jak platnost výroku $P(n)$ odvodit na základě platnosti výroku $P(k)$ pro hodnoty $k$ menší než $n$.

Jestliže $k$ je jedna nebo více hodnot bezprostředně menších než $n$, říkáme, že používáme klasickou indukci. V případě, že potřebujeme využít platnosti pro jednu nebo více hodnot $k$ z intervalu $[n_0, n-1]$, říkáme, že používáme silnou indukci. Název „silná“ indukce je poněkud zavádějící, protože oba přístupy jsou ekvivalentní co do množiny dokazatelných tvrzení.

Matematická indukce nachází uplatnění při důkazu řady vztahů, rovností, nerovností, relací, ale i algoritmů. Často lze induktivní důkaz nějakého tvrzení implementovat jako rekurzivní algoritmus pro konstruktivní řešení úlohy.

**Příklad 0.18.** Ukažte že pro každé $n \geq 5$ platí $2^n > n^2$.

*Základ indukce:* Nejmenší hodnota, pro kterou máme tvrzení dokázat, je $n = 5$. Protože $2^5 = 32 > 25 = n^2$, tak tvrzení pro $n = 5$ platí. (Všimněte si, že pro menší hodnoty tvrzení platit nemusí: například pro $n = 0$ a $n = 1$ tvrzení sice platí, ale pro $n = 2$, $n = 4$ nastává rovnost a pro $n = 3$ tvrzení také neplatí, neboť $2^3 = 8 < 9 = 3^2$.)

*Indukční krok:* Předpokládejme, že pro *nějakou* hodnotu $n$, kde $n \geq 5$, je nerovnost splněna, tj. platí $2^n > n^2$. Uvědomte si, že zde nepředpokládáme platnost dokazovaného tvrzení, protože tvrzení dokazujeme pro *všechna* $n \geq 5$, ale platnost předpokládáme pro *nějaké* $n$, což dle základu indukce máme prověřeno. Nyní ukážeme, že nerovnost je splněna i pro následující hodnotu $n+1$.

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$$

S využitím indukčního předpokladu $2^n > n^2$ můžeme pravou stranu upravit

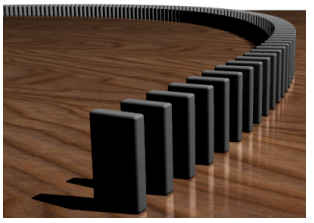
$$\begin{aligned} 2^{n+1} &> 2 \cdot n^2 \\ &= n^2 + n^2 \\ &= n^2 + 2n + (n-2)n, \end{aligned}$$

a protože pro $n \geq 5$ je $(n-2)n > 1$, tak můžeme upravit

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &> n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

Celkem dostáváme, že $2^{n+1} > (n+1)^2$ a podle principu matematické indukce je nerovnost $2^n > n^2$ splněna pro všechna $n \geq 5$. ✓

*Jak může důkaz dvou kroků zajistit platnost tvrzení pro nekonečně mnoho hodnot?* Princip matematické indukce bývá někdy přirovnáván k padající řadě dominových kostek (Obrázek 0.16.). Základ indukce odpovídá prvnímu kroku: shození první kostky v řadě. To však nestačí! Musí být zajištěno, že každá padající kostka shodí následující kostku, což zajišťuje platnost indukčního kroku.



Obrázek 0.16.: *Řada dominových kostek.*

Uvědomte si, jak se oba kroky principiálně liší: zatímco základ indukce řeší jednu konkrétní hodnotu (kostku), případně několik hodnot (kostek), tak indukční krok řeší vztah mezi obecnou $n$-tou hodnotou (kostkou) a následující, respektive předchozí hodnotou (kostkou).

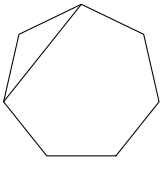
Úplnost důkazu matematickou indukcí, tj. platnost $P(n)$ pro každý prvek množiny $M$, můžeme opět znázornit padající řadou kostek. Nebude-li shozena první kostka, řada nespadne. Dále, pokud nebude zajištěno, že každá kostka shodí následující kostku, řada kostek také nespadne celá.

V diskrétní matematice a zejména v teorii grafů může mít důkaz matematickou indukcí svou specifickou strukturu. Zatímco v důkazech matematickou indukcí různých algebraických tvrzení hodnotu výrokové proměnné v indukčním kroku zpravidla *zvyšujeme*, z předpokladu platnosti $P(n)$ odvozujeme platnost $P(n+1)$, tak v teorii grafů často hodnotu výrokové proměnné *nejprve zmenšíme*, prozkoumáme strukturu menšího grafu, a poté hodnotu parametru *opět zvýšíme* a odvodíme platnost $P(n)$ na základě pozorování pro hodnoty $k$ z intervalu $[n_0, n-1]$. To má dobrý důvod. Zatímco v algebře je zajímavá pouze hodnota indukční proměnné, kterou můžeme zvýšit nebo snížit, tak v teorii grafů je význam hodnoty indukční proměnné vázán na *strukturu* grafu. Potom nemusí být jasné, zda každou větší strukturu můžeme dostat pouhým přidáváním k menší struktuře. Dokonce je řada příkladů, kde to není pravda: například větší cyklus $C_{n+1}$ nedostaneme pouhým přidáním vrcholu a hrany do menšího cyklu $C_n$. Museli bychom nějakou hranu také odebrat. Můžeme však z cyklu $C_n$ nejprve hranu odebrat, potom zkoumat vlastnosti vzniklého podgrafu $P_n$, který má sice stejnou množinu vrcholů, ale menší počet hran. Nebo můžeme z cyklu $C_n$ odebrat vrchol (a obě incidentní hrany) a zkoumat vlastnosti vzniklého podgrafu $P_{n-1}$. Poté vrátíme odebranou hranu resp. odebraný vrchol zpět a odvodíme platnost tvrzení pro cyklus $C_n$.

**Příklad 0.19.** Víme, že součet vnitřních úhlů trojúhelníka je $\pi$. Mějme konvexní $n$-úhelník. Indukcí ukážeme, že součet vnitřních úhlů tohoto $n$-úhelníka je $(n-2)\pi$.

*Základ indukce:* Nejmenší hodnota čísla $n$, pro kterou má smysl sestrojit $n$-úhelník, je $n = 3$. Pro trojúhelník víme, že součet hodnot vnitřních úhlů je $\pi$, což odpovídá dokazovanému vztahu $(n-2)\pi = (3-2)\pi = \pi$.

*Indukční krok:* Mějme nějaký konvexní $n$-úhelník pro $n > 3$. Dále předpokládejme, pro hodnoty $k$, kde $3 \leq k < n$, součet vnitřních úhlů $n$-úhelníka je $(k-2)\pi$. Nyní určíme součet vnitřních úhlů našeho $n$-úhelníka. Libovolnou úhlopříčkou rozdělíme $n$-úhelník na dva menší konvexní mnohoúhelníky. Není těžké si rozmyslet, že pro konvexní mnohoúhelník se vždy může jednat o jeden trojúhelník a jeden $(n-1)$-úhelník (Obrázek 0.17.).



Obrázek 0.17.: *Rozdělení $n$-úhelníka na trojúhelník a $(n-1)$-úhelník.*

Součet vnitřních úhlů trojúhelníka je $\pi$ a podle indukčního předpokladu je součet vnitřních úhlů $(n-1)$-úhelníka roven $(n-3)\pi$. Součet vnitřních úhlů daného $n$-úhelníka je dán součtem vnitřních úhlů trojúhelníka a $(n-1)$-úhelníka, což dává $\pi + (n-3)\pi = (n-2)\pi$.

Podle principu matematické indukce je proto součet vnitřních úhlů každého konvexního $n$-úhelníka roven $(n-2)\pi$. ✓

**Příklad 0.20.** Ukážeme, že každé poštovné větší nebo rovno 9 Kč může být zaplaceno užitím známek v hodnotě 3 Kč a 5 Kč.

Tvrzení ukážeme matematickou indukcí vzhledem k ceně $c$.

*Základ indukce:* Nejprve ukážeme, že je možno vyplatit částky

- 9 Kč jako $3+3+3=9$,
- 10 Kč jako $5+5=10$,
- 11 Kč jako $5+3+3=11$.

*Indukční krok:* Ukážeme, že když jde zaplatit poštovné v ceně $c$, tak jde zaplatit také poštovné o hodnotě $c+3$. Stačí nalepit o jednu tříkorunovou známku navíc.

To podle principu matematické indukce znamená, že pomocí známek v hodnotě 3 a 5 Kč můžeme zaplatit jakékoliv poštovné v hodnotě alespoň 9 Kč.

Všimněte si, že poštovné 8 Kč je také možno zaplatit jako 3+5 Kč. Dokazované tvrzení by mohlo být obecnější. Naproti tomu hodnotu 7 Kč zaplatit není možné. Pokud bychom platili pouze tříkorunovými známkami, 7 Kč nezaplatíme. Pokud platíme alespoň jednou pětikorunovou známkou, tak zaplatíme částku 5 Kč, 8 Kč, nebo částky vyšší, ale 7 Kč zaplatit nelze. ✓

**Otázky:**

- Vysvětlete rozdíl mezi pojmem indukce a silná matematická indukce.
- Vysvětlete analogii princip matematické indukce na vystoupání na libovolně vysoký žebřík.

O důkazech matematickou indukcí napsal David S. Gunderson pěknou knihu „Handbook of Mathematical Induction: Theory and Applications“.

**Odkazy:**

- https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_proof
- https://en.wikipedia.org/wiki/Gödel's_incompleteness_theorems
- https://www.maa.org/press/maa-reviews/handbook-of-mathematical-induction-theory-and-applications

## Cvičení

*0.6.1. Dokažte, že číslo $\sqrt{3}$ není racionální.*

*0.6.2. Ukažte že součet lichého počtu lichých sčítanců je liché číslo.*

*0.6.3. Mějme přirozené číslo $n$. Ukažte, že pro číslo $n^4+4$ je prvočíslo pouze pro $n=1$.*

*0.6.4. Mějme přirozené číslo $n$. Ukažte, že pokud součet všech kladných dělitelů čísla $n$ je $n+1$, tak $n$ je prvočíslo.*

*0.6.5. Ukažte, že $\log_2 3$ je iracionální číslo.*

*0.6.6. Ukažte, že je-li nějaká operace asociativní pro libovolnou trojici prvků $x, y, z \in A$, tak výsledek operace bude stejný pro libovolné uzávorkování každé posloupnosti prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ (tj. výsledek operace je asociativní pro $k$ prvků).*

*0.6.7. Ukažte, že žádný polynom $a_n x^n + a_{n-1} x p^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ s celočíselnými koeficienty ($a_i \in \mathbb{Z}$ pro $0 \leq i \leq n$) nemůže mít v přirozených číslech (pro $x \in \mathbb{N}$) pouze prvočíselné funkční hodnoty, jestliže $a_0$ není prvočíslo ani 1. Platí tvrzení pokud $a_0$ je prvočíslo? Platí tvrzení pokud $a_0$ je 1?*

*0.6.8. Mějme libovolná dvě po sobě následující lichá čísla $p$ a $q$. Ukažte, že $(p+q) \mid (p^q + q^p)$.*

## 0.7. Co se nevešlo

Následuje několik poznámek, které nespadají do žádné z předchozích podkapitol.

**Symboly**

Funkce „$\lfloor x \rfloor$“ se nazývá *dolní celá část z čísla* $x$ a je definována jako největší celé číslo, které není větší než $x$. Podobně funkce „$\lceil x \rceil$“ se nazývá *horní celá část z čísla* $x$, definujeme ji jako nejmenší celé číslo, které není menší než $x$.

Systém (množinu) všech $k$ prvkových podmnožin množiny $X$ budeme značit $\binom{X}{k}$. Často budeme pracovat se systémem $\binom{X}{2}$, tj. systémem všech dvouprvkových podmnožin množiny $X$. Aby nedošlo k záměně s kombinačními čísly, budeme důsledně horní symbol (množinu) značit velkými písmeny a konstantu u kombinačního čísla malými písmeny. Navíc význam symbolů s kombinačními čísly bude vždy zřejmý z kontextu.

**Grupoidy a grupy**

V diskrétní matematice často pracujeme i s operacemi na konečných číselných množinách. Korektní vybudování teorie číselných množin spadá do algebry, my zde připomeneme jen několik základních pojmů a faktů, které se nám budou hodit při řešení konkrétních problémů.

Mějme nějakou množinu $M$. Na straně 14 jsme zavedli pojem *binární operace* na množině $M$ jako zobrazení $M \times M \to M$. Množinu $M$ spolu s touto operací nazveme *grupoid* (v některých knihách se používá termín *magma*). Značíme ji $(M, \otimes)$, kde symbolem $\otimes$ chceme zdůraznit, že operace může být libovolná, ne nutně klasické násobení nebo sčítání jaké známe z počítání s přirozenými nebo reálnými čísly. Místo $c = \otimes(a, b)$ obvykle píšeme $a \otimes b = c$. Uzavřenost operace $\otimes$ na množině $M$ vyplývá ihned z definice binární operace, tj. pro libovolné $a, b \in M$ je výsledek operace $a \otimes b \in M$.

Různých operací i na malých konečných množinách existuje mnoho (Cvičení 0.7.1.). Nás však obvykle zajímají jen takové operace na množině $M$ a takové grupoidy $(M, \otimes)$, které mají některé pěkné vlastnosti. Důležitou a možná nejdůležitější skupinu grupoidů tvoří grupy.

**Definice Grupa**

Každý grupoid $(M, \otimes)$, který splňuje následující vlastnosti (*axiomy grupy*) nazýváme *grupa* $(M, \otimes)$.

*1) asociativita*

Pro každé tři prvky $a, b, c \in M$ platí $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$.

*2) existence neutrálního prvku*

Existuje takový prvek $e \in M$, že pro každý prvek $a \in M$ platí $e \otimes a = a \otimes e = a$.

*3) existence inverzního prvku*

Pro každý prvek $a \in M$ existuje takový prvek $b \in M$, že $a \otimes b = b \otimes a = e$, kde $e \in M$ je neutrální prvek grupoidu.

Pokud je z kontextu zřejmé, s jakou operací pracujeme, hovoříme stručně o grupě $G$.

Všimněte si, že obecně *nevyžadujeme* komutativitu operace $\otimes$. Dále se dá ukázat, že neutrální prvek $e$ je v každé grupě definovaný jednoznačně, tj. neutrální prvek existuje v grupě právě jeden (Cvičení 0.7.2.). Také inverzní prvek ke každému prvku $a \in M$ je určen jednoznačně, proto má smysl pro inverzní prvek k prvku $a$ používat označení $a^{-1}$ (Cvičení 0.7.3.). A konečně z definice grupy není ani těžké ukázat, že pokud $a \otimes b = e$, tak $b \otimes a = e$, tj. násobení inverzním prvkem v grupě vždy komutuje vzhledem k operaci $\otimes$. Zájemce o teorii grup odkážeme například na knihu [G].

### Cvičení

*0.7.1. Kolik existuje různých operací na $n$-prvkové množině?*

*0.7.2. Ukažte, že v každé grupě existuje právě jeden neutrální prvek.*

*0.7.3. Ukažte, že v grupě je inverzní prvek ke každému prvku určen jednoznačně.*

*0.7.4. Mějme celé číslo $a$ a přirozené číslo $b$. Ukažte, že platí $\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor$.*

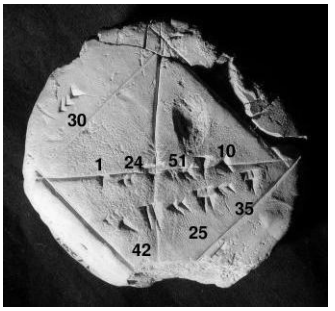
## 0.8. Doplňková témata

Poslední část každé kapitoly obsahuje několik poznámek, které souvisí s probíranou tématikou. Ukážeme souvislosti s jinými disciplínami a zmíníme zajímavé problémy, které byly vyřešeny ale i takové, jejichž řešení není známo. Na konci kapitol najdete i stručné poznámky o některých matematicích.

## Diagramy

Smyslem diagramů (nejen v matematice) je názorně popsat nějakou souvislost a současně zprostředkovat toto poznání ostatním. Součástí důkazů bývá diagram, ve kterém jsou důležité vlastnosti zvýrazněny a naopak nedůležité vlastnosti jsou zjednodušeny nebo úplně vynechány. V teorii grafů (jak napovídá samotný název) je mnoho souvislostí popsáno diagramem – nakreslením grafu. Každý graf zachycuje, zda objekty (vrcholy) spolu souvisí (jsou spojeny hranou) nebo nesouvisí (nejsou spojeny hranou). Často samotné zakreslení souvislostí do diagramu vede k vyřešení problému.

Jeden z nejstarších dochovaných diagramů je babylónská tabulka[5], která obsahuje aproximaci $\sqrt{2}$ v šedesátkové soustavě (Obrázek 0.18.). Mezi další dochované diagramy patří grafické důkazy Pythagorovy věty (ve starověké Číně, Indii i Řecku).




Obrázek 0.18.: *Babylónská tabulka YBC 7289 z doby 1800–1600 př.n.l.*

Diagramy jako jsou schémata elektronických obvodů nebo konečných automatů slouží k přehlednému řešení praktických problémů. Za diagramy můžeme považovat znázornění vývoje druhů, rodokmeny nebo planetární model atomu.

### Hasseovský diagram

Připomeňme, že relace částečného uspořádání $\preceq$ na množině $A$ je relace, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Relaci $\preceq$ můžeme znázornit pomocí šipek (orientovaných grafů) nebo matic. Zakreslení však obvykle obsahuje mnoho takových šipek, které bychom mohli vynechat, neboť vyplývají z tranzitivity. Matice je vhodná pro implementaci do počítače, naproti tomu pro ruční výpočet je obvykle velmi nepřehledná, stejně jako znázornění pomocí barevných políček (Obrázek 0.5.). Proto se relace částečného uspořádání znázorňuje užitím hasseovského diagramu.

Z každého hasseovského diagramu můžeme samozřejmě jednoznačně zrekonstruovat příslušné částečné uspořádání. Uvědomme si, že celý hasseovský diagram můžeme nakreslit celý jen pro konečné množiny. Pro nekonečné množiny hasseovský diagram někdy může ale někdy nemusí být názorným zachycením struktury posetu (srovnejte například posety $(\mathbb{N}, \leq)$ a $\mathbb{N}, |)$. Pro některé posety nemá smysl se o diagram ani pokoušet (například pro poset $2^{\mathbb{R}}, \subseteq)$.

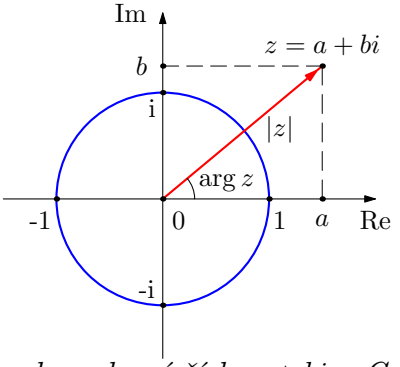
### Gaussova rovina

Komplexní čísla někdy znázorňujeme jako body v rovině, které se říká *Gaussova rovina*. V anglosaské literatuře se jí říká také *Argandův diagram*. Horizontální osa odpovídá reálným složkám komplexního čísla $z = a + bi$, svislá osa pak imaginárním složkám. V uvedené geometrické interpretaci pak snadno popíšeme velikost komplexního čísla (značí se $|z|$) jako délku vektoru směřujícího z počátku do bodu o souřadnicích $[a, b]$ a argument komplexního čísla, což je úhel, který svírá příslušný vektor s kladnou částí reálné osy (Obrázek 0.19.).

Sčítání komplexních čísel odpovídá skládání vektorů v rovině a násobení odpovídá součinu velikostí a součtu argumentů komplexních čísel. Body (komplexní čísla), které odpovídají $n$-té (přirozené) odmocnině daného komplexního čísla leží ve vrcholech pravidelného $n$-úhelníku se středem

[5] Tabulky YBC 7289 ze sbírky Yale Babylonian Collection. Fotografii pořídil Bill Casselman.

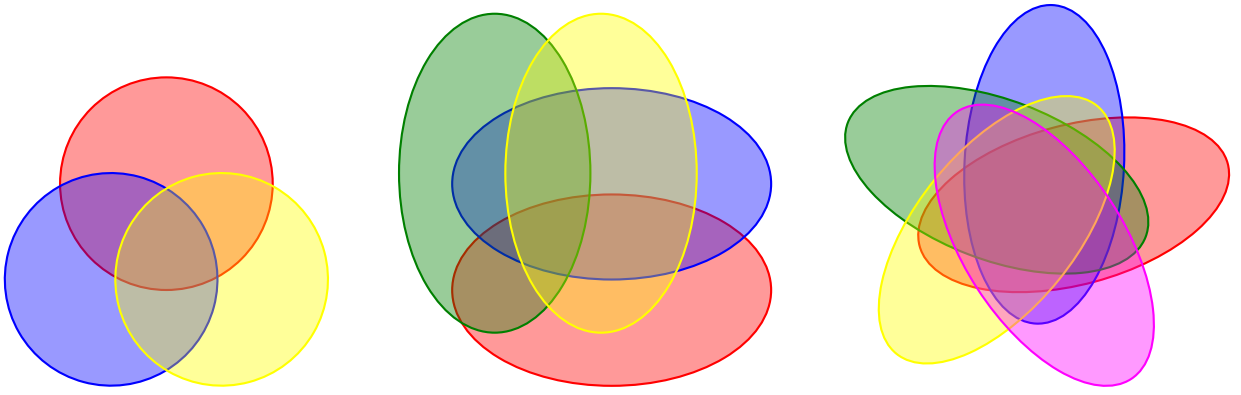
v počátku Gaussovy roviny. Komplexní *jednotky* leží na kružnici s poloměrem 1 a středem v počátku. Násobení komplexního čísla komplexní jednotkou odpovídá otočení příslušného bodu v Gaussově rovině kolem počátku o úhel, který se rovná argumentu komplexní jednotky.




Obrázek 0.19.: *Komplexní jednotky a komplexní číslo $a + bi$ v Gaussově rovině, jeho velikost a argument.*

**Vennovy a Eulerovy diagramy**

Mějme systém uzavřených křivek $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ v rovině a systém množin $X_1, X_2, \ldots, X_n$, kde každá množina $X_i$ odpovídá interiéru křivky $C_i$ nebo exteriéru křivky $C_i$ (interiér a exteriér uzavřené křivky jsou nadefinovány na straně 178). *Vennův diagram* je takový systém uzavřených křivek $\mathcal{C}$ v rovině, kde každý průnik množin $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$ je neprázdný. Všimněte si, že systém množin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v průniku není pevně určený, uvažujeme všechny možné kombinace interiérů a exteriérů křivek v $\mathcal{C}$. Obvykle navíc požadujeme, aby počet společných bodů dvou křivek byl konečný. Vyloučíme tak možnosti, kdy dvě křivky mají společný úsek (Obrázky 0.20.).



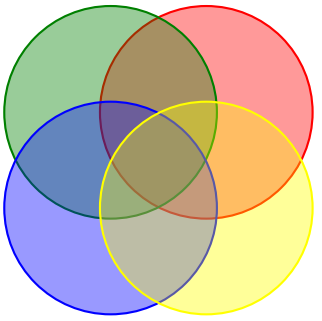
Obrázek 0.20.: *Vennův diagram tří množin, čtyř množin a pěti množin.*

Všimněte si, že uvedená definice zaručuje, že v diagramu budou zastoupeny všechny možné průniky množin $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Počet různých oblastí Vennova diagramu tak odpovídá počtu prvků potenční množiny nějaké $n$-prvkové množiny. Ne každý systém uzavřených křivek v rovině nazveme Vennovým diagramem. V literatuře se takovým systémům, kde se některé průniky nevyskytují, říká *Eulerův diagram*. Například diagram na Obrázku 0.21. je Eulerův a není Vennův.

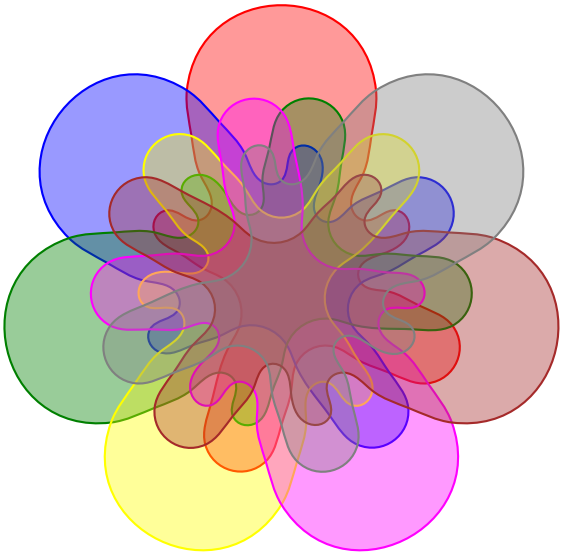
**Otázka:** Proč není diagram na Obrázku 0.21. Vennův?

Pomocí Vennových diagramů můžeme znázornit vztahy mezi libovolnými obecnými množinami. Prvkům obecných množin vhodně přiřadíme body uvnitř oblastí. Vennův diagram jedné, dvou nebo tří množin je snadné nakreslit. Vennův diagram pro čtyři množiny není obtížné najít, jen musíme kreslit pečlivě, protože se lehce můžeme dopustit chyby (Obrázek 0.20.). Vennovy diagramy pro pět a více množin není snadné sestavit bez systematického přístupu (Cvičení 0.8.6.).

**Ferrersův diagram**



Obrázek 0.21.: *Eulerův diagram.*



Obrázek 0.22.: *Vennův diagram sedmi množin zvaný „Adelaide“.*

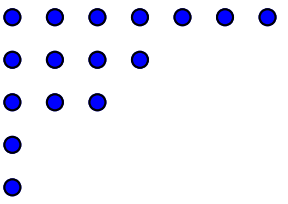
*Ferrersův diagram* slouží k zakreslení rozkladu přirozeného čísla $n$ na přirozené sčítance $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ (Obrázek 0.23.). Nebudeme rozlišovat takové rozklady čísla $n$, které se liší jen pořadím sčítanců. Protože pořadí sčítanců nehraje roli, budeme vždy předpokládat, že $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$. Rozklad pak můžeme znázornit pomocí $n$ puntíků v $k$ řádcích, kde na $i$-tém řádku je právě $a_i$ puntíků. Například číslo 6 má jedenáct různých rozkladů

$$6, \quad 5+1, \quad 4+2, \quad 4+1+1, \quad 3+3, \quad 3+2+1, \quad 3+1+1+1,$$

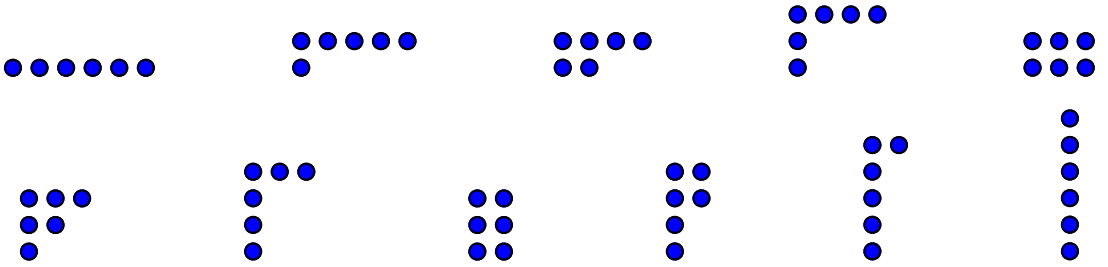
$$2+2+2, \quad 2+2+1+1, \quad 2+1+1+1+1, \quad 1+1+1+1+1+1$$

a jejich znázornění pomocí Ferrersových diagramů je na Obrázku 0.24.

Pomocí Ferrersova diagramu snadno zdůvodníme, že počet různých rozkladů čísla $n$ na nejvýše $k$ přirozených sčítanců odpovídá přesně počtu rozkladů čísla $n$ na sčítance, z nichž žádný není větší než $k$. Stačí si uvědomit, že záměnou řádků za sloupce (nebo „překlopením“) Ferrersova diagramu ke každému rozkladu s nejvýše $k$ sčítanci dostaneme rozklad s největším sčítancem $k$. Využití Ferrersových diagramů rozhodně přesahuje rámec školské matematiky. Jejich přehlednost se využívá při důkazu několika netriviálních tvrzení z teorie čísel.



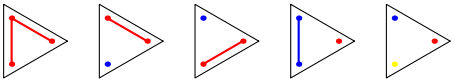
Obrázek 0.23.: *Ferrersův diagram rozkladu* $16 = 7 + 4 + 3 + 1 + 1$.



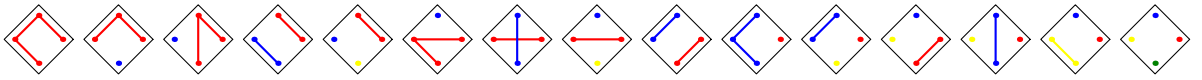
Obrázek 0.24.: *Ferrersovy diagramy všech jedenácti rozkladů čísla* 6.

**Diagram Bellových čísel**

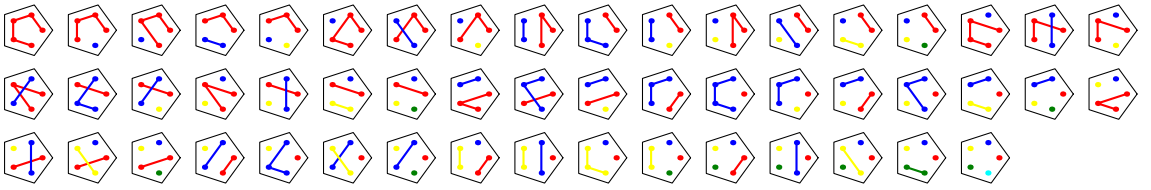
Bellova čísla $B_n$ (jsou zavedena na straně 32) udávají počet rozkladů $n$-prvkové množiny na podmnožiny. Diagram Bellových čísel pak přehledně každý rozklad znázorňuje. Na Obrázcích 0.25.–0.28. jsou uvedeny diagramy popisující všechny rozklady tří-, čtyř-, pěti- i šestiprvkové množiny.



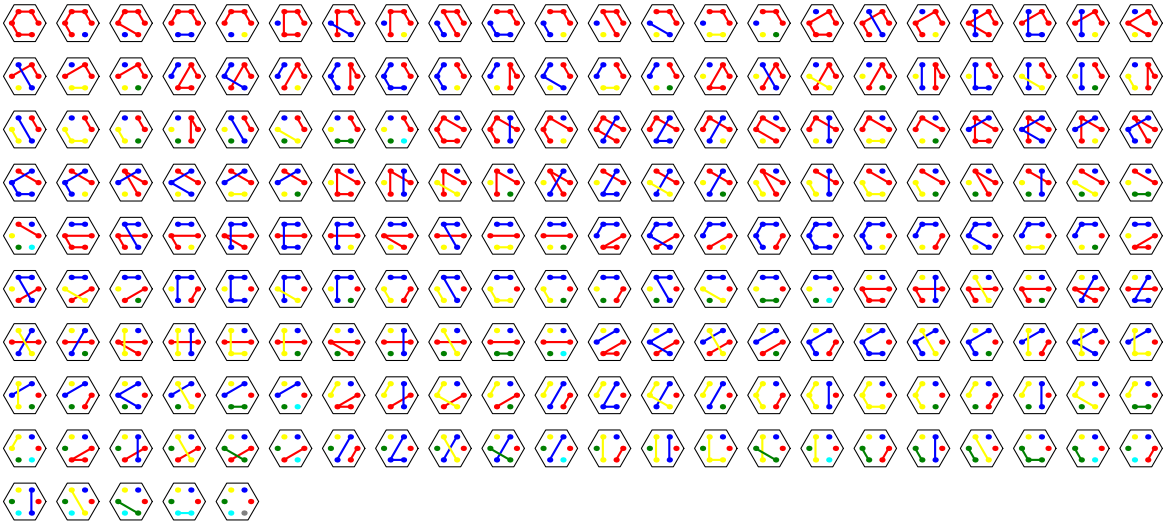
Obrázek 0.25.: *Diagram Bellových čísel pro* $n = 3$.



Obrázek 0.26.: *Diagram Bellových čísel pro* $n = 4$.



Obrázek 0.27.: *Diagram Bellových čísel pro* $n = 5$.



Obrázek 0.28.: *Diagram Bellových čísel pro* $n = 6$.

**Odkazy:**

- http://www.absoluteastronomy.com/topics/Mathematical_diagram
- http://www.math.ubc.ca/~cass/euclid/papyrus/papyrus.html
- http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/diagrams/
- http://en.wikipedia.org/wiki/Hasse_diagram
- http://www.combinatorics.org/Surveys/ds5/VennEJC.html
- http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_11_01_04.html
- http://kam.mff.cuni.cz/~kamserie/serie/clanky/2002/s588.ps
- http://mathforum.org/advanced/robertd/index.html

## Cvičení

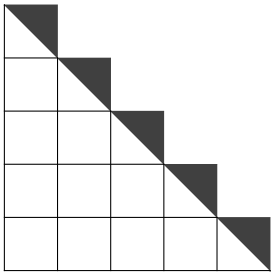
*0.8.1. Závodu se účastnila čtyři auta: červené, modré, zelené a fialové. Červené auto přijelo do cíle dříve než fialové. Zelené auto přijelo dříve než červené. Fialové auto přijelo dříve než modré. Zelené auto přijelo dříve než fialové. Které auto přijelo ze všech nejpozději?*

*0.8.2. Změňte barvy aut v jediné větě zadání z předchozího Cvičení 0.8.1. tak, aby úloha neměla jednoznačné řešení.*

*0.8.3. Ukažte, že do uzlových bodů libovolně velké čtvercové sítě nelze umístit vrcholy rovnostranného trojúhelníka.*

*0.8.4. Ukažte „obrázkem“, že součet prvních $n$ lichých čísel, je $n^2$.*

*0.8.5. Obrázek 0.29. zachycuje matematickou formuli. Vysvětlete o jakou formuli jde.*



*Obrázek 0.29.: Diagram popisující matematickou formuli.*

*0.8.6.* Kolik oblastí má Vennův diagram pro $n$ množin? Najděte postup, jak nakreslit Vennův diagram systému $n$ množin.*

*0.8.7. Ukažte, že počet rozkladů přirozeného čísla $n$ na nejvýše $k$ přirozených sčítanců odpovídá počtu rozkladů čísla $n+k$ na právě $k$ přirozených sčítanců.*

*0.8.8. Dva rozklady čísla $n$ se nazývají konjugované, jestliže Ferrersův diagram jednoho dostaneme z Ferrersova diagramu druhého záměnou řádků a sloupců. Rozklad se nazývá samokonjugovaný, jestliže je konjugovaný sám se sebou. Ukažte, že počet samokonjugovaných rozkladů čísla $n$ odpovídá počtu rozkladů čísla $n$ na různé sčítance liché velikosti.*

*0.8.9. Najděte nějaký příklad množin, pro který je smysluplnější znázornění užitím Eulerovým, nikoli Vennovým diagramem.*

### Bellova čísla

Bellovo číslo $B_n$ udává počet různých rozkladů $n$-prvkové množiny na třídy rozkladu. Současně podle Věty 0.1. je $B_n$ rovno počtu relací ekvivalence na $n$-prvkové množině.

Snadno se přesvědčíme, že platí $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$. Protože existuje právě pět různých rozkladů

$$\{\{a\},\{b\},\{c\}\},\quad \{\{a,b\},\{c\}\},\quad \{\{a,c\},\{b\}\},\quad \{\{a\},\{b,c\}\},\quad \{\{a,b,c\}\}$$

tříprvkové množiny $\{a, b, c\}$ na třídy, tak platí $B_3 = 5$. Prvních dvanáct Bellových čísel je

$$1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570.$$

Rozklad $n$-prvkové množiny se někdy znázoňuje pomocí tzv. diagramu Bellových čísel. Příklady jsou na Obrázcích 0.25. až 0.28.

Nejprve indukcí ukážeme, že pro Bellova čísla platí rekurentní vztah

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \tag{4}$$

kde klademe $B_0 = B_1 = 1$, neboť prázdná množina má jediný rozklad na prázdné třídy a jednoprvková množina má jediný rozklad na jednoprvkovou třídu. Mějme nějakou $(n+1)$-prvkovou množinu $A$ a předpokládejme, že pro libovolnou množinu s $t$ prvky, kde $t \leq n$, existuje právě $B_t$ různých rozkladů. Zvolme libovolný pevný prvek $x \in A$ a pro libovolný rozklad $S$ množiny $A$ označme $X$ takovou množinu rozkladu $S$, která obsahuje prvek $x$ (taková množina existuje vždy právě jedna). Počet všech prvků množiny $A$, které *nejsou* v množině $X$, označíme $k$. Protože množina $X$ je jednoznačně určena zbývajícími $n + 1 - k$ prvky množiny $A$, tak snadno nahlédneme, že různých množin $X$ můžeme sestavit právě $\binom{n}{k}$. Pro množinu $\overline{X}_A$ existuje $B_k$ různých rozkladů, což pro všechny přípustné hodnoty $k = 0, 1, \ldots, n$ (alespoň jeden prvek je v $X$) dává vztah (4).

Pomocí principu inkluze a exkluze je možno odvodit explicitní vztah, nikoli jen rekurzivní vztah, pro výpočet Bellova čísla $B_n$ (Cvičení 0.8.11.).

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{k-i}\binom{k}{i} i^n}{k!}$$

Pomocí vytvořujících funkcí se dá ukázat, že platí

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

A konečně, protože Stirlingovo číslo druhého druhu $\left\{ {n \atop k} \right\}$ (strana 34) udává počet rozkladů $n$-prvkové množiny na právě $k$ tříd, tak pro Bellova čísla ihned dostáváme také následující vztah

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

**Bellův trojúhelník**

Bellova čísla je možno snadno spočítat „ručně“ pomocí tzv. Bellova trojúhelníka (Cvičení 0.8.12.).

1) Začneme číslem 1 na samostatném řádku.
2) Nový řádek začíná posledním číslem z předchozího řádku.
3) Každé další číslo na řádku se spočítá jako součet předchozího čísla $x$ na řádku a čísla nad tímto posledním číslem $x$.
4) Sčítání opakujeme tak dlouho, dokud nenapíšeme o jedno číslo více, než měl předchozí řádek.
5) Poslední číslo v $n$-tém řádku udává Bellovo číslo $B_n$.

Prvních šest řádků Bellova trojúhelníka je v Tabulce 0.2.

| $n$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | | | | |
| 3 | 2 | 3 | 5 | | | |
| 4 | 5 | 7 | 10 | 15 | | |
| 5 | 15 | 20 | 27 | 37 | 52 | |
| 6 | 52 | 67 | 87 | 114 | 151 | 203 |

Tabulka 0.2.: *Tabulka prvních šesti řádků Bellova trojúhelníka.*

**Odkazy:**

- http://en.wikipedia.org/wiki/Bell_numbers
- http://mathworld.wolfram.com/BellNumber.html
- http://mathforum.org/advanced/robertd/bell.html

## Cvičení

*0.8.10. Ukažte, že počet různých surjektivních zobrazení $n$-prvkové množiny na $k$-prvkovou množinu je $\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n$.*

*0.8.11. Ukažte, že platí vztah $B_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n}{k!}$.*

*0.8.12. Vysvětlete, proč popsaná konstrukce Bellova trojúhelníka dává $B_n$.*

### Stirlingova čísla

Na Stirlingova čísla narazíme v řadě kombinatorických úloh, neboť jedno udává počet permutací $n$-prvkové množiny s právě $k$ cykly a druhé počet různých rozkladů $n$-prvkové množiny na $k$ neprázdných podmnožin.

#### Stirlingovo číslo prvního druhu

*Stirlingovo číslo prvního druhu* udává počet permutací $n$-prvkové množiny s právě $k$ cykly a značí se symbolem

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Někdy se používá také zápis $s(n,k)$. Například $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 11$, neboť existuje 11 různých permutací čtyřprvkové množiny s právě dvěma cykly.

$$(1)(234), (1)(243), (134)(2), (143)(2), (124)(3), (142)(3), (123)(4), (132)(4), (12)(34), (13)(24), (14)(23)$$

Hodnotu Stirlingova čísla prvního druhu můžeme vypočítat pomocí rekurentního vztahu

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

pro $k > 0$, přičemž položíme $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ a $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} = 0$ pro $n > 0$.

Při odvození vztahu můžeme využít následující kombinatorickou úvahu. Každou permutaci $n$-prvkové množiny s právě $k$ cykly můžeme získat z nějaké permutace $(n-1)$-prvkové množiny přidáním nového prvku. Můžeme postupovat dvěma způsoby:

1) buď do $(n-1)$-prvkové permutace s $k-1$ cykly přidáme nový cyklus s jediným prvkem (takových možností je $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$),
2) nebo do některého z $k$ cyklů $(n-1)$-prvkové permutace s $k$ cykly přidáme nový prvek. Prvky takové $(n-1)$-prvkové množiny s $k$ cykly pak můžeme *označit* tak, aby permutace byla tvořena následujícími cykly

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})(x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_{n_2}) \ldots (x_{n_{k-1}+1}, x_{n_{k-1}+2}, \ldots, x_{n_k}),$$

kde $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n-1$. Nyní nový prvek můžeme vložit *ihned za libovolný* z uvedených $n-1$ prvků a pokaždé dostaneme jinou permutaci $n$-prvkové množiny s právě $k$ cykly. Takových permutací proto je $(n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$.

Celkem proto dostaneme počet $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ permutací $n$-prvkové množiny s právě $k$ cykly jako součet počtu obou možností $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$.

**Otázka:** Proč je přirozené zvolit $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ a $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} = 0$ pro $n > 0$?

**Stirlingovo číslo druhého druhu**

*Stirlingovo číslo druhého druhu* udává počet rozkladů $n$-prvkové množiny na právě $k$ tříd rozkladu a značí se symbolem

$$\left\{ n \atop k \right\},$$

někdy se používá také zápis $S(n,k)$. Například $\left\{ 4 \atop 2 \right\} = 7$, neboť existuje 7 různých rozkladů čtyřprvkové množiny na dvě třídy rozkladu.

$$\{1\}\{234\}, \quad \{2\}\{134\}, \quad \{3\}\{124\}, \quad \{4\}\{123\}, \quad \{12\}\{34\}, \quad \{13\}\{24\}, \quad \{14\}\{23\}$$

Hodnotu Stirlingova čísla druhého druhu můžeme vypočítat pomocí rekurentního vztahu

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \left\{ n-1 \atop k \right\},$$

přičemž položíme $\left\{ n \atop 1 \right\} = 1$ a $\left\{ n \atop n \right\} = 1$. Dále můžeme definovat $\left\{ 0 \atop 0 \right\} = 1$ a $\left\{ n \atop 0 \right\} = 0$ pro $n > 0$.

Rekurentní vztah snadno odvodíme pomocí následující kombinatorické úvahy. Každý rozklad $n$-prvkové množiny na právě $k$ tříd rozkladu můžeme získat z rozkladu nějaké $(n-1)$-prvkové množiny přidáním nového prvku. Můžeme postupovat dvěma způsoby:

1) buď přidáme jednu jednoprvkovou třídu obsahující nový prvek k rozkladu $(n-1)$-prvkové množiny na právě $k-1$ tříd (takových možností je $\left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$),
2) nebo přidáme nový prvek do některé z existujících $k$ tříd rozkladu $(n-1)$-prvkové množiny na právě $k$ tříd. Takových možností je $k\left\{ n-1 \atop k \right\}$.

Celkem proto dostaneme počet $\left\{ n \atop k \right\}$ rozkladů $n$-prvkové množiny na právě $k$ tříd rozkladu jako součet počtu obou možností $\left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k\left\{ n-1 \atop k \right\}$.

Pro ruční výpočet malých hodnot Stirlingova čísla druhého druhu můžeme sestavit trojúhelníkové schéma jako v Tabulce 0.3. První a poslední číslo v každém řádku je určeno z definice. Zbývající čísla ve třetím a dalších řádcích můžeme dostat následujícím způsobem. Pro určení $k$-tého čísla v řádku $n$ stačí sečíst předchozí číslo (ze sloupce označeného $(k-1)$) a $k$ násobek $k$-tého čísla z předchozího řádku.

| $n\backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | | | |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | | |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | |
| 5 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 |

Tabulka 0.3.: *Tabulka malých Stirlingových čísel druhého druhu* $\left\{ n \atop k \right\}$.

**Otázka:** Všimněte si, že definujeme pro $k > 0$ je $\left\{ k \atop 0 \right\} = 0$, ale $\left\{ 0 \atop 0 \right\} = 1$ proč?

Připomeňme ještě, že počet všech rozkladů $n$-prvkové množiny na libovolný počet tříd rozkladu je určen Bellovým číslem.

**Odkazy:**

- http://en.wikipedia.org/wiki/Stirling_number
- http://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheSecondKind.html

## Počet rozkladů přirozeného čísla $n$ na právě $k$ sčítanců

Počet rozkladů čísla $n$ na právě $k$ sčítanců, přičemž pořadí sčítanců nehraje roli, označíme symbolem

$$P(n,k).$$

Například $P(7,3)=4$, neboť existují 4 různé rozklady čísla sedm na tři sčítance.

$$7=5+1+1, \quad 7=4+2+1, \quad 7=3+3+1, \quad 7=3+2+2$$

Hodnotu čísla $P(n,k)$ můžeme vypočítat pomocí rekurentního vztahu

$$P(n,k)=P(n-1,k-1)+P(n-k,k),$$

kde $P(n,k)=0$ pro $k>n$, $P(n,n)=1$ a $P(n,0)=0$.

Odvození rekurentního vztahu nahlédneme následující kombinatorickou úvahou. Každý rozklad čísla $n$ na právě $k$ sčítanců můžeme získat dvěma způsoby:

1) buď rozklad obsahuje sčítanec 1; takový rozklad získáme, když k rozkladu čísla $n-1$ na právě $k-1$ sčítancům přidáme nového sčítance 1 (takových rozkladů je $P(n-1,k-1)$),
2) nebo rozklad neobsahuje žádného sčítance 1; každý takový rozklad můžeme získat z rozkladu čísla $n-k$ na právě $k$ sčítanců zvětšením každého sčítance o 1 (takových rozkladů je $P(n-k,k)$).

Celkem dostaneme vztah pro počet $P(n,k)$ rozkladů čísla $n$ na právě $k$ sčítanců jako součet počtu obou možností $P(n-1,k-1)+P(n-k,k)$.

Pro výpočet čísla $P(n,k)$ můžeme sestavit trojúhelníkové schéma jako v Tabulce 0.4. První a poslední číslo v každém řádku je určeno z definice. Zbývající čísla ve třetím a dalších řádcích můžeme dostat následujícím způsobem. Pro určení $k$-tého čísla v řádku $n$ stačí sečíst $(k-1)$. číslo z předchozího řádku a $k$-té číslo z řádku $n-k$.

| $n\backslash k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | |
| 3 | 1 | 1 | 1 | | | | |
| 4 | 1 | 2 | 1 | 1 | | | |
| 5 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | | |
| 6 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | |
| 7 | 1 | 3 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 |

Tabulka 0.4.: *Tabulka počtu rozkladů čísla $n$ na právě $k$ sčítanců.*

**Poznámka 0.1.** Všimněte si rozdílu mezi $P(n,k)$ a Stirlingovým číslem druhého druhu (strana 34). Zatímco Stirlingovo číslo druhého druhu $\left\{ {n \atop k} \right\}$ udává počet rozkladů $n$-prvkové množiny na právě $k$ tříd rozkladu, tak $P(n,k)$ udává počet rozkladů čísla $n$ na právě $k$ sčítanců. Dva rozklady $n$-prvkové množiny se liší, i když mají stejně velké třídy rozkladu avšak některá třída jednoho rozkladu není třídou ve druhém rozkladu. Odpovídající rozklady čísla $n$ (chápaného jako velikost $n$-prvkové množiny) na sčítance, které udávají velikost jednotlivých tříd rozkladu však nerozlišujeme. Proto obecně $\left\{ {n \atop k} \right\} \geq P(n,k)$.

### Odkazy:

- http://mathworld.wolfram.com/PartitionFunctionP.html
- http://theory.cs.uvic.ca/inf/nump/NumPartition.html

## Cvičení

*0.8.13. Kolika způsoby je možné napsat číslo $n$ jako součet přirozených sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.*

### Dvanáctero způsobů počítání

Při řešení kombinatorických úloh často narazíme na některý z klasických početních postupů. Následuje systematická klasifikace početních problémů jednak z pohledu zobrazení $f : K \to N$ s jistými omezujícími podmínkami a současně interpretace takových zobrazení v jazyce rozdělování $k$ objektů do $n$ přihrádek.

Každé zobrazení $k$-prvkové množiny $K$ do $n$-prvkové množiny $N$ si můžeme představit jako rozmístění $k$ objektů do $n$ přihrádek. Zobrazení $f : K \to N$ popisuje, do které přihrádky $f(i)$ je umístěn ten který objekt $i$. Objekty i přihrádky mohou být rozlišitelné (očíslované, označené) nebo nerozlišitelné. Striktně vzato nerozlišitelné objekty nebo nerozlišitelné přihrádky nejsou množiny, ale multimnožiny. Na nerozlišitelné přihrádky se můžeme dívat i jako na množinu různých přihrádek, kdy nerozlišíme taková rozdělení objektů, která se liší permutací (záměnou, přečíslováním) přihrádek. Můžeme požadovat, aby zobrazení $f$ bylo prosté (injektivní), nebo zobrazením na (surjektivní), nebo na zobrazení $f$ nebudeme klást žádná omezení. Omezující podmínky na zobrazení $f$ můžeme přehledně shrnout:

1) *žádná podmínka* na $f$, každý objekt může být umístěn do libovolné přihrádky bez omezení,
2) $f$ musí být *injektivní*, neboli aby každá přihrádka obsahovala nejvýše jeden objekt,
3) $f$ musí být *surjektivní*, v odpovídajícím rozdělení objektů nesmí žádná přihrádka zůstat prázdná,
4) $f$ musí být *bijektivní*, tj. injektivní i surjektivní.

Poslední možnost, kdy zobrazení je bijektivní, dává smysl pouze v případě, kdy $k = n$. Příslušný počet možných zobrazení je speciálním případem úlohy s injektivní nebo surjektivním zobrazením, a proto tato varianta kombinatorických problémů nepřináší žádnou novou myšlenku a bylo by možné ji z úvah vynechat.

Dále můžeme zavést relace ekvivalence pro prvky množiny $K$ nebo pro prvky množiny $N$ a dvě zobrazení $f_1 : K \to N$ a $f_2 : K \to N$ budeme považovat za shodná, pokud jedno můžeme z druhého dostat záměnou ekvivalentních (nerozlišitelných) prvků. Rozdělujeme-li například $k$ identických (nerozlišitelných) předměty do $n$ různých (rozlišitelných) přihrádek, tak můžeme úlohu zkoumat jako zobrazení $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové množiny $N$, přičemž nerozlišujeme zobrazení, která se liší jen nějakou permutací prvků množiny $N$. Jsou čtyři (základní) možnosti:

1) všechny prvky množin $K$ i $N$ považujeme za různé, což odpovídá rozmísťování různých objektů do různých přihrádek,
2) všechny prvky množiny $K$ považujeme za ekvivalentní, rozmísťujeme nerozlišitelné objekty do různých přihrádek,
3) všechny prvky množiny $N$ považujeme za ekvivalentní, rozmísťujeme různé objekty do nerozlišitelných přihrádek,
4) všechny prvky množiny $K$ považujeme za ekvivalentní i všechny prvky množiny $N$ považujeme za ekvivalentní a rozmísťujeme nerozlišitelné objekty do nerozlišitelných přihrádek.

Požadavky na zobrazení můžeme libovolně kombinovat s požadavkem na nerozlišitelnost prvků, a proto dostaneme celkem $3 \cdot 4 = 12$ (dvanáctero[6]) kombinatorických úloh. V Tabulce 0.5. jsou pro úplnost zahrnuty i čtyři úlohy odpovídající bijektivním zobrazením $f : K \to N$.

| objekty | přihrádky | podmínka pro $f$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | $n$ | žádná | injektivní | surjektivní | bijektivní |
| rozlišitelné | rozlišitelné | $n^k$ | $V(k,n)$ | $n!\left\{{k \atop n}\right\}$ | $\begin{cases} n! & \text{pro } k = n \\ 0 & \text{pro } k \neq n \end{cases}$ |
| nerozlišitelné | rozlišitelné | $\binom{n+k-1}{n-1}$ | $\binom{n}{k}$ | $\binom{k-1}{n-1}$ | $\begin{cases} 1 & \text{pro } k = n \\ 0 & \text{pro } k \neq n \end{cases}$ |
| rozlišitelné | nerozlišitelné | $\sum_{i=0}^{n} \left\{{k \atop i}\right\}$ | $\begin{cases} 1 & \text{pro } k \leq n \\ 0 & \text{pro } k > n \end{cases}$ | $\left\{{k \atop n}\right\}$ | $\begin{cases} 1 & \text{pro } k = n \\ 0 & \text{pro } k \neq n \end{cases}$ |
| nerozlišitelné | nerozlišitelné | $P(k+n,n)$ | $\begin{cases} 1 & \text{pro } k \leq n \\ 0 & \text{pro } k > n \end{cases}$ | $P(k,n)$ | $\begin{cases} 1 & \text{pro } k = n \\ 0 & \text{pro } k \neq n \end{cases}$ |

Tabulka 0.5.: *Dvanáctero počítání.*

[6] Anglický termín *twelvefold way* je připisován Joelu Spencerovi, do češtiny jsem jej přeložil jako *dvanáctero počítání*.

Symbolem $P(k,n)$ označujeme počet rozkladů čísla $k$ na $n$ nenulových částí. Více o čísle $P(k,n)$ je psáno na straně 36. Počty jednotlivých zobrazení, která odpovídají jistým kombinatorickým výběrům, podrobně rozebereme postupně po řádcích Tabulky 0.5.

**Rozdělování různých objektů do rozlišitelných přihrádek**

*Zobrazení $K \to N$* Počet všech rozdělení $k$ různých objektů do $n$ různých (rozlišitelných) přihrádek přesně odpovídá počtu všech různých zobrazení $f$ nějaké $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové množiny. Současně můžeme úlohu přeformulovat jako určení počtu všech $k$-prvkových posloupností sestavených z $n$ prvků, ve kterých se každý prvek může opakovat v libovolném počtu kopií. Právě každá posloupnost $k$ obrazů v zobrazení $f$ je výběrem $k$ prvků z $n$ možných, přičemž prvky výběru se mohou opakovat. Celkový počet je dán vztahem (strana 16)

$$V^*(n,k) = n^k.$$

*Injektivní zobrazení $K \to N$* Počet takových rozdělení $k$ různých objektů do $n$ různých (rozlišitelných) přihrádek, kdy každý předmět přijde do jiné přihrádky, přesně odpovídá počtu všech injektivních zobrazení nějaké $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové množiny. Současně se jedná o počet všech $k$-prvkových posloupností sestavených z $n$ prvků, přičemž prvky posloupnosti se nemohou opakovat. Celkový počet je pro $k \leq n$ dán vztahem (strana 16)

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Je-li $k > n$, tak neexistuje žádná taková posloupnost. V takovém případě preferujeme výpočetní vztah $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, neboť faktoriály záporných čísel se nedefinují.

*Surjektivní zobrazení $K \to N$* Počet takových rozdělení $k$ různých objektů do $n$ různých (rozlišitelných) přihrádek, kdy žádná přihrádka nezůstane prázdná, přesně odpovídá počtu všech surjektivních zobrazení nějaké $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové množiny $N$. Současně můžeme úlohu přeformulovat jako určení počtu všech $k$-prvkových posloupností sestavených z $n$ prvků, ve kterých se každý prvek z $N$ vyskytuje alespoň jedenkrát. Celkový počet je dán vztahem

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k,$$

který odvodíme nejlépe užitím principu inkluze a exkluze (Cvičení 0.8.10.). Navíc, protože Stirlingovo číslo druhého druhu $\left\{ {k \atop n} \right\}$ (jsou zavedena na straně 35) udává počet rozkladů množiny $K$ na $n$ (neprázdných) tříd rozkladu, tak počet surjektivních zobrazení $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové je současně dán vztahem

$$n! \left\{ {k \atop n} \right\},$$

neboť rozdělení různých $k$ objektů do $n$ přihrádek můžeme chápat jako rozklad množiny $K$, přičemž rozlišujeme $n!$ různých pořadí tříd rozkladu.

*Bijektivní zobrazení $K \to N$* Počet takových rozdělení $k$ různých objektů do $n$ různých přihrádek, kdy každá přihrádka obsahuje právě jeden objekt, přesně odpovídá počtu všech bijektivních zobrazení nějaké $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové množiny $N$. Současně můžeme úlohu přeformulovat jako určení počtu všech $k$-prvkových posloupností sestavených z $n$ prvků, ve kterých se každý prvek vyskytuje právě jedenkrát, jedná se o permutace prvků množiny $N$. Jejich počet je $P(n) = n!$. Je-li $k \neq n$, pak pochopitelně žádné takové zobrazení nefunguje. Obecný vztah pro počet bijektivní zobrazení $K \to N$ je

$$\begin{cases} n! & \text{pro } k = n \\ 0 & \text{pro } k \neq n. \end{cases}$$

Všimněte si, že uvedený vztah dostaneme jako speciální případ pro počet injektivních zobrazení $K \to N$ pro $k = n$, neboť $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{1} = n!$ i jako speciální případ pro počet surjektivních zobrazení $K \to N$ pro $k = n$, neboť $n!\left\{{n \atop n}\right\} = n! \cdot 1 = n!$.

**Rozdělování identických objektů do rozlišitelných přihrádek**

Rozdělování identických objektů odpovídá takovým zobrazením $f : K \to N$, kdy nerozlišujeme dvě zobrazení, která se liší jen nějakou permutací prvků množiny $K$. Obecně můžeme říci, že pro dané množiny $K$ a $N$ bude takových různých rozdělení (zobrazení) existovat méně, než když budeme považovat objekty v množině $K$ za různé.

*Zobrazení $K \to N$, různá až na permutaci prvků množiny $K$* Počet všech rozdělení $k$ identických objektů do $n$ různých (rozlišitelných) přihrádek přesně odpovídá počtu všech různých zobrazení $f$ nějaké $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové množiny, která nerozlišují permutaci prvků množiny $K$ (pořadí vzorů zobrazených na ten který prvek množiny $N$). Současně můžeme úlohu přeformulovat jako určení počtu všech $k$-prvkových multimnožin sestavených z $n$ různých prvků, ve kterých se každý prvek může opakovat v libovolném počtu kopií. Celkový počet je dán vztahem (strana 17)

$$C^*(n,k) = \binom{k+n-1}{n-1}.$$

*Injektivní zobrazení $K \to N$, různá až na permutaci prvků množiny $K$* Počet takových rozdělení $k$ identických objektů do $n$ různých (rozlišitelných) přihrádek, kdy každý předmět přijde do jiné přihrádky, odpovídá počtu všech takových injektivních zobrazení nějaké $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové množiny, která nerozlišují permutaci prvků množiny $K$ (pořadí vzorů zobrazených na ten který prvek množiny $N$). Současně se jedná o počet všech $k$-prvkových podmnožin sestavených z prvků množiny $N$. Jejich počet pro $k \leq n$ je dán vztahem (strana 17)

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}.$$

Je-li $k > n$, tak neexistuje žádné takové zobrazení.

*Surjektivní zobrazení $K \to N$, různá až na permutaci prvků množiny $K$* Počet takových rozdělení $k$ identických objektů do $n$ různých (rozlišitelných) přihrádek, kdy žádná přihrádka nezůstane prázdná, přesně odpovídá počtu všech surjektivních zobrazení nějaké $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové množiny $N$, která nerozlišují permutaci prvků množiny $K$ (pořadí vzorů zobrazených na ten který prvek množiny $N$). Úlohu můžeme přeformulovat také jako určení počtu všech $k$-prvkových multimnožin sestavených z $n$ různých prvků, ve kterých se každý prvek může musí vyskytnout alespoň jednou. Navíc tato úloha odpovídá počtu rozkladů čísla $k$ na právě $n$ přirozených (nenulových) sčítanců, přičemž rozlišujeme pořadí sčítanců ($3+5+0$ je jiný rozklad čísla $k = 8$ na $n = 3$ sčítance než $5+0+3$). Počet takových rozkladů (zobrazení či multimnožin) je dán vztahem

$$\binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1} = \frac{(k-1)!}{(k-n)!(n-1)!}.$$

Je-li $k < n$, tak neexistuje žádné takové zobrazení.

Odvození vztahu můžeme nahlédnout následující kombinatorickou úvahou pro počet rozkladů čísla $k$ na $n$ přirozených sčítanců, přičemž pořadí sčítanců budeme rozlišovat. Představme si číslo $k$ zapsané jako $k$ jedniček oddělených $k-1$ symboly $+$. Odstraníme-li nyní některých $n-1$ symbolů $+$ z celkového počtu $k-1$ symbolů, dostaneme právě $n$ kladných(!) čísel, každé zapsané jakou součet jedniček. Protože výběr $n-1$ odstraněných symbolů $+$ předně odpovídá výběru $k-1-(n-1) = k-n$ ponechaných symbolů $+$, ihned dostaneme výše uvedený vztah.

*Bijektivní zobrazení $K \to N$, která nerozlišují permutaci prvků množiny $K$* Bijektivních zobrazení $K \to N$, pokud $k = n$, existuje $n!$. Pokud však nerozlišujeme zobrazení, která se liší jen permutaci prvků množiny $K$ (existuje jich $k! = n!$), tak existuje jediná taková bijekce. V případě,

kdy $k \neq n$, tak neexistuje žádná bijekce $K \to N$. Obecný vztah pro počet bijektivní zobrazení $K \to N$, která nerozlišují permutaci prvků množiny $K$, je

$$\begin{cases} n! & \text{pro } k = n \\ 0 & \text{pro } k \neq n. \end{cases}$$

Všimněte si, že dosadíme-li $k = n$ do výpočtu Stirlingova čísla druhého druhu (strana 34) pro surjektivní zobrazení $K \to N$, která nerozlišují permutaci prvků množiny $K$, dostaneme $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$. Také vztah pro počet takových injektivních zobrazení dává ve speciálním případě $k = n$ jedničku.

**Rozdělování různých objektů do nerozlišitelných přihrádek**

Rozdělování různých objektů do nerozlišitelných přihrádek odpovídá takovým zobrazením $f : K \to N$, kdy nerozlišujeme dvě zobrazení, která se liší jen nějakou permutací prvků množiny $N$. Obecně opět platí, že pro dané množiny $K$ a $N$ bude takových různých rozdělení (zobrazení) existovat méně, než když budeme považovat přihrádky v množině $N$ za rozlišitelné.

*Injektivní zobrazení $K \to N$, různá až na permutaci prvků množiny $N$* Počet všech rozdělení $k$ různých objektů do $n$ nerozlišitelných přihrádek, kdy každý předmět přijde do jiné přihrádky, odpovídá počtu všech takových injektivních zobrazení $f$ nějaké $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové množiny, která nerozlišují permutaci prvků množiny $N$.

Protože nerozlišujeme přihrádky (obrazy v množině $N$), tak každá dvě rozdělení (zobrazení) jsou ekvivalentní. Dvě injektivní zobrazení $K \to N$ se totiž mohou lišit jen přidělením vzorů, a proto stačí udělat nějakou permutaci nerozlišitelných obrazů, abychom dostali libovolné jiné zobrazení. Podobné vysvětlení lze podat i v terminologii rozdělování objektů do přihrádek: protože do každé přihrádky může přijít nejvýš jeden prvek, a protože přihrádky nerozlišujeme, tak pro $k \leq n$ existuje jediné takové rozdělení a pro $k > n$ neexistuje rozdělení žádné. Celkem můžeme hledaný počet vyjádřit vztahem

$$\begin{cases} 1 & \text{pro } k \leq n \\ 0 & \text{pro } k > n. \end{cases}$$

*Surjektivní zobrazení $K \to N$, různá až na permutaci prvků množiny $N$* Počet takových rozdělení $k$ různých objektů do $n$ nerozlišitelných přihrádek, kdy žádná přihrádka nezůstane prázdná, přesně odpovídá počtu všech surjektivních zobrazení nějaké $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové množiny $N$, přičemž nerozlišujeme zobrazení lišící se jen permutací prvků množiny $N$. Současně můžeme úlohu přeformulovat jako určení počtu všech rozkladů množiny $K$ na právě $n$ (neprázdných) podmnožin, případně jako počet všech relací ekvivalence na $k$-prvkové množině s právě $n$ třídami ekvivalence. Protože právě Stirlingovo číslo druhého druhu $\left\{ {k \atop n} \right\}$ udává počet rozkladů množiny $K$ na $n$ (neprázdných) tříd rozkladu, tak hledaný počet surjektivních zobrazení dán vztahem

$$\left\{ {k \atop n} \right\}.$$

Číselná hodnota může být popsána rekurentním vztahem, pomocí sum nebo pomocí vytvořujících funkcí (viz strana 35). Neexistuje však jednoduchý vzorec pro Stirlingova čísla druhého druhu, který by nevyžadoval použití sumy.

*Zobrazení $K \to N$, různá až na permutaci prvků množiny $N$* Počet všech rozdělení $k$ různých objektů do $n$ nerozlišitelných přihrádek odpovídá počtu všech takových různých zobrazení $f$ nějaké $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové množiny, která nerozlišují permutaci prvků množiny $N$ (pořadí obrazů na které se zobrazí ten který prvek množiny $N$). Podobně jako v předchozím odstavci můžeme úlohu přeformulovat jako určení počtu všech rozkladů množiny $K$ na *nejvýše*

$n$ (neprázdných) podmnožin, případně jako počet všech relací ekvivalence na $k$-prvkové množině s *nejvýše* $n$ třídami ekvivalence. S využitím symbolu pro Stirlingovo číslo druhého druhu můžeme počet rozkladů množiny $K$ na nejvýše $n$ (neprázdných) tříd rozkladu zapsat sumou

$$\sum_{i=0}^{n} \left\{ {k \atop i} \right\}.$$

Upozorníme ještě, že pro $k > 0$ je $\left\{ {k \atop 0} \right\} = 0$, neboť neprázdné množiny nelze rozložit do nula tříd rozkladu.

*Bijektivní zobrazení $K \to N$, která nerozlišují permutaci prvků množiny $N$* Bijektivní zobrazení $K \to N$, které nerozlišuje permutaci prvků množiny $N$, může existovat jen pro $k = n$. Ihned vidíme, že existuje jediná taková bijekce, kdy prvky množiny $N$ nerozlišujeme, neboť každá bijekce je složením jedné pevné bijekce $K \to N$ a nějaké permutace množiny $N$. Je-li $k \neq n$, tak výše uvedená bijekce neexistuje žádná. Hledaný počet takových bijekcí můžeme vyjádřit vztahem

$$\begin{cases} 1 & \text{pro } k = n \\ 0 & \text{pro } k \neq n. \end{cases}$$

Všimněte si, že každé bijektivní zobrazení $K \to N$, které nerozlišuje permutaci prvků množiny $N$, je speciálním případem odpovídajícího injektivního či surjektivního zobrazení. Proto také dosazením $k = n$ do odpovídajícího vztahu pro počet injektivních zobrazení $f : K \to N$, která nerozlišují permutaci prvků množiny $N$ dostaneme 1 stejně jako ve speciálním případě pro odpovídající surjektivní zobrazení.

**Rozdělování identických objektů do nerozlišitelných přihrádek**

Rozdělování identických objektů do nerozlišitelných přihrádek odpovídá takovým zobrazením $f : K \to N$, kdy nerozlišujeme dvě zobrazení, která se liší jen nějakou permutací prvků množiny $K$ nebo permutací prvků množiny $N$, tj. prvky považujeme za nerozlišitelné. Je přirozené, že pro dané množiny $K$ a $N$ bude takových různých rozdělení (zobrazení) existovat méně, než když budeme považovat prvky v alespoň jedné množině $K$ a $N$ za různé.

*Injektivní zobrazení $K \to N$, různá až na permutace prvků množiny $K$ a $N$* Počet všech rozdělení $k$ identických objektů do $n$ nerozlišitelných přihrádek, kdy každý předmět přijde do jiné přihrádky, odpovídá počtu všech takových injektivních zobrazení $f$ nějaké $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové množiny, která nerozlišují permutaci prvků množiny $K$ (pořadí vzorů zobrazených na ten který prvek množiny $N$) ani permutaci prvků množiny $N$ (obrazy v množině $N$). Protože nerozlišujeme přihrádky (prvky množiny $N$), tak každá dvě rozdělení (zobrazení) jsou ekvivalentní. Dvě injektivní zobrazení $K \to N$ se liší jen přidělením vzorů a my zobrazení lišící se permutací vzorů nerozlišujeme, tak existuje jediné takové zobrazení. V terminologii rozdělování objektů do přihrádek opět podáme analogické vysvětlení: protože do každé přihrádky může přijít nejvýš jeden prvek, a protože přihrádky (a dokonce ani objekty) nerozlišujeme, tak pro $k \leq n$ existuje jediné takové rozdělení a pro $k > n$ neexistuje rozdělení žádné. Celkem můžeme hledaný počet vyjádřit vztahem

$$\begin{cases} 1 & \text{pro } k \leq n \\ 0 & \text{pro } k > n. \end{cases}$$

*Surjektivní zobrazení $K \to N$, různá až na permutace prvků množiny $K$ a $N$* Počet takových rozdělení $k$ identických objektů do $n$ nerozlišitelných přihrádek, kdy žádná přihrádka nezůstane prázdná, přesně odpovídá počtu všech surjektivních zobrazení nějaké $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové množiny $N$, přičemž nerozlišujeme zobrazení lišící se jen permutací prvků množiny $K$ nebo permutací prvků množiny $N$. Současně můžeme úlohu přeformulovat jako určení počtu všech rozkladů čísla $k = |K|$ na *právě* $n$ nenulových sčítanců, přičemž pořadí sčítanců nehraje roli. Všimněte si, jak se tato úloha liší od rozkladu množiny $K$ na $n$ neprázdných podmnožin. Například rozklad čísla $8 = 4 + 4$ je jediný, avšak rozkladů 8-prvkové množiny na dvě čtyřprvkové třídy existuje řada (celkem $\binom{8}{4}$), neboť dva rozklady považujeme za různé, pokud se nějaká

třída jednoho rozkladu nevyskytuje jako třída v druhém rozkladu. V našem případě můžeme hledaný počet vyjádřit rekurentním vztahem (odvození je na straně 36)

$$P(k,n) = P(k-1,n-1) + P(k-n,n),$$

kde $P(k,0) = 0$, $P(k,k) = 1$ a $P(k,n) = 0$ pro $n > k$.

*Zobrazení $K \to N$, různá až na permutace prvků množiny $K$ a $N$* Počet všech rozdělení $k$ identických objektů do $n$ nerozlišitelných přihrádek odpovídá počtu všech takových různých zobrazení $f$ nějaké $k$-prvkové množiny do $n$-prvkové množiny, přičemž nerozlišujeme zobrazení lišící se jen permutací prvků množiny $K$ nebo permutací prvků množiny $N$. Úlohu můžeme opět přeformulovat jako určení počtu všech rozkladů čísla $k = |K|$ na *nejvýše* $n$ přirozených sčítanců. S využitím symbolu $P(k,n)$ pro počet rozkladů čísla $k$ na právě $n$ přirozených sčítanců můžeme vyjádřit počet všech takových zobrazení (rozdělení objektů) vztahem

$$\sum_{i=0}^{n} P(k,i) = \sum_{i=1}^{n} P(k,i),$$

neboť $P(k,0) = 0$. Je snadné si uvědomit, že přidáme-li do každé z $n$ přihrádek jeden nový objekt, můžeme studovat ekvivalentní úlohu rozdělení $k+n$ identických objektů do $n$ nerozlišitelných přihrádek, kdy žádná přihrádka nezůstane prázdná a vyjádřit hledaný počet rozdělení objektů (počet různých zobrazení) následujícím vztahem bez sumy

$$P(k+n,n).$$

*Bijektivní zobrazení $K \to N$, která nerozlišují permutace prvků množiny $K$ a $N$* Je zřejmé, že bijektivní zobrazení $K \to N$, může existovat jen pro $k = n$. Pokud navíc nerozlišujeme zobrazení, která se liší permutací prvků množiny $K$ nebo permutací prvků množiny $N$, tak ihned vidíme, že existuje jediná taková bijekce, neboť každá bijekce je složením jedné pevné bijekce a nějaké permutace množiny $N$. Je-li $k \neq n$, tak taková bijekce neexistuje žádná. Počet hledaných bijekcí můžeme vyjádřit vztahem

$$\begin{cases} 1 & \text{pro } k = n \\ 0 & \text{pro } k \neq n. \end{cases}$$

Všimněte si opět, že každé bijektivní zobrazení $K \to N$, které nerozlišuje permutaci prvků množiny $K$ nebo $N$, je speciálním případem odpovídajícího injektivního či surjektivního zobrazení. Proto také dosazením $k = n$ do odpovídajícího vztahu pro počet injektivních zobrazení $f : K \to N$, která nerozlišují permutaci prvků množiny $N$, dostaneme 1. Stejně tak je ve speciálním případě $k = n$ odpovídající počet surjektivních zobrazení $P(n,n) = 1$.

**Odkazy:**

- http://en.wikipedia.org/wiki/Twelvefold_way

## Cvičení

*0.8.14. Kolik existuje relací ekvivalence na pětiprvkové množině?*

*0.8.15. Ukažte, že platí $B_n = \sum_{i=1}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\}$.*

### Logická exploze

Současné platnosti dvou navzájem se vylučující tvrzení (tvrzení $T$ a negace $\neg T$) říkáme *spor*. Pokud bychom připustili, že taková situace nastane, tak i v intuitivní logice můžeme odvodit platnost libovolného tvrzení $X$. Situaci, kdy jsme schopni dokázat libovolné tvrzení, se říká *logická exploze*.

1) Předpokládejme platnost $(T \wedge \neg T)$.
2) Odtud eliminací dostaneme platnost tvrzení $T$.
3) Zeslabením tvrzení $T$ dostaneme platnost tvrzení $(T \vee X)$.

4) Eliminací musí podle bodu 1) platit také $\neg T$.
5) Vyloučením platnosti $T$ podle 4) z tvrzení 3) dostaneme platnost libovolně zvoleného tvrzení $X$.

V parakonzistentních logických systémech taková konstrukce neplatí, neboť některé použité elementární úpravy nejsou považovány za platné.

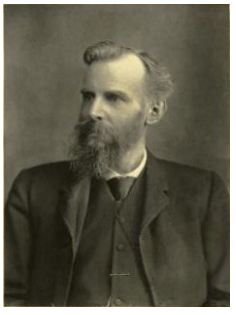
Je zajímavé si uvědomit analogii nepřípustnosti sporu v matematické teorii s obyčejným protimluvem. I v běžné řeči se někdy dopustíme protichůdných tvrzení. Jsme-li na protimluv upozorněni, pak je v lidské přirozenosti případné nedorozumění vysvětlit a spor eliminovat, místo abychom jej považovali za normální součást života a spokojili s konstatováním „no tak si protiřečím, no a co má být?“

**Odkazy:**

- http://en.wikipedia.org/wiki/Principle_of_explosion
- http://de.wikipedia.org/wiki/Ex_falso_quodlibet
- http://xkcd.com/704/

### John Venn (4. srpna 1834 – 4. dubna 1923)

John Venn byl Britský logik a filozof. Jeho jméno je spjato především s Vennovými diagramy, které popisují všechny možné vztahy mezi danými množinami.



Obrázek 0.30.: *John Venn a vitráž v Caius Hall na Cambridgské univerzitě.*

John Venn se narodil v Hull, Yorkshire. Jeho matka zemřela, když byly Johnovi tři roky. Otec, Rev. Henry Venn, vychoval syna v přísném duchu rodinných tradic. John Venn studoval v letech 1853–1857 na Gonville and Caius College na Cambridgské univerzitě. Brzy na to se v roce 1859 stal knězem. Od roku 1862 se vrátil do Cambridge vyučovat humanitní obory, logiku i pravděpodobnost.

Venn se zajímal především o logiku. V roce 1881 vydal knihu „Symbolická logika“, ve které zavedl diagramy, dnes známé jako Vennovy diagramy. Roku 1883 byl zvolen členem Královské společnosti.

**Odkazy:**

- http://www.answers.com/topic/john-venn
- http://www.pucrs.br/famat/statweb/historia/daestatistica/biografias/Venn.htm

# Kapitola 1. Grafy a podgrafy

## 1.1. Grafy a jednoduché grafy

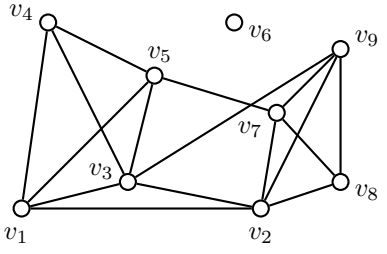
Pojem grafu byl zaveden Leonhardem Eulerem[7] v roce 1736. Jedná se o model, který reprezentuje objekty a vztahy mezi nimi. Zdůrazněme, že v tomto textu grafem nebude graf funkce, ale následující struktura.

**Definice** Jednoduchý *graf* $G$ je uspořádaná dvojice $(V, E)$, kde $V$ je neprázdná množina *vrcholů* a $E$ je nějaká množina dvouprvkových podmnožin množiny $V$. Prvkům $E$ říkáme *hrany*.

Množinu vrcholů grafu $G$ budeme označovat $V(G)$ a množinu hran $E(G)$. Pokud nebude hrozit mýlka, vystačíme s označením $V$ a $E$. Jestliže budeme chtít zdůraznit množinu vrcholů resp. hran, označíme graf $G = (V, E)$, v literatuře najdeme také zápis $G(V, E)$. *Řád grafu* $G$ je počet jeho vrcholů a *velikostí grafu* rozumíme počet jeho hran.

**Diagramy**

Grafy znázorňujeme pomocí diagramů[8]. Síla teorie grafů spočívá zejména ve stručné a přehledné interpretaci problému, kdy abstrahujeme od nedůležitých symbolů a soustředíme se na strukturu, která je v problému obsažena. V *nakreslení* grafu (v *diagramu*) znázorníme vrcholy jako body v rovině a hrany jako křivky, které spojují vždy oba body odpovídající vrcholům jež hranu určují. Rozlišujeme pojmy hrana a nakreslení hrany. V nakreslení grafu prochází každá hrana jen dvěma takovými body, které odpovídají vrcholům a sice dvojicí vrcholů, které hranu určují. Je praktické požadovat, aby se dvě různé hrany protínaly nejvýše jedenkrát.




Obrázek 1.1.: *Nakreslení grafu $G$.*

Na Obrázku 1.1. je nakreslení grafu $G = (V, E)$ s množinou vrcholů $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ a množinou hran $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_7\}, \{v_2, v_8\}, \{v_2, v_9\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_9\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_7\}, \{v_7, v_8\}, \{v_7, v_9\}, \{v_8, v_9\}\}$.

**Značení a terminologie**

Budeme pracovat téměř výhradně s konečnými grafy. V takovém případě má smysl říci, že graf $G$ má $|V|$ vrcholů a $|E|$ hran. Vrcholy $u$ a $v$ jsou *koncové* vrcholy hrany $\{u, v\}$. Hrany označujeme obvykle písmeny z první poloviny abecedy $(e, f, h, \ldots)$ a vrcholy písmeny z konce abecedy $u, v, w, \ldots, z$. Máme-li hranu $e$ s koncovými vrcholy $u, v$, tak místo $e = \{u, v\}$ používáme kratší zápis $e = uv$ nebo jen hrana $uv$. *Incidence* je vztah mezi hranou a jejími koncovými vrcholy. Je-li vrchol $v$ koncovým

[7] Na straně 214 je popsána úloha sedmi mostů města Královce.

[8] Diagramy odpradávna pomáhaly porozumět popisu.

Na obrázku je fragment textu a diagram z Eukleidových Základů. Jedná se o jeden z nejlépe dochovaných Oxyrhynchských papyrů, jejichž vznik se datuje na přelom prvního a druhého století našeho letopočtu. http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Oxyrhynchus_papyri

vrcholem hrany $e$, můžeme psát $v \in e$ a říkáme, že vrchol $v$ je *incidentní* s hranou $e$ nebo také že hrana $e$ je incidentní s vrcholem $v$.

Dva různé vrcholy $u$, $v$ v grafu jsou *sousední* neboli *závislé*, jestliže v grafu existuje hrana $uv$ (jsou koncovými vrcholy téže hrany). V opačném případě se vrcholy nazývají *nezávislé* nebo *nesousední*. Množina vrcholů, ve které jsou každé dva vrcholy nezávislé, se nazývá *množina nezávislých vrcholů*. Modré vrcholy v levém grafu na Obrázku 1.2. jsou závislé a bílé vrcholy tvoří největší nezávislou množinu vrcholů (*největší* znamená, že žádná nezávislá množina s více prvky v grafu neexistuje). V pravém grafu tvoří modré vrcholy množinu nezávislých vrcholů, která je maximální, která ale není největší (*maximální* znamená, že žádný vrchol do množiny nezávislých vrcholů již nemůžeme přidat). S nezávislými množinami vrcholů budeme pracovat v Kapitolách 7. a 8.

Podobně říkáme, že dvě hrany jsou *nezávislé*, jestliže nemají žádný společný koncový vrchol (průnik hran je prázdná množina). Množina hran se nazývá *množina nezávislých hran* (v Kapitole 6. jí budeme říkat také *párování*), jestliže každá dvojice hran z množiny je nezávislá. Naopak, pokud nějaké dvě hrany mají společný koncový vrchol, říkáme, že jsou *závislé*.

Obrázek 1.2.: *Závislé a nezávislé vrcholy v grafu.*

**Otázky:**

- Kolik nejvýše nezávislých vrcholů může existovat v grafu $G$?
- Kolik nejvýše nezávislých hran může existovat v grafu $G$?
- Existuje graf, ve kterém má nějaká množina nezávislých hran více prvků, než největší množina nezávislých vrcholů?

**Zobecnění pojmu graf**

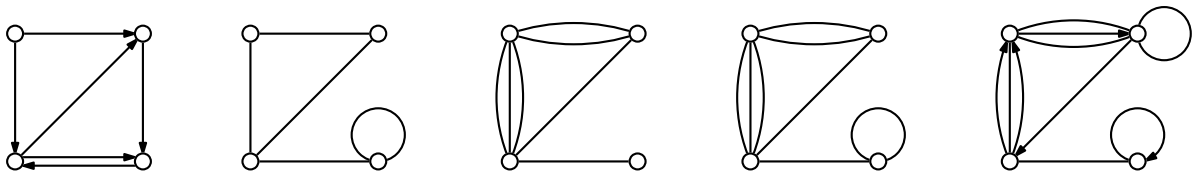
Graf, tak jak jsme jej zavedli v definici na straně 44, se nazývá *jednoduchý graf*. Všimněte si, že nerozlišujeme hrany $uv$ a $vu$. Při řešení některých problémů však má smysl rozlišit pořadí vrcholů hrany. V takovém případě zobecníme definici grafu na *orientovaný* graf. Orientovaným grafům se budeme věnovat v Kapitole 12.

Definice jednoduchého grafu nedovoluje, aby oba koncové vrcholy hrany byly stejné, protože by se nejednalo o dvouprvkovou podmnožinu $V(G)$. Takovým „hranám“ se říká *smyčky*. Pokud bychom chtěli do definice grafu zahrnout i smyčky, dovolíme, aby hrany byly i jednoprvkové podmnožiny $V(G)$, tedy $E' \subseteq E(G) \cup V(G)$. Zavedeme tak *graf se smyčkami*.

Ještě obecnější je *multigraf*, ve kterém dovolíme, aby dva vrcholy byly spojeny i více než jednou hranou, a *pseudograf*, ve kterém navíc povolíme smyčky. Připomeňme, že symbolem $\binom{X}{k}$ značíme systém všech $k$-prvkových podmnožin dané množiny $X$, zatímco $\binom{|X|}{k}$ je kombinační číslo, které určuje počet takových podmnožin. Definice obecného grafu, ve kterém mohou být orientované i neorientované hrany i smyčky vypadá takto:

**Definice Obecný graf**

*Obecný graf* je trojice $(V, E, \varphi)$, kde $V$ je neprázdná množina vrcholů, $E$ je množina hran, $E \cap V = \emptyset$, a $\varphi$ je *incidenční zobrazení* $\varphi : E \to \binom{V}{2} \cup V^2 \cup V$.



Obrázek 1.3.: *Orientovaný graf, graf se smyčkou, multigraf, pseudograf a obecný graf.*

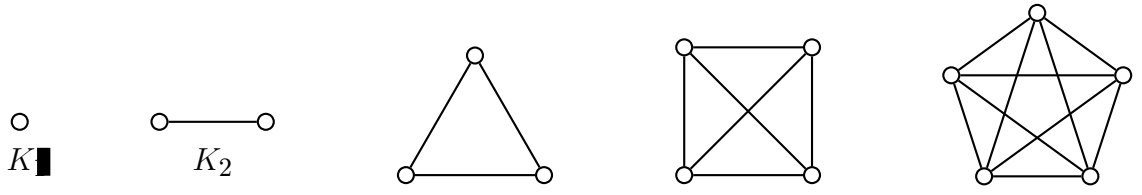
Všimněte si, že $E$ je nějaká obecná množina, interpretaci jejích prvků zajistí teprve funkce $\varphi$.

Ještě obecnější než graf je *hypergraf*. Hrany hypergrafu[9] nemusí být jen dvouprvkové, ale obecné podmnožiny $V$.

V dalším se zaměříme na tzv. *jednoduchý graf*, tj. konečný neorientovaný graf bez smyček a násobných hran. Nebude-li výslovně řečeno jinak, tak pod pojmem „graf“ budeme rozumět jednoduchý graf. Ačkoli má velmi dobrý smysl zabývat se i nekonečnými grafy, my se budeme zabývat jen konečnými grafy (tj. takovými grafy $G$, kdy $|V(G)| \in \mathbb{N}$).

**Základní typy grafů**

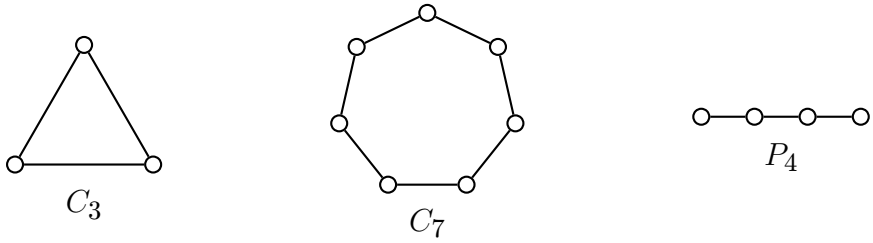
Podle definice nemůže být graf prázdný. Graf, který obsahuje jediný vrchol (a žádnou hranu) se nazývá *triviální* graf. Řada grafů, se kterými budeme pracovat, má svá jména. Například graf s $n$ vrcholy, který obsahuje všech $\binom{n}{2}$ hran, se nazývá *kompletní* graf (někdy také *klika*) a značí se $K_n$.




Obrázek 1.4.: *Triviální graf $K_1$, kompletní grafy $K_2$, $K_3$, $K_4$ a $K_5$.*

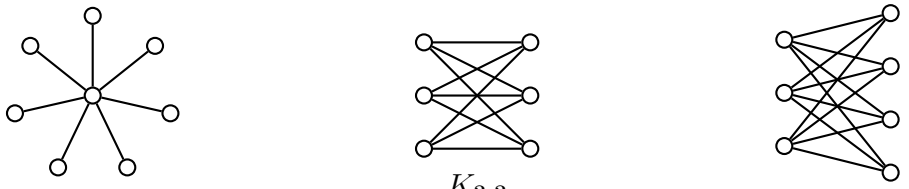
Graf s vrcholovou množinou $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, pro $n$ alespoň 3, a množinou hran $E = \{x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n, x_nx_1\}$ se nazývá *cyklus*. Cykly značíme $C_n$. V některé literatuře se pro cyklus používá pojem *kružnice*, zatímco „cyklus“ se říká orientovaným cyklům (definice orientovaného cyklu je na straně 235). V tomto textu nebudeme cykly a kružnice striktně rozlišovat, rozdíl bude vždy jasný z kontextu.

*Cesta* je graf s množinou vrcholů $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a množinou hran $E = \{x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}$
Cesty značíme $P_n$ (z anglického „path“). Pokud je $V$ jednoprvková množina, tak $E$ neobsahuje žádnou hranu a cesta $P_1$ se nazývá *triviální* cesta. Pozor, v některých učebnicích symbol $P_n$ označuje cestu s $n$ hranami, tedy s $n+1$ vrcholy! V novější literatuře index zpravidla označuje počet vrcholů grafu.




Obrázek 1.5.: *Cykly $C_3$, $C_7$ a cesta $P_4$.*

[9] O jednom typu hypergrafu je psáno na straně 57.




Obrázek 1.6.: *Kompletní bipartitní grafy* $K_{1,7}$, $K_{3,3}$ *a* $K_{3,4}$.

Graf, jehož vrcholová množina je sjednocením dvou neprázdných disjunktních množin $U$, $W$ a množina hran je $E = \{uw : u \in U \wedge w \in W\}$, se nazývá *kompletní bipartitní* graf nebo *biklika* s *partitami* $U$ a $W$. Kompletní bipartitní graf značíme $K_{m,n}$, kde $m = |U|$ a $n = |W|$. Na Obrázku 1.6. jsou příklady kompletních bipartitních grafů.

*Bipartitní graf* je zobecněním kompletního bipartitní grafu. V bipartitním grafu nemusí být všechny hrany mezi partitami $U$ a $W$, ale jen některé: $E \subseteq \{uw : u \in U, w \in W\}$. Triviální graf není bipartitní (proč?). O bipartitních grafech se dozvíme více v podkapitole 6.2.

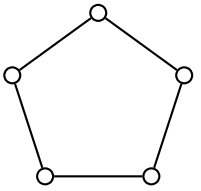
Kompletnímu bipartitnímu grafu $K_{1,n}$ se říká *hvězda*. Další typy grafů (například stromy, kola, mapy) zavedeme v dalších kapitolách, někdy i v rámci cvičení.

**Zadávání grafů**

Graf můžeme zadat třemi způsoby:

- algebraicky – určením množiny vrcholů a množiny hran,
- graficky – zakreslením diagramu,
- popisem vlastností nebo ve speciálních případech jménem grafu.

Například cyklus $C_5$ můžeme zadat algebraicky jako graf $G = (V, E)$, kde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_1v_5\}$ nebo Obrázkem 1.7. Také můžeme cyklus $C_5$ popsat jako graf na pěti vrcholech, ve kterém je každý vrchol incidentní s právě dvěma hranami.



Obrázek 1.7.: *Cyklus* $C_5$.

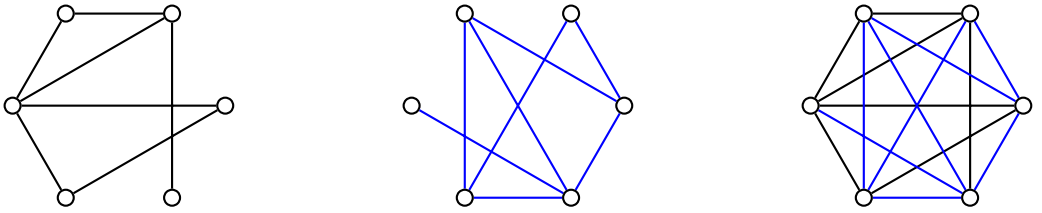
Všechny způsoby obvykle považujeme za ekvivalentní, neměli bychom je však zaměňovat vždy. Grafy s ohromným počtem vrcholů nemá smysl a někdy ani není možné zadat graficky. Pro některý graf může být algebraický popis výrazně jednodušší, než popis jeho vlastností, které by jej jednoznačně určily[10]. Obvykle budeme pracovat s grafem daným (podle definice) množinou vrcholů a množinou hran.

**Doplněk grafu**

Připomeňme, že symbolem $2^X$ značíme potenční množinu množiny $X$ (definice je na straně 6). Dále $\binom{X}{k}$ označuje systém všech $k$-prvkových podmnožin množiny $X$ a zejména $\binom{X}{2}$ je systém všech dvouprvkových podmnožin množiny $X$.

**Definice** *Doplňkem* grafu $G = (V, E)$ rozumíme graf $\overline{G} = (V, \overline{E})$, kde $\overline{E} = \binom{V}{2} \setminus E$.

[10] O jednom případu, kdy se liší různé způsoby zadání grafu, je psáno na straně 59.



Obrázek 1.8.: *Graf $G$, jeho doplněk $\overline{G}$ a graf $(V(G), E(G) \cup E(\overline{G})) = K_6$.*

V literatuře se někdy pro doplněk používá značení $G'$. Z definice plyne, že pro každý graf $G$ je jeho doplněk $\overline{G}$ určen jednoznačně (proč?).

O grafu řekneme, že je *hustý*, jestliže obsahuje mnoho hran, řádově více než vrcholů, přesná hranice se nestanovuje. Pokud zkoumáme vlastnosti hustého grafu, může být jednodušší zkoumat doplněk grafu.

**Otázky:**

- Máme dánu množinu $A$. Jaká je mohutnost množiny $2^A$?
- Najdete nějakou tříprvkovou množinu a deset různých podmnožin?

## Cvičení

*1.1.1.*$^\heartsuit$ *Ukažte, že platí $\overline{\overline{G}} = G$, tj. doplněk doplňku grafu $G$ je právě graf $G$.*

*1.1.2. Může být graf svým vlastním doplňkem? Pokud ano, najděte všechny grafy, které jsou shodné se svým doplňkem.*

*1.1.3.*$^\heartsuit$ *Najděte příklad grafu, který je izomorfní (má stejnou strukturu) se svým doplňkem (izomorfismus je zaveden na straně 102).*

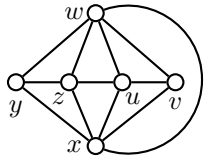
*1.1.4.*$^\heartsuit$ *Najdete příklad grafu na deseti vrcholech, který je izomorfní se svým doplňkem?*

*1.1.5.* Najděte třídu nekonečně mnoha grafů, které jsou izomorfní se svým doplňkem.*

*1.1.6.* Pro které počty vrcholů existuje graf izomorfní se svým doplňkem?*

*1.1.7.*$^\heartsuit$ *Jaká je největší nezávislá množina vrcholů v kompletním bipartitním grafu $K_{m,n}$?*

*1.1.8. V grafu $G$ na Obrázku 1.9. najděte největší nezávislou množinu vrcholů a zdůvodněte, proč je největší.*




Obrázek 1.9.: *Graf $G$.*

*1.1.9.*$^\heartsuit$ *Netriviální graf má $3n - 6$ hran. Kolik hran má jeho doplněk?*

*1.1.10.*$^\heartsuit$ *Pro jaké velikosti partit $m$, $n$ může být současně graf $G$ i jeho doplněk $\overline{G}$ bipartitní?*

*1.1.11.*$^\heartsuit$ *Najděte příklad bipartitního grafu, který je izomorfní (má stejnou strukturu) se svým doplňkem (izomorfismus je zaveden na straně 102).*

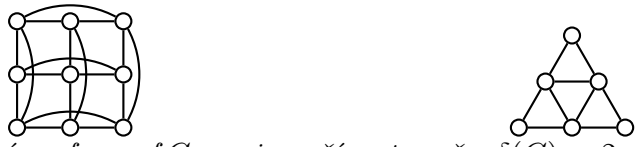
*1.1.12. Mějme bipartitní graf $G = (U \cup W, E)$. Definujte pojem* bipartitní doplněk *bipartitního grafu $G$.*

## 1.2. Stupeň vrcholu

**Definice** *Stupeň vrcholu* $v$ je počet hran, se kterými je vrchol $v$ incidentní, a značí se $\deg(v)$.

Pokud je třeba zdůraznit, ke kterému grafu se stupeň vrcholu $v$ vztahuje, použijeme dolní index $\deg_G(v)$. Vrcholu stupně 0 říkáme *izolovaný* vrchol. Graf, ve kterém jsou všechny vrcholy stejného stupně se nazývá *pravidelný*, nebo také *regulární*. Například graf, ve kterém jsou všechny vrcholy stupně 2, nazýváme 2-pravidelný. *Největší stupeň* v grafu se značí $\Delta(G)$, *nejmenší stupeň* pak $\delta(G)$. Všimněte si, že zatímco $\deg(v)$ je vlastnost vrcholů, tak $\delta(G)$ a $\Delta(G)$ přiřazujeme grafu. Na Obrázku 1.10. je příklad 4-pravidelného grafu a grafu $G$, který má nejmenší stupeň $\delta(G) = 2$ a největší stupeň $\Delta(G) = 4$.

Grafům, které jsou 3-pravidelné, se říká *kubické grafy*. Například Petersenův[11] graf na Obrázku 4.10. je kubický. Další kubické grafy jsou na Obrázcích 1.16. a 10.9.



Obrázek 1.10.: *4-pravidelný graf a graf $G$ s nejmenším stupněm $\delta(G) = 2$ a největším stupněm $\Delta(G) = 4$.*

Symbolem $h(G)$ budeme označovat počet hran grafu $G$ a symbolem $v(G)$ počet vrcholů grafu $G$. V hustém grafu je vysoký průměrný stupeň

$$\frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{v(G)}.$$

**Věta 1.1. Princip sudosti**
*Mějme graf $G$ s vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$, kde $n \geq 1$. Symbolem $h(G)$ označme počet hran grafu $G$. Potom*

$$\sum_{v_i \in V(G)} \deg(v_i) = 2h(G).$$

*Důkaz.* Každá hrana je incidentní s právě dvěma vrcholy a proto přispívá jedničkou ke stupni dvou vrcholů. V součtu na levé straně tak přispěje každá hrana dvojkou a proto je součet roven dvojnásobku počtu hran. □

*Jiný důkaz. Indukcí vzhledem k počtu vrcholů*
*Základ indukce:* Pro triviální graf $K_1$ s jediným vrcholem tvrzení jistě platí

$$\sum_{v_i \in V(K_1)} \deg(v_i) = 0 = 2 \cdot 0 = h(K_1).$$

*Indukční krok:* Předpokládáme, že tvrzení platí pro všechny grafy s nejvýše $n$ vrcholy, kde $n \geq 1$. Ukážeme, že potom tvrzení platí i pro libovolný graf s $n+1$ vrcholy. Mějme libovolný graf $G = (V, E)$ s $n+1$ vrcholy. Vyberme libovolný vrchol $x$ v $G$ (takový vrchol v $G$ jistě existuje, proč?). Označme $G - x$ graf, který vznikne z grafu $G$ odebráním vrcholu $x$ a všech $\deg_G(x)$ hran s vrcholem $x$ incidentních, tj. $G - x = (V \setminus \{x\}, E \setminus \{xy : y \in V \wedge xy \in E\})$. Graf $G - x$ splňuje indukční předpoklad, proto $\sum_{v_i \in V(G-x)} \deg_{G-x}(v_i) = 2h(G - x)$.

Nyní využijeme vztah $\deg_G v = \deg_{G-x}(v) + 1$ pro $v \neq x$ a vypočítáme

$$\sum_{v_i \in V(G)} \deg_G(v_i) = \deg_G(x) + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\deg_G(x)} + \sum_{v_i \in V(G-x)} \deg_{G-x}(v_i) =$$
$$= 2\deg_G(x) + 2h(G - x) = 2\left(\deg_G(x) + h(G - x)\right) = 2h(G).$$

To je dokazované tvrzení a podle principu matematické indukce je důkaz hotov. □

[11] O dánském matematikovi Petersenovi je psáno na straně 62.

Třetí způsob, důkaz indukcí vzhledem k počtu hran je ponechán jako Cvičení 1.2.1.

**Příklad 1.1.** Kolik hran má 4-pravidelný graf na Obrázku 1.10. vlevo?
Při řešení využijeme princip sudosti. Graf na Obrázku 1.10. vlevo má devět vrcholů stupně 4, proto součet stupňů vrcholů je $9 \cdot 4 = 36$, což je dvojnásobek počtu hran. Graf má 18 hran. ✓

Tvrzení Věty 1.1. je poměrně jednoduché, přesto má celou řadu důsledků, jak je vidět i podle předchozího příkladu. Následuje tvrzení, které říká, že grafy s lichým počtem vrcholů lichého stupně nemohou existovat.

**Důsledek 1.2.** *Počet vrcholů lichého stupně v libovolném grafu je sudý.*

*Důkaz.* Tvrzení dokážeme sporem. Nechť platí předpoklad věty a neplatí tvrzení, tj. „mějme takový graf $G$, že počet vrcholů lichého stupně v $G$ *je lichý*“. Užitím principu sudosti dojdeme ke sporu. Je-li počet vrcholů lichého stupně lichý, tak součet stupňů všech vrcholů je také lichý (proč?) Avšak podle Věty 1.1. je součet stupňů všech vrcholů roven dvojnásobku počtu hran, a je tedy sudý. Dostáváme spor a tvrzení je dokázáno. □

*Jiný důkaz.* Tvrzení dokážeme nepřímo. Místo implikace „mějme libovolný graf $G$, potom počet vrcholů lichého stupně v $G$ je sudý“ budeme dokazovat implikaci „máme-li v $G$ lichý počet vrcholů lichého stupně, potom $G$ není graf“.

Víme, že je-li počet vrcholů lichého stupně lichý, tak součet $S$ stupňů všech vrcholů je také lichý. Podle Věty 1.1. je roven dvojnásobku počtu hran $S = 2h(G)$. Odtud vidíme, že $h(G) = S/2$ není celé číslo, protože $S$ je liché. V grafu je jistě počet hran celočíselný, proto $G$ není graf. □

Mějme na paměti, že graf je množina vrcholů a množina hran, které splňují další vlastnosti. Pokud vezmeme například množiny

$$V = \{x, y, z\}, \quad E = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{v, y\}\},$$

tak snadno ověříme, že všechny tři prvky („vrcholy“) $x$, $y$, $z$ patří do jedné nebo tří dvouprvkových podmnožin („hran“) v systému množin $E$. Vypadá to, že všechny tři vrcholy jsou stupně 1 nebo 3. Vysvětlete, v čem je chyba.

**Příklad 1.2. Vánoční dárky (podruhé)**
Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal.
Problém popíšeme grafem, ve kterém vrcholy odpovídají kamarádům a hranou spojíme ty dva kamarády, kteří si vymění navzájem dárky. Pokud by existovala situace, kdy si každý jen vymění dárky se třemi kamarády, tak odpovídající graf by byl kubický graf na devíti vrcholech. Takový graf však podle Důsledku 1.2. neexistuje! ✓

**Posloupnost stupňů vrcholů**
Někdy je výhodné pracovat nejen s hranami, které jsou incidentní s daným vrcholem $v$ (resp. s jejich počtem $\deg(v)$), ale také s vrcholy, které jsou s daným vrcholem sousední.

**Definice** Mějme graf $G$. *Okolí vrcholu* $v$ je množina všech vrcholů sousedních s vrcholem $v$. Značíme ji $N_G(v) = \{u \in V : \exists uv \in E(G)\}$.

Okolí vrcholu je množina vrcholů, které jsou sousední s daným vrcholem $v$. Značíme ji $N(v)$ a pokud budeme chtít zdůraznit, že se jedná o okolí vrcholu $v$ v grafu $G$, použijeme dolní index: $N_G(v)$. Všimněte si, že v jednoduchém grafu $G$ pro každý vrchol $v \in V(G)$ platí $|N(v)| = \deg(v)$.

**Definice Grafová posloupnost**
Máme dán graf $G$ s vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Posloupnost $(\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n))$ nazýváme *stupňovou posloupností* grafu $G$, případně *skóre* grafu $G$. Nerostoucí posloupnost $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ se nazývá *grafová*, je-li stupňovou posloupností nějakého grafu.

Ke každému grafu jistě najdeme stupňovou posloupnost, ale není těžké si uvědomit, že ne každá nerostoucí posloupnost nezáporných celých čísel je grafová. Jistě musí být největší číslo v posloupnosti menší, než počet prvků posloupnosti. Dále například podle Důsledku 1.2. víme, že posloupnost,

která obsahuje lichý počet lichých čísel, nemůže být grafová. Dokonce ani posloupnost, která obsahuje sudý počet lichých nezáporných čísel nemusí být grafová (proč?). Například posloupnosti $(2,0,0)$ nebo $(2,2,0)$ jistě nejsou stupňovou posloupností žádného grafu (proč?). Následující věta dává poměrně jednoduchý návod jak poznat, zda nějaká posloupnost je nebo není grafová.

**Věta 1.3. Havel–Hakimi**
*Nechť $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ je nerostoucí posloupnost a nechť $D'$ vznikne přeuspořádáním posloupnosti $(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ na nerostoucí posloupnost. Potom platí, že $D$ je grafová posloupnost netriviálního grafu právě tehdy, když $D'$ je grafová posloupnost.*

Jinými slovy $D'$ vznikne z nerostoucí posloupnosti $D$ tak, že vynecháme první člen $d_1$ a právě $d_1$ následujících prvků (pokud existují) zmenšíme o jedničku. Nakonec její prvky přeuspořádáme tak, abychom dostali nerostoucí posloupnost.

*Důkaz.* Jedná se o důkaz ekvivalence, proto musíme dokázat obě implikace.

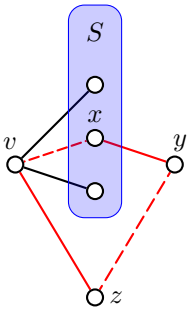
„⇒“ Mějme netriviální graf $G$ se stupňovou posloupností $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Odebereme-li z grafu $G$ vrchol stupně $d_1$ (a všechny hrany s ním incidentní), tak dostaneme menší graf, jehož stupňová posloupnost nemusí být posloupnost $D'$, protože vrchol stupně $d_1$ nemusí být sousední právě s vrcholy stupňů $d_2, d_3, \ldots, d_{d_1+1}$. Ukážeme však, že z daného grafu $G$ můžeme sestrojit takový graf $G'$ se (stejnou) stupňovou posloupností $D$, že odstraněním vrcholu stupně $d_1$ (a všech hran s ním incidentních) z grafu $G'$ dostaneme menší graf $H'$ se stupňovou posloupností $D'$. Označme $v$ vrchol stupně $d_1 = \Delta(G)$. Označme $S$ množinu těch $d_1$ vrcholů grafu $G$, které jsou stupňů $d_2, d_3, \ldots, d_{d_1+1}$ (Obrázek 1.11.).

Je-li $N_G(v) = S$, je důkaz hotov, protože graf, který dostaneme z $G$ tak, že odebereme vrchol $v$ a všechny hrany s ním incidentní (označíme jej $G - v$), je graf se stupňovou posloupností $D'$.

Je-li $N_G(v) \neq S$, tak ukážeme, jak sestavit graf $G_1$ se stupňovou posloupností $D$ (stejnou jako má graf $G$), pro který platí

$$|N_{G_1}(v) \cap S| = |N_G(v) \cap S| + 1.$$

Nechť tedy $N_G(v) \neq S$, tj. existuje takový vrchol $x \in S$, že $vx \notin E(G)$. Protože $|N_G(v)| = |S|$ musí současně existovat takový vrchol $z \in (N_G(v) \setminus S)$, že $vz \in E(G)$, viz Obrázek 1.11.




Obrázek 1.11.: *Záměna dvou hran grafu $G$ v důkazu Věty Havla–Hakimiho.*

Nyní si uvědomíme, že v množině $S$ jsou vrcholy nejvyšších stupňů v grafu $G$ (s výjimkou vrcholu $v$) a proto $\deg_G(x) \geq \deg_G(z) \geq 1$. Navíc jeden ze sousedů vrcholu $z$ je vrchol $v$, avšak $v$ není sousední s $x$. Protože $\deg_{G-v}(x) > \deg_{G-v}(z)$, tak jistě někde v grafu $G - v$ (a také v grafu $G$) existuje takový vrchol $y$ ($y$ je různý od $v$, $x$, $z$), který je sousední s vrcholem $x$ a není sousední s vrcholem $z$. Nyní z grafu $G$ odstraníme hrany $vz$, $xy$ a přidáme hrany $vx$ a $zy$. Dostaneme graf $G_1$, pro který platí $|N_{G_1}(v) \cap S| = |N_G(v) \cap S| + 1$. Grafy $G$ a $G_1$ mají stejnou stupňovou posloupnost. Postup můžeme analogicky zopakovat vícekrát a dostat takový graf $G_2$, že $|N_{G_2}(v) \cap S| = |N_G(v) \cap S| + 2$ a nejpozději po $\deg(v) = d_1$ krocích dostaneme graf $G'$ se stejnou stupňovou posloupností $D$ jako má graf $G$, pro který však platí $N(G') = S$. Pro graf $G'$ nyní jistě platí, že $G' - v = H'$, kde $H'$ je graf se stupňovou posloupností $D'$. Tím je důkaz první implikace dokončen.

„⇐“ Důkaz této implikace je jednodušší. Jestliže posloupnost $D'$ je grafová, tak existuje jednoduchý graf $G'$ se stupňovou posloupností $D' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$. Do grafu $G'$ přidáme vrchol $v$ stupně $d_1$ a spojíme jej hranami s vrcholy stupňů $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1$. Získáme tak netriviální nadgraf $G$

grafu $G'$, který má stupňovou posloupnost $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, tj. $D$ je grafová posloupnost, což je dokazované tvrzení. □

Postup uvedený v důkazu Věty 1.3. dává rekurzívní algoritmus pro ověření, zda daná posloupnost je grafová. Opakovaným použitím Věty 1.3. dostaneme po konečném počtu kroků odpověď. Výpočet můžeme použít i pro konstrukci grafu s danou stupňovou posloupností (Cvičení 1.2.5.). Je nutné si uvědomit, že ne každý graf s danou stupňovou posloupností můžeme zkonstruovat způsobem, který je popsán v důkazu Věty 1.3. u implikace „⇐“ (Cvičení 1.2.19.).

**Otázky:**

- Kde se v důkazu Věty 1.3. použil předpoklad, že graf se stupňovou posloupností je netriviální?
- Jaký je nejmenší graf, který nelze ze zadané posloupnosti zkonstruovat způsobem popsáným v důkazu Věty 1.3.?

**Příklad 1.3. „Handshaking problem“ (podruhé)**
Máme skupinu $n$ lidí ($n \geq 2$) z nichž někteří si podali ruce. Ukažte, že ve skupině jsou alespoň dva lidé, kteří podali ruku stejnému počtu lidí ve skupině.
Sestavíme graf, kde vrcholy budou odpovídat lidem a hranou spojíme každou dvojici, která si podala ruce. Je zřejmé, že relace „podat si ruce“ je symetrická a ireflexivní, proto graf bude jednoduchý (neorientovaný a bez smyček). Pro důkaz můžeme použít také Větu Havla–Hakimiho. Každý z $n$ lidí mohl podat ruku nejvýše $n-1$ krát a nejméně 0 krát. Pokračujme sporem. Pokud by bylo možné, aby si každý podal ruku s jiným počtem lidí, tak by odpovídající graf měl stupňovou posloupnost $D = (n-1, n-2, \ldots, 0)$. Po jediné úpravě užitím Věty 1.3. dostaneme posloupnost $D' = (n-3, n-4, \ldots, 0, -1)$, která jistě není grafová (proč?). Dostáváme spor a proto alespoň dva lidé musí podat ruku stejnému počtu lidí ve skupině. ✓

## Cvičení

*1.2.1. Dokažte Větu 1.1. indukcí vzhledem k počtu hran.*

*1.2.2.♡ Kolik existuje 0-pravidelných grafů? Kolik z nich je souvislých (souvislost je zavedena na straně*

*1.2.3. Označme $v(G)$ počet vrcholů grafu $G$. Ukažte, že v každém grafu platí $\delta(G) \leq 2h(G)/v(G) \leq \Delta(G)$.*

*1.2.4. Ve firmě pracuje kromě ředitele i několik zaměstnanců. Mužů je mezi zaměstnanci o tři více než žen. Během doby se zaměstnanci mnohokrát stěhovali a sdíleli kanceláře. Víme, že jedenáct zaměstnanců již během doby sdílelo kancelář s dvěma kolegy, tři se čtyřmi kolegy a ostatní sdíleli kancelář s jedním, třemi nebo pěti kolegy (nevíme kolik jich je, jen víme, že takoví zaměstnanci ve firmě jsou). Ředitel má nyní kancelář sám pro sebe. Bylo tomu tak vždy?*

*1.2.5. Najděte algoritmus pro konstrukci grafu s danou stupňovou posloupností $D$. Využijte Větu Havla–Hakimiho.*

*1.2.6. Nechť $G$ je $k$-pravidelný graf, kde $k$ je liché číslo. Dokažte, že počet hran grafu $G$, $h(G)$, je násobkem čísla $k$. Platí to i v případě, že $k$ je sudé? Co musí být splněno?*

*1.2.7. Nechť graf $G$ má $n$ vrcholů a $n-1$ hran. Ukažte, že $G$ má vrchol stupně 1 nebo izolovaný vrchol.*

*1.2.8. Ukažte, že neexistují jednoduché grafy se stupňovými posloupnostmi $(3,3,3,1)$ a $(3,3,3,1,1)$. Dokažte i bez použití věty Havla–Hakimiho.*

*1.2.9. Najděte* všechny *různé grafy se stupňovými posloupnostmi $(3,3,3,1,1,1)$ a $(3,3,2,2,1,1)$, přičemž nerozlišujeme pojmenování vrcholů.*

*1.2.10. Je možno Větu 1.1. zobecnit i pro jiné než jednoduché grafy? Pokud ano, pro které? Zobecněnou větu dokažte.*

*1.2.11. Existuje některý z grafů ze Cvičení 1.2.8., pokud se neomezíme na jednoduché grafy?*

*1.2.12. Kolik existuje 2-pravidelných grafů na patnácti vrcholech? Kolik z nich je souvislých?*

*1.2.13.♡ Kolik existuje 3-pravidelných grafů na šesti vrcholech?*

*1.2.14.♡ Kolik existuje různých 8-pravidelných grafů na deseti vrcholech?*

*1.2.15. Máme 25 mobilních stanic a každá může komunikovat s ostatními na 60 různých (společných) frekvencích, přičemž dvě různé dvojice stanic nemohou komunikovat současně na jedné frekvenci. Označme $f(G)$ nejmenší počet spojení, který udržuje nějaká stanice v síti. Navrhněte takovou síť, aby hodnota $f(G)$ byla co největší a ukažte, že síť s větší hodnotou $f(G)$ nemůže existovat.*

*1.2.16.♡ Pro jaká $n$ existuje graf s $n$ vrcholy, který má vrcholy $n-1$ různých stupňů? (Tj. pro která $n$ existuje graf, který má všechny vrcholy až na dva různého stupně.)*

*1.2.17. Kolik nejvýše různých stupňů mohou mít vrcholy grafu s $n$ vrcholy?*

*1.2.18. Najděte příklad grafu s nerostoucí stupňovou posloupností $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, ze kterého odebráním libovolného vrcholu stupně $d_1$ nevznikne graf se stupňovou posloupností $D' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ sestavenou podle Věty 1.3.*

*1.2.19. Najděte příklad grafu, který není možno sestavit postupem popsaným v důkazu druhé implikace Věty Havla–Hakimiho (Věty 1.3.).*

## 1.3. Podgrafy

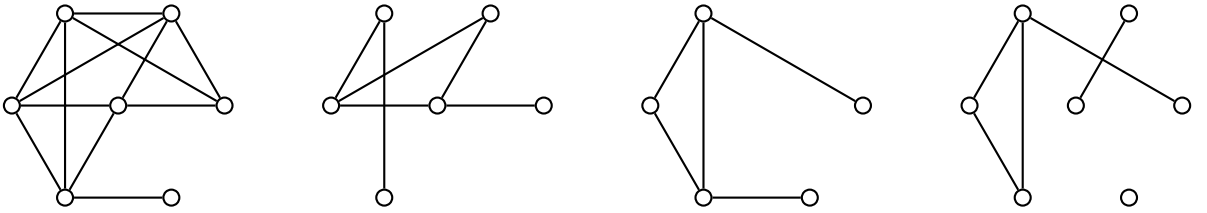
V předchozí podkapitole jsme v důkazu Věty 1.3. pracovali s grafem $G$ a s grafem, který vznikl odstraněním některé hrany grafu $G$. Pracovali jsme s objektem, který bychom intuitivně nazvali „podgrafem“ grafu $G$. Nyní si pojem podgrafu korektně nadefinujeme.

**Definice** Mějme dán graf $G = (V, E)$. Řekneme, že graf $H = (V', E')$ je *podgrafem* grafu $G$, jestliže $V' \subseteq V$ a současně $E' \subseteq E$.

Všimněte si, že definice je korektní. Ne každá dvojice podmnožin $V'$, $E'$ tvoří podgraf grafu $G$. Je-li například $V'$ jednoprvková a $E'$ neprázdná, tak množina $E'$ nemůže být systémem dvouprvkových podmnožin $V'$, protože s každou hranou, musí v grafu ležet oba její koncové vrcholy. V definici podgrafu proto požadujeme, aby $H$ byl graf.

Definice připouští i takový extrémní případ, kdy $V' = V$ a $E' = E$, neboli každý graf je svým podgrafem. Jestliže alespoň jedna z rovností není splněna (tj. alespoň jedna z množin $V'$, resp. $E'$ je vlastní podmnožinou $V$, resp. $E$), říkáme, že $H$ je *vlastním* podgrafem grafu $G$. V opačném případě říkáme, že graf $H$ je *nevlastní* podgraf. Pro graf, který vznikne z grafu $G$ vynecháním jedné hrany $uv$, zavedeme označení $G - uv$. Podobně graf, který vznikne z grafu $G$ vynecháním jednoho vrcholu $v$ a všech hran incidentních s tímto vrcholem, budeme značit $G - v$. Je-li $N$ nějaká podmnožina vrcholů grafu $G$, tak symbolem $G - N$ značíme graf, který vznikne z $G$ odebráním všech vrcholů v $N$ a všech hran incidentních s těmito vrcholy. Podobně, je-li $M$ nějaká podmnožina hran grafu $G$, tak symbolem $G - M$ značíme graf, který vznikne z $G$ odebráním všech hran v $M$.

Dalším důležitým speciálním případem je podgraf, který obsahuje všechny vrcholy původního grafu (tj. $V' = V$). Takovému podgrafu říkáme *faktor*. Posledním speciálním případem podgrafu je *indukovaný podgraf*, který obsahuje všechny hrany původního grafu $G$, které jsou incidentní s vrcholy v množině $V'$. Ekvivalentně můžeme říci, že indukovaný podgraf $H$ vznikne z grafu $G$ případným vynecháním některých vrcholů a vynecháním pouze všech takových hran, které byly incidentní s některým vynechaným vrcholem. Třetí způsob, jak popsat indukovaný podgraf, je říci, že se jedná o takový podgraf $H$ grafu $G$, který má ze všech podgrafů s vrcholovou množinou $V(H)$ největší počet hran.



Obrázek 1.12.: *Graf $G$ a jeho podgraf $H$, indukovaný podgraf $I$ a faktor $F$.*

Jestliže o grafu $H$ říkáme, že je podgrafem grafu $G$, tak naopak graf $G$ se nazývá *nadgraf* nebo také *supergraf* grafu $H$. Říkáme, že každý graf $H$ je *obsažen* v každém svém nadgrafu $G$ a naopak každý graf $G$ *obsahuje* všechny své podgrafy $H$.

**Otázky:**

- Existuje takový graf $G$ a takový jeho podgraf $H$, že $H$ není faktorem grafu $G$, ani indukovaným podgrafem grafu $G$?
- Může být graf $H$ současně podgrafem i nadgrafem nějakého grafu $G$?
- Může být graf $H$ současně vlastním podgrafem grafu $G$ i nadgrafem grafu $G$?

Na straně 46 jsme zavedli cestu. Cestou $G$ *v grafu* rozumíme takový podgraf grafu $G$, který je cestou. Zcela analogicky zavedeme cyklus v grafu, kliku v grafu i další podgrafy.

## Cvičení

*1.3.1. Dokažte, že pro každý graf $G$ existuje takový jeho nadgraf $N$, že $N$ je pravidelný stupně $\Delta(G)$ a $G$ je indukovaný podgraf grafu $N$.*

*1.3.2. Může být indukovaný faktor $F$ grafu $G$ vlastním podgrafem grafu $G$? Pokud ano, najděte příklad, pokud ne, dokažte.*

*1.3.3. Předpokládejme, že rozlišujeme jednotlivé vrcholy grafu $G$ (například označením). Kolik různých faktorů má graf $G$?*

*1.3.4. Předpokládejme, že rozlišujeme jednotlivé vrcholy grafu $G$ (například označením). Kolik různých podgrafů má kompletní graf $K_n$?*

*1.3.5. Předpokládejme, že rozlišujeme jednotlivé vrcholy grafu $G$ (například označením). Kolik existuje různých grafů bez izolovaných vrcholů s vrcholovou množinou $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$?*

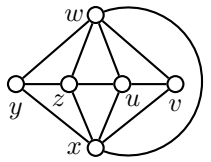
*1.3.6. Máme graf $G$, který neobsahuje vrchol stupně 0 ani žádný indukovaný podgraf s právě dvěma hranami. Ukažte, že $G$ je kompletní graf.*

*1.3.7. Najděte chybu v následujícím důkazu:*
*Ukážeme, že každý bipartitní graf $G = (U \cup W, E)$ je podgrafem nějakého $\Delta(G)$-pravidelného bipartitního grafu. Pokud nejsou partity $U$ a $W$ stejné velikosti, přidáme do menší partity tolik vrcholů, aby byly obě partity stejné velikosti. Jsou-li všechny vrcholy stejného stupně, důkaz končí. Jinak najdeme ke každému vrcholu $u \in U$ stupně menšího než $\Delta(G)$ vrchol $w \in W$ stupně menšího než $\Delta(G)$, protože součet stupňů vrcholů v každé partitě je stejný. Nyní stačí spojit $u$ a $w$ hranou a zvýšíme tak stupeň vrcholů $u$ a $w$. Je-li výsledný graf pravidelný, důkaz končí, jinak přidáváme hrany dokud výsledný nadgraf nebude pravidelný.*

*1.3.8. Kolik existuje indukovaných podgrafů s $k$ vrcholy v kompletním grafu $K_n$? Předpokládejme, že vrcholy kompletního grafu rozlišujeme (například označením).*

*1.3.9. Dokažte, že každý graf $G$ obsahuje takový neprázdný podgraf $H$, že $\delta(H) \geq d(G)/2$, kde $d(G)$ je průměrný stupeň grafu $G$.*

*1.3.10. Najděte všechny grafy, pro které platí, že neobsahují vrchol stupně 0 ani žádný indukovaný podgraf s právě třemi hranami.*




Obrázek 1.13.: *Graf $G$.*

*1.3.11.*♡ *Určete největší kliku v grafu na Obrázku 1.13.*

*1.3.12. Mějme souvislý graf $G$, který neobsahuje indukovaný cyklus $C_3$ ani indukovanou cestu $P_4$. Ukažte, že $G$ je kompletní bipartitní graf.*

*1.3.13. Ukažte, že v každé skupině šesti lidí se někteří tři lidé navzájem znají nebo někteří tři lidé se navzájem neznají.*

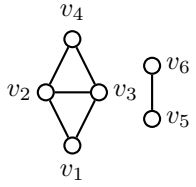
*1.3.14. Kolik různých podgrafů $C_6$ existuje v kompletním bipartitním grafu $Km, n$?*

## 1.4. Implementace grafů v počítači

Řešíme-li jednoduché úlohy pro malé grafy, nejnázornější je obvykle nakreslit diagram příslušného grafu a úlohu vyřešit ručně. Avšak už pro graf s více než dvaceti vrcholy může být diagram hustého grafu značně nepřehledný. Pokud uvažujeme o implementaci v počítači, je nutné zvolit vhodný formát pro uložení grafu. Přitom musíme uvážit jednak jak bude konkrétní graf do počítače vkládán a jednak jaké operace se budou při řešení úlohy používat. Existuje několik základních struktur, které se používají pro implementace grafů.

**Incidenční matice**

Mějme dán graf $G$. *Incidenční matice* $B(G)$ je obdélníková matice s $v(G)$ řádky a $h(G)$ sloupci. Vrcholy grafu $G$ označíme $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a hrany $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Každému vrcholu grafu $G$ odpovídá jeden řádek matice $B$ a každé hraně grafu $G$ jeden sloupec matice $B$. Prvek $b_{ij}$ matice $B$ nabývá hodnoty 1 právě tehdy, když vrchol $v_i$ je incidentní s hranou $e_j$. V opačném případě je $b_{ij} = 0$. Je snadné si uvědomit, že pro jednoduché grafy dává součet čísel v každém sloupci incidenční matice vždy 2 a součet čísel v $i$-tém řádku dává stupeň vrcholu $v_i$. Incidenční matice je proto velmi rozsáhlá a řídká. Obsahuje jen $2m$ jedniček z celkového počtu $mn$ prvků. Příklad grafu $G$ a jeho incidenční matice je na Obrázku 1.14.




$$B(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1v_2 & v_1v_3 & v_2v_3 & v_2v_4 & v_3v_4 & v_5v_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Obrázek 1.14.: *Graf $G$ a jeho incidenční matice.*

**Matice sousednosti**

Úspornější využití paměti pro husté grafy získáme uložením grafu v *matici sousednosti*. Vrcholy grafu $G$ opět označíme $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Matice sousednosti $A(G)$ je čtvercová matice řádu $n$, ve které je prvek $a_{ij} = 1$ právě tehdy, když jsou vrcholy $v_i$ a $v_j$ sousední. V opačném případě je $a_{ij} = 0$.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li } v_iv_j \in E(G) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Je zřejmé, že matice $A(G)$ je pro jednoduché grafy symetrická a že součet čísel v $i$-tém řádku (v $i$-tém sloupci) matice $A(G)$ je roven stupni vrcholu $v_i$. Matice sousednosti grafu $G$ z Obrázku 1.14. je

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Seznam sousedů**

Graf můžeme reprezentovat i pomocí seznamů sousedních vrcholů. Pro každý vrchol $v_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, grafu $G$ vytvoříme seznam (pole) vrcholů, například `a`$_i$`[]`, které jsou s vrcholem $v_i$ sousední. Každé pole bude mít $\deg(v_i)$ položek. Je vhodné vytvořit pomocné pole (například `deg[]`), jehož $i$-tá položka bude obsahovat stupeň vrcholu $v_i$. Prvky `a`$_i$`[1], a`$_i$`[2], ..., a`$_i$`[deg[`$i$`]]` obsahují vrcholy (nebo jejich indexy) sousední s vrcholem $v_i$. Seznam stupňů vrcholů a seznamy sousedů vrcholů grafu $G$ z Obrázku 1.14. jsou

`deg[] = [2, 3, 3, 2, 1, 1]`,

$$\begin{array}{lcl} \texttt{a}_1\texttt{[]} & = & [v_2, v_3], \\ \texttt{a}_2\texttt{[]} & = & [v_1, v_3, v_4] \\ \texttt{a}_3\texttt{[]} & = & [v_1, v_2, v_4], \\ \texttt{a}_4\texttt{[]} & = & [v_2, v_3], \\ \texttt{a}_5\texttt{[]} & = & [v_6], \\ \texttt{a}_6\texttt{[]} & = & [v_5]. \end{array}$$

Všimněte si, že má-li graf $h$ hran, budou seznamy polí obsahovat celkem $2h$ položek, neboť každá hrana $v_iv_j$ je v seznamech uložena dvakrát. Jednou jako vrchol $v_j$ v poli `a`$_i$`[]` a podruhé jako vrchol $v_i$ v poli `a`$_j$`[]`.

Jestliže implementujeme algoritmus, který bude zpracovávat obecný řídký graf, tak pro seznamy sousedů může být vhodnější použít místo polí dynamické linkované seznamy. Výhodou je, že strukturu grafu můžeme v průběhu algoritmu snadno modifikovat. Položky seznamu můžeme vyřadit nebo do seznamu zařadit nové. Nevýhodou je časová náročnost vyhledání konkrétní hrany. Naproti tomu použijeme-li pole, můžeme (už při vytvoření) seřadit seznamy sousedů podle pevně zvoleného klíče a pro vyhledání použít binární dělení. Nevýhodou polí je náročná úprava takové struktury v průběhu algoritmu.

**Ohodnocené grafy**

Pokud pracujeme s grafem, který je *ohodnocený* (tj. hranám nebo vrcholům jsou přiřazena nenulová čísla), je možné modifikovat matici sousednosti. Místo jedniček položíme každý prvek $a_{ij}$ rovno ohodnocení hrany $v_iv_j$. Nenulová ohodnocení vrcholu $v_i$ můžeme uložit na hlavní diagonálu v prvku $a_{ii}$. Stupeň vrcholu $v_i$ je pak počet nenulových prvků v řádku (sloupci) s výjimkou prvku $a_{ii}$ matice sousednosti. Jestliže nula je přípustná hodnota pro ohodnocení vrcholů nebo hran, tak buď použijeme druhou pomocnou matici, ve které budou na odpovídajících pozicích uloženo ohodnocení, nebo zvolíme jinou „zakázanou“ číselnou hodnotu, kterou použijeme v matici tam, kde hrana není nebo chybí ohodnocení vrcholu.

Podobně ohodnocení hran můžeme do incidenční matice uložit do nového (přidaného) řádku. Jestliže jsou ohodnocené vrcholy grafu, můžeme přidat další sloupec do incidenční matice. Pokud jsou hrany nebo vrcholy ohodnoceny více funkcemi, můžeme přidat více řádků nebo sloupců.

V případě komplikovanějších ohodnocení už nevystačíme s jednoduchou strukturou, můžeme využít složitější datové struktury. Každý vrchol nebo hrana může být strukturovaný datový typ, jehož položky mohou sloužit k implementaci sousednosti, incidence i ohodnocení. Množina vrcholů může být uložena jako linkovaný seznam vrcholů, množina hran jako linkovaný seznam hran. Vazby

mezi oběma strukturami vybereme v závislosti na konkrétní úloze tak, aby vyhledávání nebo jiné často používané operace v grafu byly co nejefektivnější.

### Cvičení

*1.4.1. Definujte incidenční matici a matici sousednosti multigrafu se smyčkami. Čemu se rovná součet $i$-tého řádku a čemu součet $j$-tého sloupce v incidenční matici a čemu v matici sousednosti?*

*1.4.2. Může mít incidenční matice jednoduchého grafu dva shodné řádky nebo sloupce? Jak je tomu u multigrafu?*

*1.4.3. Najděte takový netriviální souvislý graf s $n$ vrcholy, že každá mocnina matice sousednosti bude mít nějaké nulové prvky.*

## 1.5. Doplňková témata

Následuje pár poznámek, které souvisí s probíranou látkou volněji. Ukážeme několik zajímavých souvislostí a upozorníme na jeden známý otevřený problém teorie grafů – poslední chybějící Mooreovský graf.

### Grafy a designy

Na straně 46 jsme zmínili pojem hypergrafu. Hypergrafy jsou na pomezí teorie grafů a teorie designů. Následující definice designu je jinak řečená definice jistého typu hypergrafu. Designy se využívají například při plánování statistických experimentů.

#### Pojem kombinatorického designu

**Definice Kombinatorický design**
Mějme dánu konečnou množinu $V$, jejímž prvkům se říká body. Dále mějme přirozená čísla $k, r, \lambda \geq 1$. Označme $B$ takový systém $k$-prvkových podmnožin množiny $V$, kterým se říká *bloky*, že každý prvek $x \in V$ se vyskytuje právě v $r$ („repetition“) blocích a každá dvojice prvků $x, y \in V$ se vyskytuje právě v $\lambda$ blocích. Označme $|V| = v$ a $|B| = b$. Pětice $(v, b, k, r, \lambda)$ se nazývá $(v, b, k, r, \lambda)$-design, nebo jen *design*.

Důležitým případem designu je tzv. steinerovský systém trojic $(v, b, 3, r, 1)$-design.

Pro libovolný design platí (Cvičení 1.5.1.), že

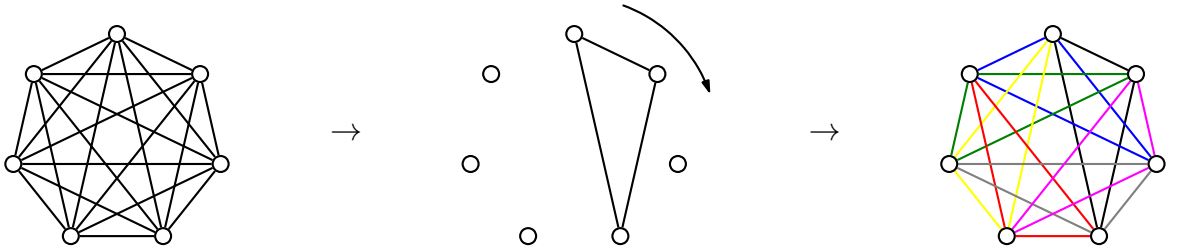
$$bk = vr, \quad \lambda(v-1) = r(k-1).$$

Platí také, že steinerovský systém trojic existuje, právě když $v \equiv 1, 3 \pmod 6$ (Cvičení 1.5.2.).

**Otázky:**

- Je každý jednoduchý graf speciálním případem designu?
- Jak souvisí design s grafem? Tj. pro jaké hodnoty $v$, $b$, $k$, $r$ a $\lambda$ je nějaký graf speciálním případem designu?

Najdeme-li steinerovský systém trojic pro nějaké $v$, tak umíme rozložit kompletní graf $K_v$ na trojúhelníky (Obrázek 1.15.), přičemž *rozkladem grafu* $G = (V, E)$ rozumíme takový systém jeho podgrafů, jejichž hranové množiny tvoří rozklad množiny $E$ a sjednocení vrcholových množin je $V$. Platí i opačná implikace: umíme-li rozložit kompletní graf $K_v$ na trojúhelníky, tak snadno sestavíme



Obrázek 1.15.: *Rozklad $K_7$ na trojúhelníky.*

steinerovský systém trojic pro $v$ bodů. Rozkladem rozumíme množinu hranově disjunktních podgrafů $G_1, G_2, \ldots, G_b$, jejichž hranové množiny $E(G_1), E(G_2), \ldots, E(G_b)$ tvoří rozklad množiny $E$. O rozkladech grafů je psáno v podkapitole 7.3.

**Kirkmanův problém patnácti školaček**

Kirkmanova úloha patnácti školaček je kombinatorická úloha, kterou Thomas P. Kirkman[12] publikoval v roce 1850 v časopise *The Lady's and Gentleman's Diary*. Problém můžeme zformulovat takto: „Může každý den paní vychovatelka sestavit 15 školaček do pěti řad po třech tak, aby se během sedmi dnů nesetkaly žádné dvě dívky v určité trojici více než jednou?“ Jedná se o hledání steinerovského systému trojic s dalšími požadavky. Mezi patnácti školačkami můžeme vybrat celkem $\binom{15}{3} = 455$ trojic. V hledaném rozvrhu je vybráno 35 trojic tak, že každý den odpovídá jedné pětici trojic, které jsou po dvou disjunktní.

Každé řešení Kirkmanovy úlohy je současně navíc steinerovským systémem trojic, protože kompletní graf na patnácti vrcholech rozložíme právě na $\binom{15}{2}/3 = 105/3 = 35$ trojúhelníků, které jsou po dvou disjunktní. Opačné tvrzení však obecně není pravda. Ne každý steinerovský systém trojic na patnácti vrcholech můžeme seskupit (35 trojic rozdělit do sedmi skupin po pěti) tak, aby odpovídaly řešení Kirkmanova problému.

Kirkmanův problém je možné zobecnit pro libovolný počet $n \equiv 3 \pmod 6$ školaček [LR].

**Odkazy:**

- http://ai.uwaterloo.ca/~vanbeek/Constraints/Papers/BarnierB05.pdf
- http://en.wikipedia.org/wiki/Kirkman's_schoolgirl_problem
- http://mathworld.wolfram.com/KirkmansSchoolgirlProblem.html

## Cvičení

*1.5.1. Ukažte, že v obecném designu musí platit $bk = vr$ a $\lambda(v-1) = r(k-1)$.*

*1.5.2. Ukažte, že steinerovský systém trojic může existovat pouze když $v \equiv 1, 3 \pmod 6$.*

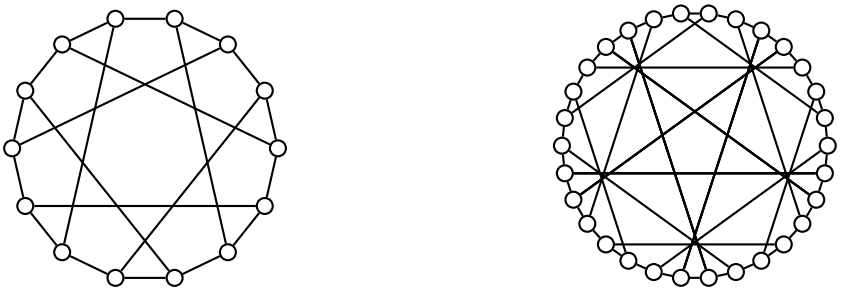
*1.5.3.* Najděte alespoň jedno řešení Kirkmanova problému patnácti školaček.*

*1.5.4. Mějme $d$-pravidelný graf $G$. Dokažte, že graf $G$ je možno hranově rozložit na kopie grafu $K_{1,d}$ právě tehdy, když $G$ je bipartitní graf.*

### Mooreovské grafy

Při řešení praktického problému je obvykle lhostejno, zda zadavatel popsal strukturu obrázkem nebo množinami vrcholů a hran nebo vlastnostmi, protože graf reprezentuje jednu konkrétní situaci. Pokud ale řešíme obecné úlohy nebo i úlohy týkající se velkých grafů, může mít způsob zadání grafu zásadní význam. V následujících odstavcích pracujeme s grafy, jejichž vlastnosti jsou známy avšak najít nějaké nakreslení takového grafu není snadný úkol.

[12] O T.P. Kirkmanovi je psáno na straně 63.



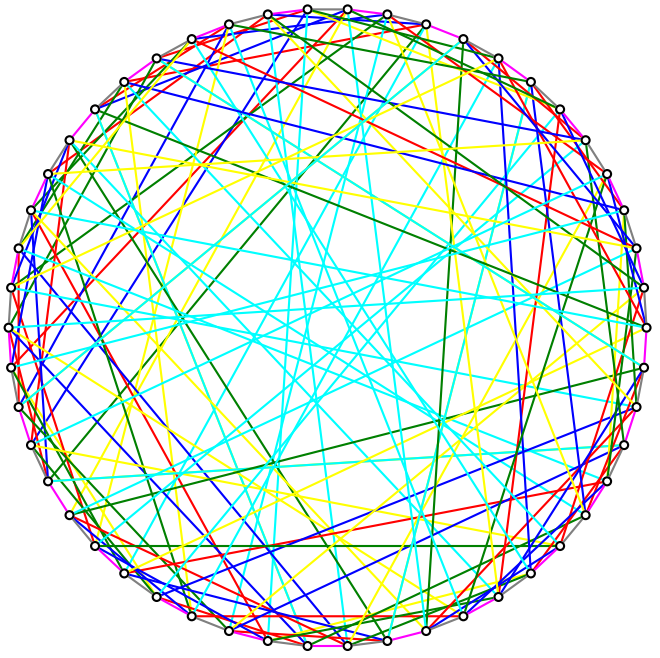
Obrázek 1.16.: *Heawoodův graf a Leviho graf.*

*Obvod* grafu je délka nejkratšího cyklu v grafu. Pokud graf neobsahuje žádný cyklus, definujeme jeho obvod jako nekonečno. Například $C_4$ má obvod 4, Petersenův graf (Obrázek 4.10.) má obvod 5 a Heawoodův graf (Obrázek 1.16. vlevo) má obvod 6.

Mooreovský graf je $d$-pravidelný graf s daným průměrem $k$ (průměr je zaveden na straně 69), jehož počet vrcholů je roven

$$1 + d \sum_{i=0}^{k-1} (d-1)^i,$$

což je horní hranice počtu vrcholů v grafu se stupni $d$ a průměrem $k$. Ekvivalentně je Mooreovský graf určen svým průměrem $k$ a obvodem $2k+1$. Dvě triviální třídy Mooreovských grafů jsou liché cykly a kompletní grafy. Hoffman a Singleton ukázali, že pro každý $d$-pravidelný Mooreovský graf s průměrem 2 musí být $d \in \{2, 3, 7, 57\}$. Pro $d = 2, 3$ takové grafy existují a jsou určeny jednoznačně: cyklus $C_5$ a Petersenův graf (Obrázek 4.10.). Pro $d = 7$ Hoffman a Singleton takový graf sestavili, říká se mu Hoffman-Singletonův graf (Obrázek 1.17.). Ale pro $d = 57$ není známo, zda takový graf existuje! Pokud existuje, tak už nyní je známa celá řada jeho vlastností. Avšak díky velikosti tohoto „posledního“ Moorovského grafu se nedaří jej najít (zkonstruovat) ani pomocí počítače a ani se nedaří jeho existenci vyvrátit.



Obrázek 1.17.: *Hoffman-Singletonův graf (hrany obarveny sedmi barvami).*

**Odkazy:**

- http://mathworld.wolfram.com/MooreGraph.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/Moore_graph
- http://en.wikipedia.org/wiki/Hoffman-Singleton_graph
- http://en.wikipedia.org/wiki/Degree_diameter
- http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_11_01_04.html

## Cvičení

*1.5.5. Ukažte, že obě definice Moorovského grafu*

*(i) $d$-pravidelný graf s daným průměrem $k$ a největším počtem vrcholů,*
*(ii) graf s daným průměrem $k$ a obvodem $2k+1$ s největším počtem vrcholů,*

*jsou ekvivalentní.*

*1.5.6. Najděte graf s co největším počtem vrcholů, ve kterém je maximální vzdálenost (vzdálenost je zavedena na straně 67) dvou různých nesousedních vrcholů 2 a $\Delta(G) = 3$.*

*1.5.7. Najděte graf, ve kterém je maximální vzdálenost dvou různých nesousedních vrcholů 2 nebo 3 a $\delta(G) = \Delta(G) = d$ pro libovolné $d \in \mathbb{N}$.*

*1.5.8. Mějme $k$-pravidelný graf $G$ s obvodem 4. Ukažte, že graf $G$ má alespoň $2k$ vrcholů. Navíc určete všechny takové grafy s právě $2k$ vrcholy.*

*1.5.9.? Pro libovolné $d > 2$ a přirozenéżr najděte graf, pro který platí $\mathrm{rad}(G) = r$, $\mathrm{diam}(G) = r+1$ a $\delta(G) = \Delta(G) = d$.*

### Silně regulární grafy

Řekneme, že $k$-pravidelný graf $G$ na $n$ vrcholech je *silně regulární*, jestliže existují taková přirozená čísla $\lambda$ a $\mu$, že

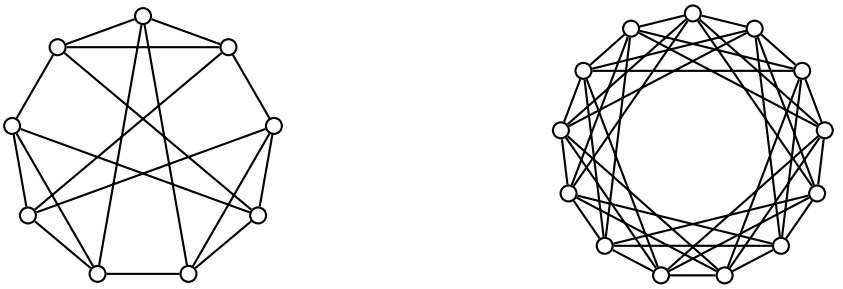
- každé dva sousední vrcholy mají $\lambda$ společných sousedů a
- každé dva nesousední vrcholy mají $\mu$ společných sousedů.

Kompletní grafy a kompletní bipartitní grafy jsou triviální příklady silně regulárních grafů. Další silně regulární grafy jsou například

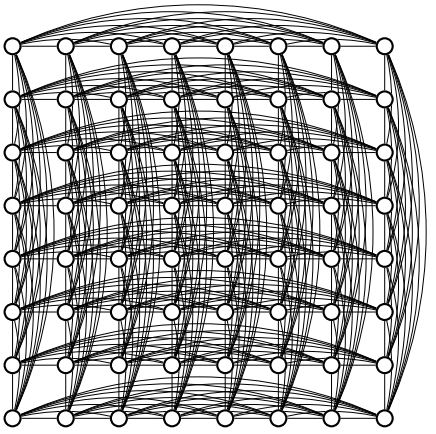
- cyklus $C_5$ s parametry $n = 5$, $k = 2$, $\lambda = 0$, $\mu = 1$,
- Petersenův graf (Obrázek 4.10.) s parametry $n = 10$, $k = 3$, $\lambda = 0$, $\mu = 1$,
- grafy na Obrázku 1.18. s parametry $n = 9$, $k = 4$, $\lambda = 1$, $\mu = 2$ a $n = 13$, $k = 6$, $\lambda = 2$, $\mu = 3$,
- graf pravidelného čtyřstěnu (což je graf $K_4$) s parametry $n = 4$, $k = 3$, $\lambda = 2$, $\forall \mu \in \mathbb{N}$ a graf pravidelného osmistěnu s parametry $n = 6$, $k = 4$, $\lambda = 2$, $\mu = 4$ (Obrázek 9.26.),
- Hoffman-Singletonův graf (viz také strana 59) s parametry $n = 50$, $k = 7$, $\lambda = 0$, $\mu = 1$,
- graf tahů věže po šachovnici (Obrázek 1.19.) s parametry $n = 64$, $k = 14$, $\lambda = 6$, $\mu = 2$.

Pokud existuje, tak také „chybějící“ Mooreovský graf je silně regulární s parametry $n = 3250$, $k = 57$, $\lambda = 0$, $\mu = 1$. Naproti tomu grafy pravidelného šestistěnu, dvanáctistěnu a dvacetistěnu (Obrázky 9.26. a 9.27.) silně regulární nejsou.

**Otázka:** Proč nejsou grafy pravidelného šestistěnu, dvanáctistěnu a dvacetistěnu silně regulární?



Obrázek 1.18.: *Silně regulární grafy s parametry* $n = 9$, $k = 4$, $\lambda = 1$, $\mu = 2$ *a* $n = 13$, $k = 6$, $\lambda = 2$, $\mu = 3$.



Obrázek 1.19.: *Graf tahů věže po šachovnici.*

Čtyři parametry $n, k, \lambda, \mu$ silně regulárních grafů nejsou nezávislé. Dá se ukázat, že $(v-k-1)\mu = k(k-\lambda-1)$. Důkaz je ponechán jako cvičení.

**Odkazy:**

- Další silně regulární grafy najdete na adrese http://mathworld.wolfram.com/StronglyRegularGraph.html.

## Cvičení

*1.5.10. Ukažte, že pro $k$-pravidelný graf $G$ na $n$ vrcholech, kde každé dva sousední vrcholy mají $\lambda$ společných sousedů a každé dva nesousední vrcholy mají $\mu$ společných sousedů platí $(v-k-1)\mu = k(k-\lambda-1)$.*

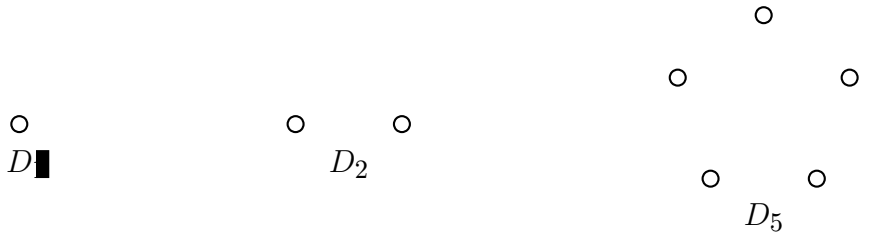
*1.5.11. Dokažte nebo vyvraťte: Požadavek $k$-pravidlenosti silně regulárního grafu vyplývá z toho, že existují taková přirozená čísla $\lambda$ a $\mu$, že každé dva sousední vrcholy mají $\lambda$ společných sousedů a že každé dva nesousední vrcholy mají $\mu$ společných sousedů, proto můžeme v definici silně regulárního grafu $G$ vynechat požadavek, aby $G$ byl $k$-pravidelný.*

*1.5.12. Ukažte, že silně regulární graf má průměr nejvýše 2.*

### Diskrétní grafy a prázdný graf

V *diskrétním grafu* nejsou žádné dva vrcholy spojené hranou. Pro pevně daný počet vrcholů $n$ je diskrétní graf doplňkem kompletního grafu $K_n$ a často bývá označován symbolem $D_n$.

Diskrétní graf není příliš zajímavou strukturou, jedná se však o nejmenší prvek množiny grafů s daným počtem vrcholů vzhledem k relaci býti faktorem nějakého grafu. Diskrétní graf je přirozenou výchozí strukturou řady konstrukčních algoritmů.




Obrázek 1.20.: *Diskrétní grafy $D_1$, $D_2$ a $D_5$.*

Anglicky se diskrétnímu grafu říká *null graph* nebo *edgeless graph*. Někdy se však termínem „null graph“ označuje *prázdný graf*, jehož vrcholová, a proto i hranová množina jsou prázdné. Všimněte si, že definice uvedená v tomto textu prázdný graf mezi grafy nepočítá.

**Julius Peter Christian Petersen (16. června 1839 – 5. září 1910)**

Dánský matematik Julius Petersen byl aktivní v mnoha matematických disciplínách (geometrie, analýza, teorie čísel, matematická ekonomie, kryptografie a teorie grafů).

Obrázek 1.21.: *Julius Petersen.*

Petersen se narodil ve vesničce Sorø. Jeho rodiče neměli moc peněz, přesto se mu snažili poskytnout vzdělání. Avšak v roce 1854 musel školu opustit, protože rodiče už neměli prostředky na další studium. Pracoval nějakou dobu v obchodě svého strýce. Když strýc zemřel, odkázal Petersenovi nějaké peníze, za které pak Petersen dostudoval. V roce 1860 vystudoval odbornou školu College of Technology a roku 1866 dokončil Kodaňskou univerzitu, kde později, v roce 1871, získal i doktorát. Pracoval nejprve na College of Technology a později na Kodaňské univerzitě. Již během studií se oženil. Aby uživil rodinu, přivydělával si učením. Učil šest až sedm hodin denně, šest dní v týdnu. Petersen byl považován za dobrého učitele, měl však problém udržet ve třídě kázeň.

V roce 1891 vydal článek „Die Theorie der regulären graphs“, který výrazně přispěl k rozvoji teorie grafů. Ukázal, že každý kubický graf bez mostů (most je nadefinován na straně 114) obsahuje 1-faktor.

V roce 1898 našel protipříklad k Taitově hypotéze o 1-faktorizaci 3-pravidelných grafů. Tait se snažil dokázat hypotézu o čtyřech barvách. Vyslovil „větu“, že „hrany každého mnohostěnu, ve kterém jsou všechny vrcholy stupně 3, můžeme rozdělit do tří skupin tak, že hrany v každé skupině obsahují všechny vrcholy mnohostěnu“, o které si myslel, že je pravdivá. Petersen přeformuloval Taitovu hypotézu jako „každý 3-pravidelný graf bez mostů má 1-faktorizaci“ (rozklad grafu na hranově disjunktní faktory, ve kterých jsou všechny vrcholy stupně 1). Potom Taitovu hypotézu vyvrátil tak, že našel protipříklad – známý *Petersenův graf* (Obrázek 4.10.). Další poznámky o Taitovi a důkazu hypotézy o čtyřech barvách jsou na straně 194.

**Odkazy:**

- http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Petersen.html
- Petersenův článek z roku 1891 http://www.springerlink.com/index/B53G50P5J001J465.pdf
- http://www.mathpuzzle.com/4Dec2001.htm

## Cvičení

*1.5.13. Ukažte, že Petersenův graf (Obrázek 4.10.) je silně regulární. Je doplněk Petersenova grafu silně regulární?*

*1.5.14. Ukažte, že obvod Petersenova grafu je 5. Jaký je obvod doplňku Petersenova grafu?*

**Thomas Penyngton Kirkman (31. března 1806 – 3. února 1895)**

Britský matematik Thomas P. Kirkman přispěl výraznou měrou k formování teorie grup a kombinatoriky. Kirkman publikoval během života (až do svých 89 let) více než 60 významných matematických prací a celou řadu drobnějších prací.

Obrázek 1.22.: *Thomas P. Kirkman.*

Thomas Kirman vystudoval základní školu v Boltonu, řečtinu a latinu, avšak žádnou matematiku. Ačkoli měl potenciál pro studium na univerzitě, jeho otec prosadil, že od čtrnácti let Kirkman místo studií pracoval u něj v kanceláři. Samostatně pokračoval ve studiu jazyků, naučil se francouzsky a německy.

Po devíti letech práce v kanceláři se proti otcově vůli vrátil na školu, Trinity College v Dublinu. Studoval matematiku, filozofii a přírodní vědy. Po návratu do Anglie v roce 1835 vstoupil do anglikánské církve. Pět let byl zástupcem faráře v Bury a později v Lymm. Od roku 1839 se stal vikářem farnosti Southworth v Lancashire, zde setrval 52 let.

Během studií v Dublinu byl ovlivněn Hamiltonem[13], avšak první významnou práci napsal až v roce 1846, když mu bylo 40 let. Vyřešil problém, který byl publikován v *Lady's and Gentleman's Diary* v roce 1845 a dokázal existenci steinerovských trojic o sedm let dříve, než vyšel Steinerův článek, ve kterém se Steiner ptal, pro jaké množiny takové trojice existují. Kirman publikoval své výsledky o steinerovských trojicích v *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*.

Od roku 1853 se Kirkman snažil o klasifikaci mnohostěnů, publikoval řadu prací v Královské společnosti. Členem Královské společnosti se stal roku 1857. Později pracoval v oblasti teorie grup a dále v kombinatorice. Jeho známý problém patnácti školaček byl publikován v roce 1850 v časopise *The Lady's and Gentleman's Diary*.

V roce 1884 (bylo mu 78 let) publikoval první práci o uzlech. Následovala řada článku na toto téma a ve spolupráci s Taitem sestavili tabulku všech uzlů s osmi, devíti a deseti křiženími.

**Odkazy:**

- http://www.ams.org/featurecolumn/archive/finitegeometries.html
- http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Kirkman.html
- http://www.gutenberg.org/etext/9942

[13] O Williamu Hamiltonovi je psáno na straně 230.

# Kapitola 2. Cesty a cykly v grafu

Pokud graf reprezentuje nějakou síť (silniční, železniční, elektrickou, ...), tak je přirozené zkoumat, jak je možno v grafu putovat. Mezi vrcholy grafu, který reprezentuje danou síť, je dovoleno putovat jen po hranách grafu. Dospějeme k zavedení pojmu sled, tah a cesta. V druhé části kapitoly ukážeme, jak měřit vzdálenosti v grafu. V poslední části se budeme věnovat nejmenší a největší vzdálenosti mezi dvěma vrcholy v grafu a také vztahům mezi těmito parametry.

## 2.1. Sledy, tahy a cesty

**Definice** *Sled* v grafu $G$ je taková posloupnost vrcholů a hran

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n), \tag{5}$$

že hrana $e_i$ má koncové vrcholy $v_{i-1}$ a $v_i$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$. Sled (5) se nazývá $(v_0, v_n)$-sled.

Sled v grafu můžeme chápat jako záznam putování nebo bloudění v grafu. Všimněte si, že vrcholy i hrany ve sledu se mohou opakovat, a to i vícekrát. Vrchol $v_0$ se nazývá *počáteční* a vrchol $v_n$ *koncový* vrchol $(v_0, v_n)$-sledu (5). Ostatní vrcholy, pokud existují, jsou *vnitřní* vrcholy sledu. Vnitřním vrcholům sledu se někdy říká *interní*. Jestliže $n = 0$, tak sled se nazývá *triviální* a pochopitelně nerozlišujeme jeho počáteční a koncový vrchol. Pokud je $v_0 = v_n$ pro kladné $n$, řekneme, že sled v grafu je *uzavřený*. Pro jednoduché grafy není nutné explicitně uvádět hrany sledu, protože mezi libovolnými dvěma vrcholy grafu existuje vždy nejvýše jedna hrana, která je jednoznačně určena dvojicí koncových vrcholů. Pokud nebude výslovně řečeno jinak, omezíme se na jednoduché grafy a hrany sledu nebudeme dále vypisovat. Sled (5) pak budeme zapisovat stručně bez závorek $v_0, v_1, \ldots, v_n$.

*Délkou sledu* budeme rozumět počet hran, které se ve sledu vyskytují, přičemž každou hranu započítáme tolikrát, kolikrát se v posloupnosti objeví. Definice, tak jak je zformulovaná, nepřipouští sledy nekonečné délky (proč?). Na druhou stranu podle definice můžeme snadno definovat délku $(v_0, v_n)$-sledu (5) jako $n$. Obecnější definice sledu a délky sledu je ponechána jako Cvičení 2.1.1.

**Definice** *Tah* je sled, ve kterém se žádná hrana neopakuje. Tah s počátečním vrcholem $u$ a koncovým vrcholem $v$ budeme nazývat $(u, v)$-tah.

Slovo „tah“ souvisí s kreslením jedním tahem. Podrobněji se tomu tématu budeme věnovat v kapitole 11. V tahu se nemohou opakovat hrany, vrcholy se však opakovat mohou. Protože tah je speciální případ sledu, tak definice koncových, vnitřních vrcholů a uzavřeného tahu je analogická jako pro sled. *Délka tahu* je opět počet hran tahu, dokonce nemusíme uvažovat opakující se hrany.

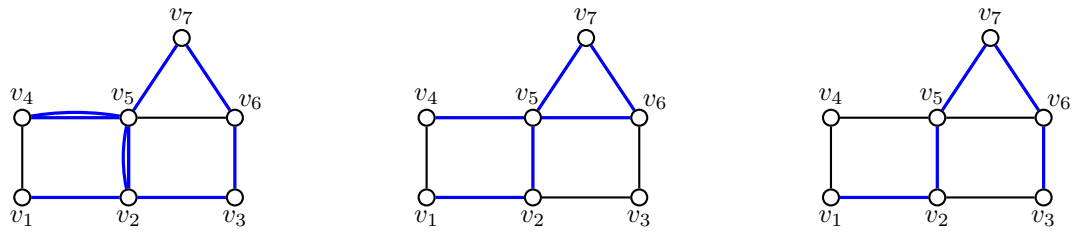
**Definice** *Cesta* v grafu je sled, ve kterém se neopakují vrcholy. Cestu s počátečním vrcholem $u$ a koncovým vrcholem $v$ budeme nazývat $(u, v)$-cesta.

Někteří autoři důsledně rozlišují mezi pojmy *had* jako graf a *cesta* jako podgraf nějakého grafu. V tomto textu budeme pracovat jen s termínem cesta, z kontextu bude zřejmé, o který z obou významů se jedná. Zavedení pojmu koncových vrcholů, vnitřních vrcholů a *délky cesty* v grafu je analogické. Cestu délky $n - 1$ budeme značit $P_n$. Triviální sled délky 0 (neobsahuje žádnou hranu) se nazývá také *triviální cesta*. Nejkratší netriviální cesta (hrana spolu s oběma koncovými vrcholy) je délky 1.

V cestě se nemohou opakovat ani hrany ani vrcholy. Výjimkou je, pokud hovoříme o *uzavřené cestě* v grafu, neboli o *cyklu v grafu*. Jsou-li $u, v$ sousední vrcholy v grafu $G$ a $P_n$ je nějaká $(u, v)$-cesta v $G$, která neobsahuje hranu $uv$, pak cesta $P_n$ spolu s hranou $uv$ tvoří cyklus $C_n$ v grafu $G$.

Při popisu cyklu $C_n$ stačí zadat jen posloupnost $n$ vrcholů, poslední (opakující se) vrchol obvykle nezapisujeme.

V grafu na Obrázku 2.1. je vlevo příklad sledu $v_1, v_2, v_5, v_7, v_6, v_3, v_2, v_5, v_4, v_5$, uprostřed je příklad tahu $v_1, v_2, v_5, v_7, v_6, v_5, v_4$ a vpravo je příklad cesty $v_1, v_2, v_5, v_7, v_6, v_3$. Každá cesta je tahem a každý tah je sledem. Opačné implikace obecně neplatí.




Obrázek 2.1.: *Příklad sledu, tahu a cesty v grafu.*

Při důkazu řady tvrzení využijeme následující tvrzení.

**Lemma 2.1.** *Existuje-li v grafu $G$ mezi dvěma vrcholy $(u, v)$-sled, potom v $G$ existuje také $(u, v)$-cesta.*

Důkaz je ponechán jako cvičení (Cvičení 2.1.2.). Postup, kdy ze sledu nebo z tahu $S$ vynecháme hrany a dostaneme kratší sled, res. tah $S'$, se často používá. Říkáme, že dostaneme *podsled*, resp. *podtah* $S'$ tahu $S$. Hrany podsledu $S'$ nemusí ve sledu $S$ následovat *bezprostředně* za sebou, avšak posloupnost vrcholů a hran podsledu tvoří podposloupnost v posloupnosti vrcholů a hran sledu $S$ *v tomto pořadí*. Například sled $S_1 = v_1, v_2, v_5, v_7, v_6, v_3, v_2, v_5, v_4, v_5$, který je vlevo na Obrázku 2.1., obsahuje cestu $v_1, v_2, v_5, v_4$, kterou dostaneme vynecháním úseku $v_7, v_6, v_3, v_2, v_5$ a úseku $v_4, v_5$. Naproti tomu sled $S_1$ *neobsahuje* cestu $v_1, v_2, v_3$, proč?

**Sledy a cykly**

Připomeňme, že sled jsme definovali jako posloupnost vrcholů a hran. Mějme dva sledy $(u_1, v_1)$-sled a $(u_2, v_2)$-sled. Jestliže vrchol $v_1$ je totožný s vrcholem $u_2$, tak můžeme tyto dva sledy *navázat*. To znamená, že spojíme obě příslušné posloupnosti tak, že za posledním vrcholem $(u_1, v_1)$-sledu pokračujeme první hranou $(u_2, v_2)$-sledu. Vznikne $(u_1, v_2)$-sled. Pokud je navíc vrchol $u_1$ totožný s vrcholem $v_2$, tak vznikne uzavřený sled. Všimněte si, že navázáním dvou sledů, tahů či cest vznikne opět sled, zatímco navázáním dvou tahů může, ale nemusí vzniknout tah a ani navázáním dvou cest nemusí vzniknout cesta. To je důvod, proč je pojem sledu zaveden.

Pro uzavřené sledy liché délky platí následující tvrzení.

**Lemma 2.2.** *Každý uzavřený sled liché délky obsahuje cyklus liché délky.*

*Důkaz.* Tvrzení ukážeme indukcí vzhledem k počtu hran sledu.

*Základ indukce:* V jednoduchém grafu má nejkratší uzavřený sled *liché délky* délku 3. V takovém sledu se nemůže žádná hrana opakovat, a proto se jedná o cyklus.

*Indukční krok:* Mějme nějaký uzavřený sled $S$ liché délky $k$ a předpokládejme, že pro všechny sledy liché délky menší než $k$ tvrzení platí. Pokud se v uzavřeném sledu $S$ neopakuje žádný vrchol, je samotný sled $S$ cyklem liché délky a tvrzení platí. Pokud se nějaký vrchol $v$ v uzavřeném sledu $S$ opakuje alespoň dvakrát, rozdělíme uzavřený sled $S$ na dva uzavřené $(v, v)$-podsledy. Protože sled $S$ je liché délky, je jeden z těchto podsledů sudé délky a druhý je liché délky. Sled liché délky je kratší než $S$ a podle indukčního předpokladu obsahuje lichý cyklus. □

Je zajímavé si uvědomit, že uzavřený sled sudé délky nemusí obsahovat *žádný* cyklus, ale může vzniknout pouze opakováním hran (a koncových vrcholů). Vyskytuje-li se však v nějakém uzavřeném sledu libovolné délky některá hrana jen jednou (například v tahu), tak tento sled musí obsahovat cyklus. Důkaz tohoto tvrzení je ponechán jako Cvičení 2.1.5.

**Otázka:** Kde se v důkazu Lemmatu 2.2. použil předpoklad, že uzavřený sled je liché délky?

## Cvičení

*2.1.1. Zformulujte definici sledu tak, aby připouštěla existenci i nekonečného sledu. Pro konečné grafy by měl smysl definice zůstat zachován. Jak bude definována délka sledu?*

*2.1.2. Dokažte Lemma 2.1.: existuje-li v grafu $G$ mezi dvěma vrcholy $(u, v)$-sled, potom v $G$ existuje také $(u, v)$-cesta. Návod: Dokažte silnější tvrzení, že z každého $(u, v)$-sledu můžeme případným vynecháním vrcholů (a hran) dostat $(u, v)$-cestu.*

*2.1.3. Dokažte, že v jednoduchém grafu $G$ vždy existuje cesta délky $\delta(G)$.*

*2.1.4.$^\heartsuit$ Najděte nějaký graf $G$ a takový uzavřený sled $S$ v grafu $G$, že $S$ neobsahuje cyklus.*

*2.1.5. Dokažte, že vyskytuje-li se v uzavřeném sledu $S$ některá hrana pouze jednou, tak sled $S$ obsahuje cyklus.*

*2.1.6.$^\heartsuit$ Najděte příklad grafu $G$ a vrcholu $v \in V(G)$ tak, že $\delta(G - v) > \delta(G)$.*

*2.1.7. Najděte příklad grafu $G$ a vrcholu $v \in V(G)$ tak, že $\delta(G) = m$ a $\delta(G - v) = k$ pro libovolná čísla $k, m \in \mathbb{N}$, kde $k \geq m$.*

*2.1.8. Kolik různých cest existuje v kompletním grafu $K_n$ mezi dvěma různými vrcholy $u$ a $v$?*

*2.1.9. Mějme netriviální souvislý graf. Označme $X = \prod_{u \neq v \in V(G)} \mathrm{dist}(u, v)$ součin všech vzdáleností dvojic různých vrcholů. Jaké a) nejmenší, b) největší hodnoty může $X$ nabývat? A pro jaké grafy? Svá tvrzení dokažte.*

*2.1.10. Mějme uzavřený sled $W$ s alespoň jednou hranou, který* neobsahuje *cyklus jako podsled. Ukažte, že některá hrana sledu $W$ se opakuje dvakrát bezprostředně za sebou (v opačném směru).*

## 2.2. Souvislost a vzdálenost v grafu

**Souvislost a dosažitelnost**

Jestliže vrcholy grafu reprezentují reálné objekty a hrany reprezentují vztahy mezi nimi, přirozeně vyvstane otázka, zda graf tvoří jeden celek nebo zda se skládá z několika částí, které spolu nesouvisí. Dospějeme tak k pojmu souvislosti grafu.

**Definice Souvislost**

Řekneme, že vrchol $v$ je *dosažitelný* z vrcholu $u$ v grafu $G$, jestliže v $G$ existuje $(u, v)$-sled. Graf $G$ je *souvislý*, jestliže pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V(G)$ existuje $(u, v)$-sled. V opačném případě je graf *nesouvislý*.

Můžeme říci, že graf je souvislý, jestliže každý vrchol $v$ je dosažitelný z každého vrcholu $u$, případně z jednoho pevně zvoleného vrcholu $u$. V Kapitole 5. budeme dokonce rozlišovat „jak moc“ je graf souvislý. Jestliže graf není souvislý, tak je možno jej rozdělit na několik souvislých indukovaných podgrafů.

**Definice Komponenta grafu**

Řekneme, že $L$ je *komponenta* grafu $G$, jestliže je $L$ souvislý podgraf grafu $G$ a současně pro každý souvislý podgraf $W$ grafu $G$ platí, že $W$ je podgraf $L$ a nebo vrcholové množiny podgrafů $W$ a $L$ jsou disjunktní. Počet komponent grafu $G$ značíme $\omega(G)$.

Na Obrázku 2.2. vlevo je souvislý graf, vpravo je nesouvislý graf se třemi komponentami.

Obrázek 2.2.: *Souvislý graf a nesouvislý graf se třemi komponentami.*

Zavedeme relaci *dosažitelnosti* $\simeq$ tak, že dva vrcholy v grafu jsou v relaci $\simeq$, jestliže jsou navzájem dosažitelné. Tato relace je relací ekvivalence (Cvičení 2.2.2.). Alternativně můžeme vrcholovou množinu každé komponenty definovat jako třídu rozkladu příslušného relaci $\simeq$ a samotná komponenta bude podgraf indukovaný na této třídě. Graf je souvislý, má-li relace $\simeq$ jedinou třídu rozkladu. Není těžké si rozmyslet, že obě definice jsou ekvivalentní.

**Vzdálenost v grafu**

V grafu, který reprezentuje komunikační síť, je velmi přirozené zjistit, jak blízko jsou jednotlivé vrcholy. Vzdálenosti měříme délkou cest.

**Definice** **Vzdálenost v grafu**
*Vzdálenost* vrcholu $v$ od vrcholu $u$ (nebo vzdálenost *mezi vrcholy* $u$ a $v$) v grafu $G$ je délka nejkratší $(u,v)$-cesty. Značíme ji $\mathrm{dist}(u,v)$, případně $\mathrm{dist}_G(u,v)$. Jestliže vrchol $v$ není dosažitelný z $u$, definujeme $\mathrm{dist}(u,v) = \infty$.

Definice je korektní, neboť pro každé dva dosažitelné vrcholy $u$, $v$ nejkratší $(u,v)$-cesta existuje, a proto existuje i délka $(u,v)$-cesty. Tato délka je vždy nezáporné celé číslo. Pro nedosažitelné vrcholy neexistuje $(u,v)$-cesta, a proto délka $(u,v)$-cesty není definována, avšak podle definice je vzdálenost $\mathrm{dist}(u,v) = \infty$.

Někdy se vzdálenost mezi vrcholy $u$ a $v$ značí jen $d(u,v)$. Všimněte si, že v definici můžeme nahradit slovo „cesta“ slovem „sled“ a význam definice zůstane zachován. Protože nejkratší sled je vždy cestou, je uvedená definice praktičtější. Všimněte si, že nejkratší $(u,v)$-sled existuje vždy, když existuje alespoň jeden $(u,v)$-sled, tj. když není $\mathrm{dist}(u,v) = \infty$.

**Metrika**

V matematice je *metrika* taková funkce $\rho$, která přiřazuje vzdálenost každé dvojici prvků z dané množiny $A$ a která má navíc určité vlastnosti. Množina $A$ spolu s metrikou $\rho$ se nazývá *metrický prostor*.

S různými metrikami se setkáváme i jiných matematických disciplínách. Například v analýze se pracuje s metrikou, která je sestavena pomocí absolutní hodnoty rozdílu dvou čísel. V geometrii se pracuje s metrikou, která je dána eukleidovskou vzdáleností dvou bodů a v algebře lze zavést různé metriky s využitím různých norem.

**Definice** *Metrika* $\rho$ na množině $A$ je zobrazení $\rho : A \times A \to \mathbb{R}$ (případně $\rho : A \times A \to \mathbb{R}^*$) takové, že $\forall x, y, z \in A$ platí

- $\rho(x,y) \geq 0$, přičemž $\rho(x,y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$,
- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$,
- $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$.

Také vzdálenost v jednoduchém grafu zavedená v definici na straně 67 je metrika na množině vrcholů daného souvislého grafu.

**Lemma 2.3.** *Vzdálenost vrcholů v souvislém grafu $G$ je metrika na množině $V(G)$.*

Důkaz tohoto lemmatu je ponechán jako Cvičení 2.2.4. Metriku lze rozšířit i pro nesouvislé grafy, musíme však správně zformulovat práci se vzdáleností $\infty$ (Cvičení 2.2.15.). Upozorníme jen, že symbolem $\mathbb{R}^*$ rozumíme $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a předpokládáme, že na množině $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ máme přirozeně nadefinované sčítání a porovnávání reálných čísel a $\infty$.

## Cvičení

*2.2.1. Ukažte, že počet různých $(u_i, u_j)$-sledů délky $k$ v grafu $G$ je roven prvku $a'_{ij}$ (v jiném značení $\left[A(G)^k\right]_{ij}$) matice $A(G)^k$, kde $A(G)$ je matice sousednosti grafu $G$ a $A(G)^k$ je její $k$-tá mocnina, $k \in \mathbb{N}$.*

*2.2.2. Ukažte, že relace $\simeq$ („být dosažitelný“) zavedená v textu na straně 67 je relací ekvivalence.*

*2.2.3. Na straně 66 byl nadefinován pojem souvislosti užitím sledů a alternativně užitím tříd ekvivalence relace dosažitelnosti $\simeq$ (zavedena na straně 67). Ukažte, že obě definice souvislosti jsou ekvivalentní.*

*2.2.4. Dokažte Lemma 2.3., tj. že vzdálenost v souvislých grafech je metrika.*

*2.2.5. Dokažte, že $G = (V, E)$ je souvislý právě tehdy, když pro libovolný rozklad vrcholové množiny $V$ na dvě množiny $U$ a $W$ existuje hrana $e = uw \in E$ taková, že $u \in U$ a $w \in W$. (Neprázdné množiny $U$ a $W$ tvoří* rozklad *$V$, jestliže $U \cup W = V$ a $U \cap W = \emptyset$).*

*2.2.6.* Kolik nejvíce hran může mít graf s $n$ vrcholy a $k$ komponentami? Dokažte.*

*2.2.7. Dokažte, že je-li $\delta(G) > \lfloor v(G)/2 \rfloor - 1$, tak graf $G$ je souvislý.*

*2.2.8. Najděte takové sudé číslo $n$ a takový nesouvislý graf $G$, že $n = v(G)$ a $G$ je pravidelný graf stupně $(n/2 - 1)$.*

*2.2.9. Nechť $u$ je vrchol lichého stupně v grafu $G$. Ukažte, že potom v $G$ existuje $(u, v)$-cesta do vrcholu $v$, který je různý od $u$ a je také lichého stupně.*

*2.2.10. Ukažte, že odebrání jedné hrany ze souvislého grafu dostaneme graf, který má nejvýše dvě komponenty.*

*2.2.11. Máme osmi litrovou nádobu s vínem a dvě prázdné nádoby – pětilitrovou a třílitrovou. Rozdělte osm litrů na čtyři a čtyři litry jen s užitím těchto nádob, bez použití odměrky. Úlohu namodelujte grafem, najděte nejkratší řešení a popište všechna přípustná řešení.*

*2.2.12. Změňte objem a) třílitrové b) pětilitrové nádoby tak, aby úloha ze Cvičení 2.2.11. neměla řešení. Najděte jiná než triviální řešení, kdy jsou některé dvě nádoby stejně velké.*

*2.2.13.? Najděte nutnou a postačující podmínku pro to, aby úloha s přeléváním jedné plné a dvou prázdných nádob měla vždy řešení. Jak tvrzení zobecnit pro více nádob?*

*2.2.14.* Kolik různých $(u, v)$-sledů délky $k$ existuje mezi některými dvěma vrcholy $u$, $v$ v grafu a) $C_4$, b) $C_5$, c) $K_4$, d) $K_{2,2}$?*

*2.2.15. Na základě vzdálenosti v grafu sestavte definici metriky pro nesouvislé grafy, která bude zpětně konzistentní s metrikou v souvislých grafech (Cvičení 2.2.4.).*

## 2.3. Excentricita, poloměr a průměr grafu

Vzdálenost mezi dvěma vrcholy v grafu měříme jako délku nejkratší cesty mezi nimi. Při řešení praktických problémů má smysl se podívat na extrémní vzdálenosti v grafu. S tím souvisí následující definice.

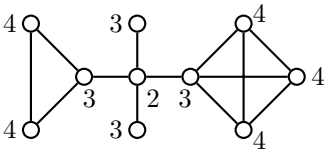
**Definice** Mějme graf $G$ a vrchol $v \in V(G)$. *Excentricita* vrcholu $v$ je největší ze všech vzdáleností $v$ od ostatních vrcholů v $G$. Excentricitu značíme $\mathrm{ecc}(v)$, případně $\mathrm{ecc}_G(v)$.

Symbolicky můžeme excentricitu vrcholu $v$ popsat

$$\mathrm{ecc}(v) = \max_{u \in V(G)} \{\mathrm{dist}(u, v)\}.$$

Uvědomte si, že v předchozí definici je vrchol $v$ pevně daný, zatímco vrchol $u$ je libovolný vrchol grafu $G$. Příslušné maximum je pak určeno pro každý vrchol $v$ jednoznačně.

Excentricitě vrcholu se v literatuře říká také *výstřednost* vrcholu. V souvislých grafech je excentricita vrcholu $v$ měřítkem, jak „daleko“ je k ostatním vrcholům v grafu (Obrázek 2.3.). Aby




Obrázek 2.3.: *Graf s vyznačenými excentricitami vrcholů.*

v grafu existovaly vrcholy s velkou excentricitou, musí mnoho hran v grafu chybět. Grafy s velkou excentricitou některých vrcholů jsou řídké, například stromy a cykly.

Vrcholy s velkou excentricitou leží „na kraji“ grafu a vrcholy s malou excentrictou leží „uvnitř grafu“. Množina vrcholů, ze kterých je „blízko“ do všech ostatních vrcholů, je jakýmsi centrem grafu. Tuto vlastnost můžeme formalizovat.

**Definice** *Centrum* grafu je podgraf indukovaný na množině vrcholů s nejmenší excentricitou.

Je zřejmé, že v každém grafu centrum existuje, protože některé vrcholy mají excentricitu nejmenší. V grafu může existovat i více vrcholů, které mají nejmenší excentricitu, například v cyklu mají všechny vrcholy stejnou excentricitu a cyklus je totožný se svým centrem. Všimněte si, že podle uvedené definice je centrum grafu více než jen množina vrcholů, jedná se o *podgraf* daného grafu. V některé literatuře se centrum grafu definuje jen jako množina vrcholů s nejmenší excentricitou. V nesouvislých grafech mají všechny vrcholy stejnou excentricitu $\infty$, a proto je nesouvislý graf totožný se svým centrem.

**Otázky:**

- Jaká je excentricita vrcholu v nesouvislém grafu?
- Může centrum grafu obsahovat více vrcholů, než je zbývajících vrcholů v grafu?
- Může centrum grafu $G$ být totožné s celým grafem $G$?
- Může centrum grafu být nesouvislý podgraf?
- Je rozdíl mezi vrcholem s nejmenší excentricitou a vrcholem s minimální excentricitou?

**Definice** Největší excentricita vrcholů v grafu $G$ se nazývá *průměr* grafu a nejmenší excentricita se nazývá *poloměr* grafu $G$. Průměr grafu $G$ se značí $\operatorname{diam}(G)$ a poloměr $\operatorname{rad}(G)$ (*diametr* a *rádius*).

Průměr grafu se v některé literatuře nazývá *excentricita grafu*. Symbolicky můžeme průměr a poloměr grafu $G$ popsat

$$\operatorname{diam}(G) = \max_{v \in V(G)} \{\operatorname{ecc}(v)\}, \qquad \operatorname{rad}(G) = \min_{v \in V(G)} \{\operatorname{ecc}(v)\}.$$

Nesouvislé grafy mají podle definice poloměr i průměr $\infty$, tento triviální případ zpravidla nebudeme uvažovat a omezíme se na souvislé grafy. Jestliže si uvědomíme, že excentricita vrcholu $v$ je maximum ze vzdáleností $\operatorname{dist}(u, v)$ a vzdálenost vrcholů $\operatorname{dist}(u, v)$ je minimum z množiny délek sledů mezi vrcholy $u$ a $v$, tak nahlédneme, že hledání poloměru a průměru grafu bez obecné znalosti struktury grafu je pracné, jedná se o extremální úlohy

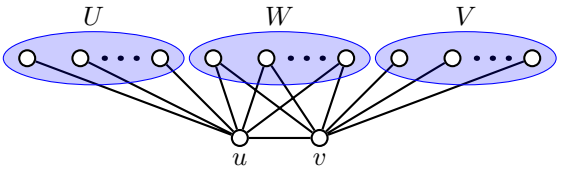
$$\operatorname{diam}(G) = \max_{v \in V(G)} \max_{u \in V(G)} \min_{(u,v)\text{-cesty}} \{\text{délka } (u, v)\text{-cesty}\},$$
$$\operatorname{rad}(G) = \min_{v \in V(G)} \max_{u \in V(G)} \min_{(u,v)\text{-cesty}} \{\text{délka } (u, v)\text{-cesty}\}.$$

Je dobré si uvědomit, že vzdálenost je vlastnost každé dvojice vrcholů, excentricita je vlastnost každého vrcholu a poloměr i průměr jsou vlastnosti celého grafu. Jestliže průměr grafu $G$ je roven číslu $k$, tak musí v grafu $G$ existovat takové dva vrcholy $u$ a $v$, že jejich vzdálenost je $k$, tj. délka nejkratší $(u, v)$-cesty je $k$. Takové cestě říkáme *diametrická cesta*. Je přirozené očekávat, že čím je v grafu více hran, tím menší je průměr grafu, a naopak grafy s velkým průměrem jsou řídké. Také

je zřejmé, že graf a jeho doplněk nemohou oba mít „málo hran“. Následující věta pak ukazuje, že graf a jeho doplněk nemohou mít současně velké průměry.

**Věta 2.4.** *Je-li $G$ graf s průměrem $\operatorname{diam}(G) \geq 3$, pak platí $\operatorname{diam}(\overline{G}) \leq 3$.*

*Důkaz.* Jestliže graf $G$ není souvislý, nebo má průměr $\operatorname{diam}(G) > 2$, tak v $G$ existují nesousední vrcholy $u$ a $v$, které nemají v $G$ žádného společného souseda a $\operatorname{dist}_G(u, v) \geq 3$. Všechny zbývající vrcholy můžeme rozdělit do tří množin $U$, $V$ a $W$. Do množiny $U$ dáme všechny vrcholy, které nejsou v $G$ sousední s vrcholem $u$ a jsou sousední s vrcholem $v$. Do $V$ patří všechny vrcholy, které nejsou v $G$ sousední s $v$ a jsou sousední s $u$. A konečně do $W$ dáme všechny vrcholy, které nejsou v $G$ sousední ani s $u$ ani s $v$. V doplňku $\overline{G}$ jsou nyní všechny vrcholy v $U$ sousední s $u$, $u$ je sousední s $v$ a všechny vrcholy z $V$ jsou sousední s $v$. Vrcholy z $W$ jsou v doplňku $\overline{G}$ sousední s oběma vrcholy $u$ a $v$ (Obrázek 2.4.). Některá z množin může být prázdná, avšak každý vrchol grafu $G$ je buď $u$, nebo $v$, nebo patří do některé ze tří množin $U$, $V$, nebo $W$, a proto ihned vidíme, že $\operatorname{diam}(\overline{G}) \leq 3$. □




Obrázek 2.4.: *Určení průměru grafu $\overline{G}$ (doplňku ke grafu $G$).*

Ve Cvičení 2.3.8. ukážeme, že je-li průměr grafu alespoň 4, tak průměr doplňku je dokonce nejvýše 2. Následující věta ukazuje, že poloměr a průměr splňují nerovnosti, které bychom mohli nazvat intuitivní.

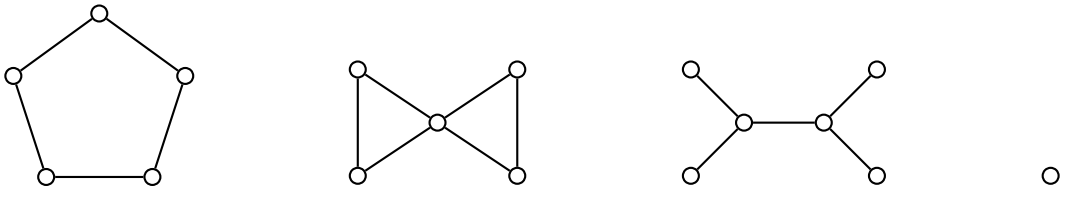
**Věta 2.5.** *V každém grafu $G$ platí $\operatorname{rad}(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2\operatorname{rad}(G)$.*

*Důkaz.* Pro nesouvislé grafy platí tvrzení triviálně. První nerovnost plyne ihned z definice poloměru a průměru grafu. Při důkazu druhé nerovnosti využijeme, že vzdálenost v grafu je metrika (Cvičení 2.2.4.). Mějme libovolný vrchol $c$ z centra grafu. Podle definic centra a poloměru je jeho excentricita $\operatorname{ecc}(c) = \operatorname{rad}(G)$. Průměr je největší z excentricit vrcholů a tato excentricita je realizována nějakou dvojicí vrcholů $u$, $v$, tj. platí $\operatorname{diam}(G) = \operatorname{ecc}(u) = \operatorname{dist}(u, v)$. Pro libovolnou dvojici vrcholů $u$, $v$ v grafu $G$ však platí (s využitím trojúhelníkové nerovnosti)

$$\operatorname{dist}(u, v) \leq \operatorname{dist}(u, c) + \operatorname{dist}(c, v) \leq \operatorname{ecc}(c) + \operatorname{ecc}(c) = 2\operatorname{rad}(G),$$

a proto $\operatorname{diam}(G) \leq 2\operatorname{rad}(G)$. □

Pro každou z nerovností ve Větě 2.5. (případně žádnou nebo i obě) může nastat rovnost. Příklady takových grafů jsou na Obrázku 2.5. Ve Cvičení 2.3.3. ukážeme, že obě hodnoty $\operatorname{rad}(G)$ a $\operatorname{diam}(G)$ mohou nabývat libovolných hodnot v mezích stanovených Větou 2.5.



Obrázek 2.5.: *Příklady grafů s různými vztahy mezi poloměry a průměry.*

## Cvičení

*2.3.1. Ukažte, že doplněk nesouvislého grafu je souvislý.*

*2.3.2. Určete poloměr a průměr následujících grafů: a) grafy na Obrázku 2.5., b) kompletní graf $K_n$, c) $Q_n$ hyperkrychle řádu $n$.*

*2.3.3. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla $n$, $m$, která splňují podmínku $n \leq m \leq 2n$, existuje takový graf $G$, že $\mathrm{rad}(G) = n$ a $\mathrm{diam}(G) = m$.*

*2.3.4. Mějme dáno přirozené číslo $k$. Najděte příklad grafu, ve kterém má centrum právě $k$ komponent.*

*2.3.5. Mějme dáno přirozené číslo $d$. Najděte příklad grafu $G$, ve kterém je centrum tvořeno dvěma vrcholy jejichž vzdálenost v grafu $G$ je $d$.*

*2.3.6.♡ Ukažte, že je-li graf $H$ podgrafem grafu $G$, tak pro každé dva vrcholy z $V(H)$ platí $\mathrm{dist}_G(u,v) \leq \mathrm{dist}_H(u,v)$.*

*2.3.7.♡ Najděte takový příklad grafu $G$ a jeho podgrafu $H$, že a) $\mathrm{diam}(G) < \mathrm{diam}(H)$, b) $\mathrm{diam}(G) > \mathrm{diam}(H)$.*

*2.3.8. Ukažte, že je-li $G$ graf s průměrem $\mathrm{diam}(G) \geq 4$, tak potom platí $\mathrm{diam}(\overline{G}) \leq 2$.*

*2.3.9. Ukažte, že má-li graf $G$ poloměrem $\mathrm{rad}(G) \geq 3$, tak potom platí $\mathrm{rad}(\overline{G}) \leq 2$.*

*2.3.10. Ukažte, že excentricita dvou sousedních vrcholů se liší nejvýše o jedna.*

*2.3.11. Platí některá z následujících implikací? a) Je-li graf pravidelný, pak všechny jeho vrcholy mají stejnou excentricitu. b) Mají-li všechny vrcholy daného grafu stejnou konečnou excentricitu, pak se jedná o pravidelný graf.*

*2.3.12. Máme dán graf $G$. Najděte takový jeho nadgraf $N$, že $G$ je centrem grafu $N$.*

*2.3.13.♡ Najděte příklad netriviálního grafu $G$, pro který platí $\mathrm{diam}(G) \leq 2$ a současně $\mathrm{diam}(\overline{G}) \leq 2$.*

*2.3.14. Určete poloměr a průměr všech grafů platónských těles (Obrázky 9.26. a 9.27.) .*

## 2.4. Doplňková témata

### Periferie grafu

Analogicky jako jsme zavedli centrum grafu na straně 69, tak *periferie* grafu $G$ je podgraf grafu $G$ indukovaný na množině vrcholů s největší excentricitou.

Je zajímavé srovnat, že zatímco centrem grafu může být libovolný graf (Cvičení 2.4.2.), tak periferie ne. Například cesta $P_3$ obsahuje jeden vrchol excentricity 1 a dva vrcholy excentricity 2, a proto tato cesta nemůže být periferií sama sebe. Že cesta $P_3$ nemůže být periferií žádného většího grafu, pak vyplývá ze Cvičení 2.4.3.

**Odkazy:**

- http://mathworld.wolfram.com/GraphPeriphery.html

## Cvičení

*2.4.1. Graf nazveme* samocentrický*, jestliže jeho průměr je roven poloměru. Najděte příklad grafu, který má a) souvislé centrum a nesouvislou periferii a b) nesouvislé centrum a souvislou periferii.*

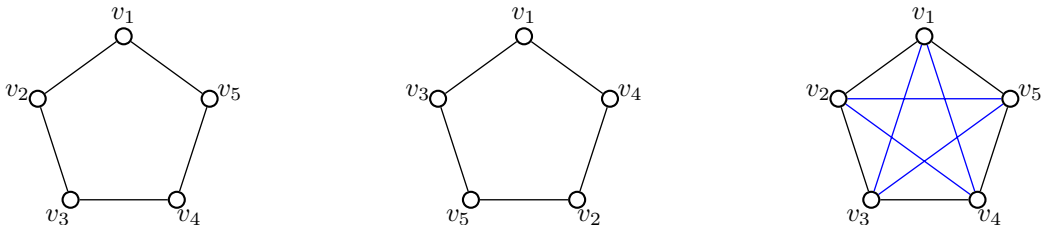
*2.4.2. Ukažte, že libovolný graf $G$ může být centrem nějakého grafu.*

*2.4.3. Ukažte, že graf $G$ je periferií nějakého grafu právě tehdy, když má buď všechny vrcholy s excentricitou 1 nebo nemá žádný vrchol s excentricitou 1.*

## Operace s grafy

Pro grafy je definována celá řada operací. Nejjednodušší je sjednocení grafů.

**Definice** *Sjednocení* grafů $G_1, G_2, \ldots, G_k$ je graf, jehož vrcholová množina je $\cup_{i=1}^{k} V(G_i)$ a hranová množina je $\cup_{i=1}^{k} E(G_i)$. Sjednocení grafů značíme $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$.




Obrázek 2.6.: *Sjednocení dvou cyklů.*

O grafech řekneme, že jsou *disjunktní*, jestliže jsou disjunktní jejich vrcholové množiny. Všimněte si, že definice sjednocení nevyžaduje, aby grafy $G$ a $H$ byly disjunktní. Například sjednocením dvou cyklů $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1$ a $v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_1$ dostaneme kompletní graf $K_5$ (Obrázek 2.6.). Součet grafu je speciálním případem sjednocení grafu v případě, že vrcholové množiny sjednocovaných grafů jsou disjunktní.

**Definice** *Součet* nebo *disjunktní sjednocení* grafů $G$ a $H$ je sjednocení grafů $G$ a $H$, jejichž vrcholové množiny jsou disjunktní. Součet grafů značíme $G + H$. Symbolem $kG$ budeme značit sjednocení takových $k$ kopií grafu $G$, kde každé dvě kopie jsou vrcholově disjunktní. Výsledný graf $kG$ nazýváme $k$ *kopií grafu* $G$.

V kapitole 1.3. jsme definovali „odebrání vrcholu“ $G - v$ a „odebrání hrany“ $G - uv$. Podobně můžeme definovat také „přidávání“ vrcholu $G + v$, což je graf, který z $G$ vznikne přidáním jednoho nového vrcholu.

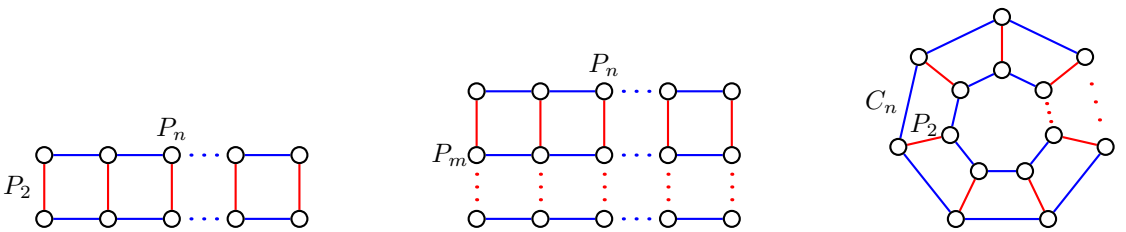
**Definice** *Spojení* grafu $G$ a vrcholu $v \notin V(G)$ je graf, který vznikne přidáním $v$ do vrcholové množiny $V(G)$ a současným přidáním všech hran $vx$, kde $x \in V(G)$. Spojení značíme $G \vee v$. Obecněji spojení dvou disjunktních grafů $G \vee H$ je graf, který vznikne ze součtu $G + H$ přidáním všech hran $xy$, kde $x \in V(G)$ a $y \in V(H)$.

Na Obrázku 2.7. jsou grafy $P_4$ a $C_3$, které současně tvoří součet $P_4 + C_3$ a jejich spojení $P_4 \vee C_3$.

Obrázek 2.7.: *Součet grafů* $P_4 + C_3$ *a spojení grafů* $P_4 \vee C_3$.

**Definice** *Kartézský součin* grafů $G$ a $H$ je graf, který má vrcholovou množinu $V(G)\square V(H)$ a dva vrcholy $(u_1, v_1)$ a $(u_2, v_2)$ jsou spojeny hranou právě, když platí $u_1 = u_2$ a $v_1v_2 \in E(H)$ nebo $v_1 = v_2$ a $u_1u_2 \in E(G)$. Kartézský součin grafů $G$ a $H$ značíme $G\square H$.

Příklady kartézského součinu grafů jsou na Obrázku 2.8.: jsou to grafy $P_n\square P_2$, kterým se říká *žebříky*, grafy $P_m\square P_n$, kterým se říká *sítě*, a graf $P_2\square C_n$, kterým se říká *hranoly*. Další příklad je hyperkrychle $Q_4 = C_4\square C_4$ na Obrázku 2.11. Existují i jiné druhy součinů grafů.

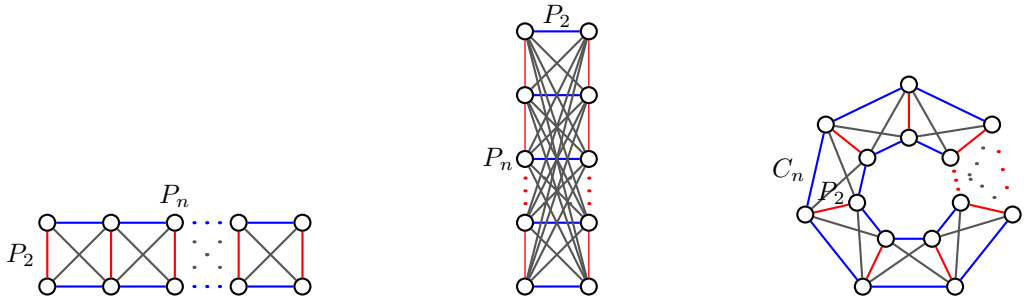



Obrázek 2.8.: *Žebřík* $P_2\square P_n$, *síť* $P_m\square P_n$ *a hranol* $P_2\square C_n$.

Kladnou *kartézskou mocninu* grafu $G^n$ můžeme zavést jako součin $\underbrace{G\Box G\Box\ldots\Box G}_{n \text{ krát}}$.

**Definice** *Kompozice* nebo také *složení grafů* $G$ a $H$ je graf, který má vrcholovou množinu $V(G)\times V(H)$ a dva vrcholy $(u_1,v_1)$ a $(u_2,v_2)$ jsou spojeny hranou právě, když platí $u_1=u_2$ a $v_1v_2\in E(H)$ nebo $u_1u_2\in E(G)$. Kompozici grafů $G$ a $H$ značíme $G[H]$.

Všimněte si, že kartézský součin grafů $G\Box H$ je podgrafem kompozice grafů $G[H]$ (srovnejte Obrázky 2.8. a 2.9.). Zatímco kartézský součin grafů je komutativní operace, tak kompozice grafů obecně není komutativní (Cvičení 2.4.10. a Obrázek 2.9.).




Obrázek 2.9.: *Kompozice grafů* $P_n[P_2]$, $P_2[P_n]$ *a* $C_n[P_2]$.

## Cvičení

*2.4.4.*$^{\heartsuit}$ *Ukažte, že platí* $|V(G\Box H)| = |V(G)|\cdot|V(H)|$.

*2.4.5.*$^{\heartsuit}$ *Kolik hran má graf* $G\Box H$*? Najdete podobný vztah jako ve Cvičení 2.4.4.?*

*2.4.6. Platí rovnost* $K_m\Box K_n = K_{m+n}$ *nebo* $K_m\Box K_n = K_{mn}$*?*

*2.4.7.*$^{?}$ *Kolik existuje různých cest mezi dvěma vrcholy v grafu* $P_m\Box P_n$*?*

*2.4.8.*$^{?}$ *Ukažte, že a) Petersenův graf (Obrázek 4.10.), b) Möbiův žebřík (Obrázek 2.21.) nejsou kartézské součiny žádných netriviálních grafů.*

*2.4.9. Najděte nekonečnou třídu grafů* $G, H$ *tak, aby kartézský součin* $G\Box H$ *byl současně kompozicí grafů* $G[H]$*. Mohou být oba grafy* $G$ *a* $H$ *netriviální?*

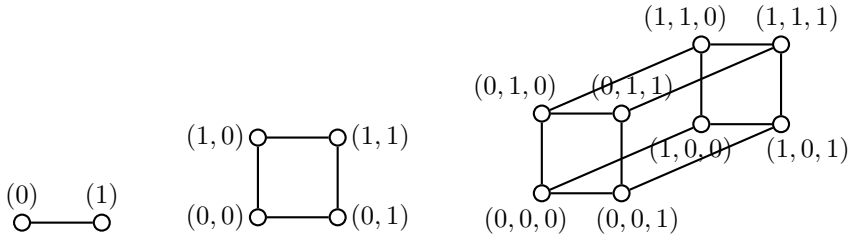
*2.4.10. Najděte nekonečnou třídu navzájem grafů* $G, H$ *tak, aby kompozice grafů* $G[H]$ *i* $H[G]$ *byly izomorfní (izomorfismus je zaveden na straně 102). Mohou být oba grafy* $G$ *a* $H$ *netriviální? Mohou mít oba grafy neprázdnou množinu hran?*

### Další třídy grafů

Nyní zavedeme několik tříd grafů. Smyslem není vyčerpávající přehled všech pojmenovaných tříd grafů (takový text by zabral desítky stránek), ale přehled takových tříd, které se objeví v dalším textu jako příklady respektive protipříklady, a nebo které se budou hodit při řešení některých cvičení.

#### Hyperkrychle

**Definice** *Hyperkrychle řádu* $k$ je graf, jehož vrcholy odpovídají uspořádaným $k$-ticím nul a jedniček, přičemž dva vrcholy jsou spojené hranou právě tehdy, když se odpovídající $k$-tice liší v jediné souřadnici. Hyperkrychli řádu $k$ značíme $Q_k$.



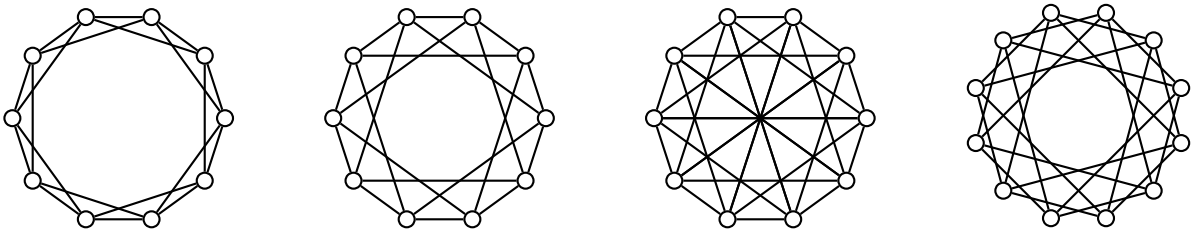

Obrázek 2.10.: *Hyperkrychle $Q_1$, $Q_2$ a $Q_3$.*

Obrázek 2.11.: *Dvě nakreslení hyperkrychle $Q_4$.*

Hyperkrychle libovolného řádu je bipartitní graf (Cvičení 2.4.11.). Na Obrázku 2.10. jsou příklady hyperkrychlí $Q_1$, $Q_2$ a $Q_3$ včetně popisu vrcholů. Na Obrázku 2.11. jsou dvě různá nakreslení hyperkrychle $Q_4$.

**Cirkulanty**

**Definice** Mějme dána kladná celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k$. *Cirkulantem* $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ rozumíme graf $G$ s vrcholovou množinou $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ a hranovou množinou $E = \{v_i v_{(i+a_j) \bmod n} : 0 \leq i \leq n-1 \wedge 1 \leq j \leq k\}$.



Obrázek 2.12.: *Cirkulanty $C_{10}(1,2)$, $C_{10}(1,3)$, $C_{10}(1,3,5)$ a $C_{12}(2,4)$.*

Příklady cirkulantů jsou na Obrázku 2.12. Mezi cirkulanty patří i cykly a kompletní grafy. Cirkulantem je i Möbiův žebřík na Obrázku 2.21., jedná se o cirkulant $C_{2k}(1,k)$.

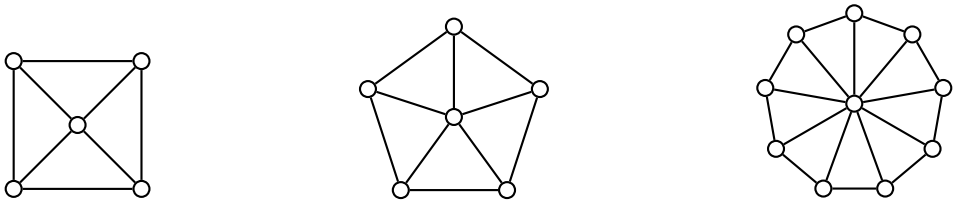
**Kola**

**Definice** Graf, který vznikne z cyklu $C_n$ with vertices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ přidáním nového vrcholu $v_0$ a všech hran $v_0 v_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, se nazývá *kolo* a značíme jej $W_{n+1}$.

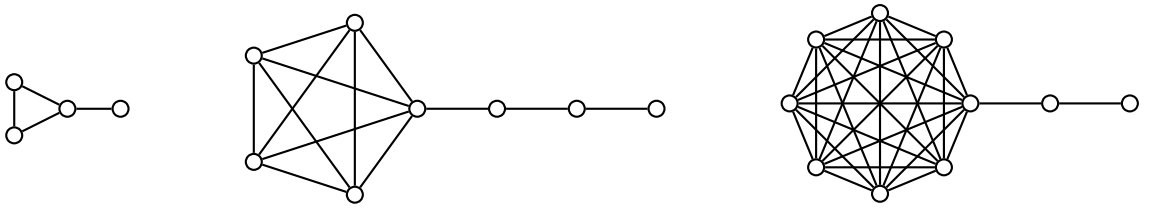
Nejmenší příklad kola je $W_{3+1}$, který je současně grafem $K_4$. Ačkoli bychom mohli psát $W_4$, preferujeme zápis $W_{3+1}$, aby nedošlo k mýlce. V některé literatuře index značí jen počet vrcholů cyklu. Na Obrázku 2.13. jsou příklady kol pro některá $n$.

**Lízátka**

**Definice** Graf, který vznikne z kompletního grafu $K_m$ pro $m \geq 3$ tak, že z jednoho vrcholu vede netriviální cesta délky $n$, značíme $L_{m,n}$ a nazýváme jej *lízátko*.



Obrázek 2.13.: *Kola* $W_{4+1}$, $W_{5+1}$ *a* $W_{9+1}$.



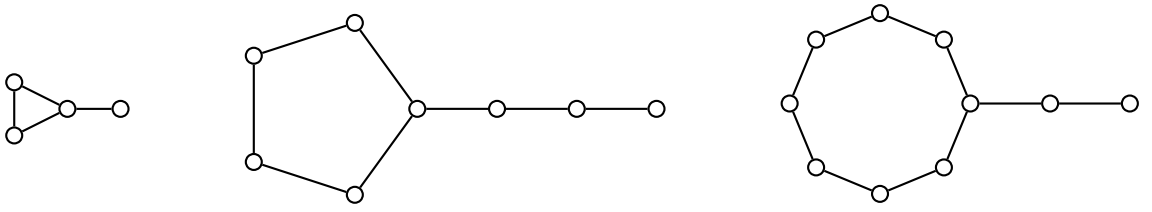
Obrázek 2.14.: *Lízátka* $L_{3,1}$, $L_{5,3}$ *a* $L_{8,2}$.

Na Obrázku 2.14. je nejmenší lízátko $L_{3,1}$, které je současně tzv. *prackou*, a lízátka $L_{5,3}$ a $L_{8,2}$. Všimněte si, že lízátka obsahují mnoho vrcholů s vysokou excentricitou, zatímco pro pulce tomu tak není.

**Pulci**

**Definice** Graf, který vznikne z cyklu $C_m$ tak, že z jednoho vrcholu vede netriviální cesta délky $n$, značíme $T_{m,n}$ a nazýváme jej *pulec*.

Na Obrázku 2.15. je nejmenší pulec $T_{3,1}$, který je současně lízátkem i prackou, a pulci $T_{5,3}$ a $T_{8,2}$. Anglicky se pulec nazývá „tadpole graph“. Graf $T_{m,1}$, speciální případ pulce, se nazývá *pánev*.



Obrázek 2.15.: *Pulci* $T_{3,1}$, $T_{5,3}$ *a* $T_{8,2}$.

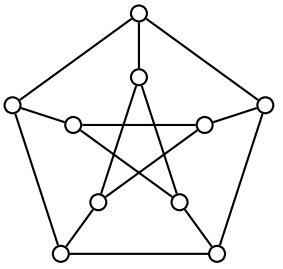
**Mlýny**

**Definice** Graf, který sestává z $m$ kopií kompletního grafu $K_n$, které sdílí jeden společný vrchol se nazývá *mlýn* a značí se $W_n^m$. Podobně graf, který sestává z $m$ kopií cyklu $C_n$, které sdílí jeden společný vrchol se nazývá *holandský mlýn* a značí se $D_n^m$.

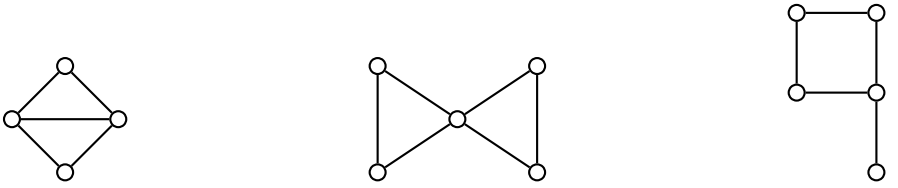
Terminologie je i v tomto případě popisná a značení pochází z anglického termínu „windmill“, respektive „Dutch windmill“.

**Speciální grafy**

Existuje celá řada grafů (nikoli tříd grafů), které mají své jméno. Mezi nejznámější patří Petersenův graf (Obrázek 2.16.). Ve cvičení 2.4.15. ukážeme, že Petersenův graf můžeme zadat jako *Kneserův graf*, tj. graf, jehož vrcholy jsou dvouprvkové podmnožiny nějaké pětiprvkové množiny a hrany



Obrázek 2.16.: *Petersenův graf.*



Obrázek 2.17.: *Grafy zvané drak, motýlek a vlajka.*

spojují ty vrcholy, které odpovídají disjunktním množinám. O jedné důležité vlastnosti Petersenova grafu je psáno na straně 196.

Další příklady pojmenovaných jsou *pracka* na Obrázku 2.15., Hoffman-Singletonův graf (Obrázek 1.17.), *drak* (anglicky „kite“, Obrázek 2.17.), *motýlek* (anglicky „bowtie“ nebo „butterfly“, Obrázek 2.17.) a také *vlajka* (anglicky „banner“, Obrázek 2.17.).

**Odkazy:**

- Přehled mnoha tříd grafů: http://mathworld.wolfram.com/topics/SimpleGraphs.html
- http://mathworld.wolfram.com/HypercubeGraph.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/Kneser_graph

## Cvičení

*2.4.11. Ukažte, že hyperkrychle $Q_k$ je pro všechna $k > 0$ bipartitní graf.*

*2.4.12. Je hyperkrychle $Q_n$ silně regulární graf?*

*2.4.13. Spočítejte, kolik existuje v hyperkrychli $Q_n$ různých cest $P_3$.*

*2.4.14. Ukažte, že pokud budeme hasseovský diagram relace $\subseteq$ podmnožiny na potenční množině nějaké $n$-prvkové množiny považovat za graf $G$, tak $G$ je izomorfní s grafem hyperkrychle $Q_n$. (Izomorfismus je zaveden na straně 102.)*

*2.4.15. Ukažte, že Petersenův graf můžeme zadat jako Kneserův graf. Kneserův graf $KG_{5,2}$ je graf, jehož vrcholy jsou dvouprvkové podmnožiny nějaké pětiprvkové množiny a hrany spojují ty vrcholy, které odpovídají disjunktním množinám.*

*2.4.16. Ukažte, že v Petersenově grafu neexistuje cyklus délky 7.*

*2.4.17. Sestavíme graf $O_k$. Množina vrcholů grafu $O_k$ je množina všech $k$-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, 2k+1\}$. Hranou jsou spojeny každé dva vrcholy, které odpovídají dvojici disjunktních množin. Ukažte, že obvod grafu $O_k$ je 6 pro $k \geq 3$.*

### Koncept nejdelší cesty

Protože pracujeme s jednoduchými konečnými grafy, tak každá cesta v daném grafu obsahuje nejvýše konečně mnoho vrcholů, a proto v každém grafu existuje nejvýše konečně mnoho různých cest. Mezi všemi cestami jistě existuje cesta (nebo více cest) největší délky, tj. taková cesta, že v daném grafu neexistuje žádná cesta s větším počtem hran (ani vrcholů).

*Problém nejdelší cesty* se v teorii grafů nazývá úloha nalezení nejdelší cesty v daném grafu. Na rozdíl od problému nejkratší cesty, který je dobře algoritmicky řešitelný (například Dijkstrův

algoritmus je polynomiální, v obecném grafu má složitost $O(n^2)$), tak nalezení nejdelší cesty je $NP$-úplný problém, což znamená, že není znám polynomiální algoritmus (a asi ani neexistuje) pro nalezení nejdelší cesty v obecném grafu, pokud $P \neq NP$.

Při důkazu celé řady tvrzení v této i následujících kapitolách několikrát pracujeme s nejdelší cestou v nějakém grafu. Obvykle stačí říci „nechť $P$ je nejdelší cesta v grafu“ a potom využít, že cestu $P$ není možno již dále prodlužovat. Všimněte si, že důkazy postavené na pojmu nejdelší cesty jsou spíše existenční než konstruktivní, protože nemáme žádný polynomiální algoritmus pro nalezení nejdelší cesty v obecném grafu.

V hamiltonovských grafech, kterými se budeme zabývat v kapitole 11., existuje cesta, která prochází všechny vrcholy v grafu. Taková cesta je pochopitelně nejdelší možná. Podobně má smysl mluvit o nejdelším tahu v grafu, protože konečný graf obsahuje nejvýše konečně mnoho hran. Grafy, ve kterých existuje tah obsahující všechny hrany, se také budeme zabývat v kapitole 11. Všimněte si ale, že nemá smysl zabývat se nejdelším sledem, protože v grafu s alespoň jednou hranou takový sled neexistuje (proč?).

**Otázky:**

- Je diametrická cesta vždy nejdelší cesta v grafu?
- Je ve stromu (stromy jsou zavedeny na straně 81) diametrická cesta vždy nejdelší cesta?
- Jestliže je v grafu $G$ diametrická cesta zároveň nejdelší cesta, musí být $G$ strom?

### Odkazy:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Longest_path_problem

## Cvičení

*2.4.18.*$^{\heartsuit}$ *Ukažte, že v netriviálním grafu muže být centrum realizováno jen jediným vrcholem.*

*2.4.19.*$^{\heartsuit}$ *Ukažte, že v každém netriviálním grafu je excentricita alespoň dvou vrcholů rovna průměru grafu (říkáme, že průměr netriviálního grafu je realizován v alespoň dvou vrcholech).*

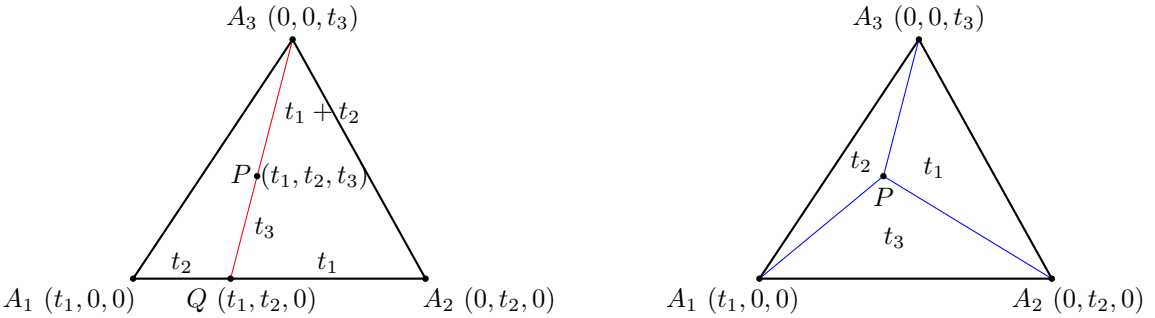
*2.4.20. Dokažte, že každé dvě nejdelší cesty v souvislém grafu mají společný vrchol.*

*2.4.21. Vysvětlete, proč pro nalezení nejdelší cesty v grafu $G$ s kladným ohodnocením hran $h : E \to \mathbb{R}^+$ (délky hran) nestačí vzít opačné ohodnocení hran $h'(e) = -h(e)$, $\forall e \in E(G)$, a hledat nejkratší cestu v grafu.*

*2.4.22. Vysvětlete, proč pro nalezení nejdelší cesty v grafu $G$ s kladným ohodnocením hran $h : E \to \mathbb{R}^+$ (délky hran) nestačí vzít ohodnocení s převrácenou váhou $h'(e) = \frac{1}{h(e)}$, $\forall e \in E(G)$, a hledat nejkratší cestu v grafu.*

### Barycentrické souřadnice

Mějme dán trojúhelník $A_1A_2A_3$. Barycentrické souřadnice bodu $P$ v rovině jsou trojice reálných čísel $(t_1, t_2, t_3)$, které odpovídají takovým hmotnostem (hmotným bodům) umístěným do vrcholů trojúhelníka $A_1A_2A_3$, aby bod $P$ ležel v jejich hmotném středu. Každá trojice hmotných bodů má jednoznačně určený hmotný střed $P$, avšak jednomu bodu $P$ odpovídá nekonečně mnoho trojic, které se liší o násobek nenulového čísla. Má-li bod $P$ barycentrické souřadnice $(t_1, t_2, t_3)$, tak i $(kt_1, kt_2, kt_3)$ pro každé $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ jsou souřadnice stejného bodu. Řekneme, že barycentrické souřadnice jsou *normované*, jestliže součet $t_1 + t_2 + t_3 = 1$. Body o souřadnicích $(t_1, 0, 0)$, $(0, t_2, 0)$ a $(0, 0, t_3)$ odpovídají po řadě vrcholům trojúhelníka $A_1$, $A_2$, $A_3$. Pro body uvnitř trojúhelníka $A_1A_2A_3$ jsou



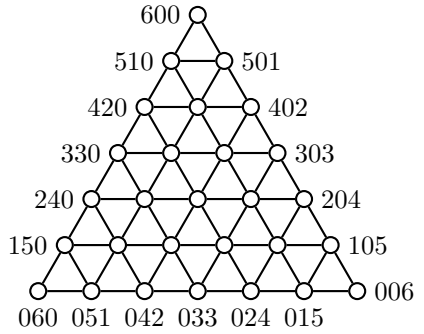

Obrázek 2.18.: *Barycentrické souřadnice.*

všechny tři barycentrické souřadnice kladné, na hranici je jedna souřadnice nulová a pro body mimo trojúhelník je jedna nebo více souřadnic záporných.

Abychom určili barycentrické souřadnice $(t_1, t_2, t_3)$ libovolného bodu $P$ trojúhelníka, Najdeme průsečík $Q$ úsečky $A_1A_2$ s polopřímkou $A_3P$. Délka úseku $A_1Q$ odpovídá souřadnici $t_2$, délka úseku $QA_2$ odpovídá souřadnici $t_1$. Souřadnice $t_3$ pak odpovídá takové hmotnosti umístěné do bodu $A_3$, která vyváží hmotnost $t_1 + t_2$ umístěnu do bodu $Q$ (Obrázek 2.18. vlevo).

Navíc obsahy trojúhelníků $PA_2A_3$, $PA_3A_1$ a $PA_1A_2$ jsou přímo úměrné souřadnicím $t_1$, $t_2$, $t_3$ (Obrázek 2.18. vpravo).

Pro body v síti se základnou z $k$ trojúhelníků na Obrázku 2.19. zvolíme hmotnosti vrcholů „trojúhelníka“ tak, že všechny „uzly“ v trojúhelníkové síti mají celočíselné barycentrické souřadnice se součtem $t_1+t_2+t_3 = k$. Hranou spojíme dva vrcholy, jestliže dvě jejich barycentrické souřadnice se liší o jedničku (jedna souřadnice o jedničku větší a druhá o jedničku menší). Pomocí barycentrických souřadnic můžeme elegantně vyřešit některé úlohy (Cvičení 2.2.12.). S využitím barycentrických souřadnic se dokazují některá tvrzení v geometrii.




Obrázek 2.19.: *Diskrétní barycentrické souřadnice.*

Barycentrické souřadnice jsou speciálním případem *homogenních souřadnic*, které zavedl Möbius[14]. Pojem barycentrických souřadnic je možno zobecnit i pro dva, čtyři nebo i více bodů $A_i$. Zobecnění je ponecháno jako cvičení.

**Odkazy:**

- http://www.cut-the-knot.org/triangle/glasses.shtml
- http://mathworld.wolfram.com/BarycentricCoordinates.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/Barycentric_coordinates_(mathematics)

## Cvičení

*2.4.23.*$^{\heartsuit}$ *Jak by vypadal graf, který spojuje body se čtyřmi celočíselnými barycentrickými souřadnicemi?*

*2.4.24. Zobecněte pojem barycentrických souřadnic pro libovolný počet $k$ bodů, $k \geq 2$.*

[14] O Augustu Möbiovi je psáno na straně 79.

### Wienerův index

V grafu, který reprezentuje komunikační síť, preferujeme co nejmenší vzdálenosti jednotlivých vrcholů, účastníků. Může však být přípustná i situace, kdy většina dvojic vrcholů může komunikovat prostřednictvím krátkých cest, přičemž několik málo dvojic vrcholů je ve velké vzdálenosti. Potom spíše než průměr grafu je zajímavá průměrná vzdálenost vrcholů v grafu, kterou můžeme vypočítat dle vztahu

$$\frac{\sum_{u,v\in V(G)} \operatorname{dist}(u,v)}{\binom{n}{2}}.$$

Zatímco čitatel odpovídá součtu vzdáleností všech dvojic vrcholů, tak jmenovatel odpovídá počtu dvojic vrcholů. A právě čitatel tohoto zlomku se nazývá *Wienerův index* grafu $G$ a značí se $W(G)$, případně $D(G)$. Pro daný graf $G$ je $W(G) = \sum_{u,v\in V(G)} \operatorname{dist}(u,v)$.

Tento parametr využíval Americký chemik Harry Wiener k popisu topologických invariantů molekul s různou strukturou a stejným počtem atomů (tzv. strukturálních izomerů). Parametr nazýval „path number“ (počet cest) a využil jej například při studiu bodu varu parafínu.

Není těžké si rozmyslet, že pro daný pevně zvolený počet vrcholů $n$ souvislého stromu $T$ má největší Wienerův index cesta $P_n$ a nejmenší Wienerův index má hvězda $K_{1,n-1}$ (Cvičení 2.4.27.).

**Odkazy:**

- https://en.wikipedia.org/wiki/Wiener_index
- https://en.wikipedia.org/wiki/Structural_isomer

## Cvičení

*2.4.25. Určete Wienerův index $W(P_n)$ cesty $P_n$.*

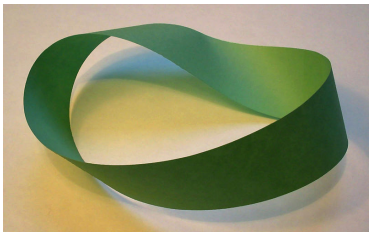
*2.4.26. Určete Wienerův index $W(K_{1,n-1})$ hvězdy $K_{1,n-1}$.*

*2.4.27. Ukažte, že Wienerův index $W(T_n)$ stromu s $n$ vrcholy je alespoň $(n-1)^2$ (Wienerův index hvězdy) a nejvýše $\binom{n+1}{3}$ (Wienerův index cesty).*

*2.4.28. Mějme libovolný souvislý graf $G$ s $n$ vrcholy. Ukažte, že $W(G) \leq W(P_n)$.*

### August Ferdinand Möbius (17. listopadu 1790 – 26. září 1868)

August Ferdinand Möbius byl německý matematik a astronom. Narodil se v městečku Schulpforta. Ačkoliv své studium začal na právech, nakonec vystudoval matematiku na univerzitě v Lipsku. Habilitoval se v roce 1815 z astronomie. O rok později se stal výjimečným profesorem a astronomem v Lipské hvězdárně. Byl jedním ze zakladatelů Saské královské vědecké společnosti v roce 1846.



Obrázek 2.20.: *August Ferdinand Möbius a Möbiův list.*

Obrázek 2.21.: *Dvě nakreslení Möbiova žebříku.*

Obrázek 2.22.: *Mezinárodní symbol pro recyklaci obsahuje Möbiův list.*

Mezi jeho nejznámější objevy patří bezesporu Möbiův list, což je neorientovatelná dvoudimenzionální plocha s jedinou stranou. Möbius zavedl v projektivní geometrii homogenní souřadnice. Na Obrázku 2.21. je graf, kterému se říká Möbiův žebřík, protože připomíná Möbiův list. Möbiův žebřík $M_{2n}$ vznikne ze sudého cyklu $C_{2n}$ přidáním všech hran, které spojují protilehlé vrcholy.

**Odkazy:**

- http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mobius.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/August_Ferdinand_Möbius

# Kapitola 3. Stromy, cykly a bipartitní grafy

Stromy patří ke strukturám, se kterými se setkáváme nejen v přírodě, ale i v řadě aplikací: třídící a rozhodovací algoritmy, rodokmeny, ... Všechny příklady mají jedno společné: příslušná struktura neobsahuje (nebo by neměla obsahovat) objekty spojené „v kruhu“. Takový „uzavřený kruh“ nebo „cyklus“ by odpovídal nekonečné smyčce v algoritmu, incestu v rodokmenu, a podobně.

## 3.1. Stromy

V této kapitole se budeme věnovat strukturám, které neobsahují cyklus. Ukážeme, že právě tato jednoduchá podmínka spolu se souvislostí stačí, abychom popsali strukturu „stromu“.

**Definice** Graf se nazývá *acyklický*, jestliže žádný jeho podgraf není cyklus. Acyklický graf se nazývá *les*. Souvislý acyklický graf se nazývá *strom*.

Strom budeme obvykle označovat $T$, případně $T_n$, pokud budeme chtít zdůraznit, že se jedná o strom s $n$ vrcholy.

Podle definice les je takový graf, jehož každá komponenta je stromem. To je snadné si zapamatovat. Definici bychom mohli alternativně vyslovit takto: acyklický graf je les, souvislý les je strom[15], což se pamatuje jen o málo hůř.

Ačkoli je definice stromu poměrně jednoduchá, jeho struktura je natolik zajímavá, že můžeme vyslovit celou řadu netriviálních tvrzení. Začneme dvěma jednoduchými pozorováními, které využijeme při (indukčních) důkazech celé řady dalších tvrzení.

**Lemma 3.1.** *Každý strom s alespoň dvěma vrcholy má nejméně jeden vrchol stupně* 1.

*Důkaz.* Důkaz povedeme sporem. Vezměme nějakou nejdelší cestu $P = v_1, v_2, \ldots, v_k$ v grafu $T_n$. Pokud by $T_n$ neobsahoval žádný vrchol stupně 1 (a protože má alespoň dva vrcholy, tak ani stupně 0), musí být koncový vrchol $v_k$ cesty $P$ stupně alespoň 2. Vrchol $v_k$ má tedy kromě vrcholu $v_{k-1}$ ještě jednoho souseda mezi vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_{k-2}$, jinak by nebyla $P$ nejdelší. Označme jej $v_\ell$. Potom ale $v_\ell, v_{\ell+1}, \ldots, v_k, v_\ell$ tvoří cyklus v $T_n$, což je ve sporu s definicí stromu. □

Strom s jediným vrcholem se nazývá *triviální strom*. V opačném případě budeme strom nazývat *netriviální*. Vrchol stupně 1 v grafu se nazývá *list*. Triviální strom je natolik výjimečný, že někteří autoři jej za strom nepovažují, protože celá řada tvrzení platí pro všechny stromy s výjimkou triviálního stromu. Lemma 3.1. můžeme přeformulovat: v každém netriviálním stromu existuje alespoň jeden list. Ve Cvičení 3.1.1. ukážeme, že v každém netriviálním stromu existují dokonce alespoň dva listy.

**Lemma 3.2.** *Odebráním libovolného listu z netriviálního stromu s $n$ vrcholy dostaneme strom s $n-1$ vrcholy.*

*Důkaz.* Mějme libovolný list $v$ netriviálního stromu $T_n$. Označíme $T_{n-1} = T_n - v$. List $v$ se jistě nenachází na žádné cestě, která spojuje nějaké dva jiné vrcholy $x$, $y$ stromu $T_n$ (proč?). Proto je každá $(x, y)$-cesta v $T_n$ také v $T_{n-1}$ a $T_{n-1}$ souvislý. Navíc odebráním jednoho vrcholu a jedné hrany jistě nevznikne cyklus. Ukázali jsme, že graf $T_{n-1}$ je souvislý a acyklický, a je proto stromem s $n-1$ vrcholy. □

Definice stromu je sice výstižná, není ale šikovná pro algoritmické ověření, zda daný graf je nebo není strom. Existenci cyklu v grafu není snadné pro velké grafy vyvrátit. Následující věta

15

Některé druhy stromů mají několik kmenů, které vyrůstají ze společného kořenového systému. Jednotlivé stromy (kmeny) jsou proto geneticky identické a je možno je považovat za jeden organismus. Největší známá taková kolonie je osika ve státě Utah, které se říká „Pando“. Tento „souvislý les“ roste na rozloze přibližně 0.43 km$^2$. Odhaduje se, že celková váha živé hmoty je asi 6 000 tun.

Viz také http://en.wikipedia.org/wiki/Largest_organism.

udává další podmínky, které jsou ekvivalentní definici stromu. Jedná se o účinný arzenál podmínek pro ověřování, zda nějaký graf je nebo není strom.

**Věta 3.3.** *Nechť $T_n$ je graf s $n$ vrcholy. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

*(i) $T_n$ je strom,*
*(ii) $T_n$ je acyklický a souvislý,*
*(iii) $T_n$ je acyklický a má $n-1$ hran,*
*(iv) $T_n$ je souvislý a má $n-1$ hran,*
*(v) $T_n$ je souvislý a vynecháním libovolné hrany se souvislost poruší.*

*Důkaz.* Tvrzení (i) a (ii) jsou ekvivalentní, protože se jedná o definici stromu. Dále ukážeme platnost implikací (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (iv), (iv) $\Rightarrow$ (ii) a nakonec (ii) $\Rightarrow$ (v) a (v) $\Rightarrow$ (ii). Tím bude důkaz kompletní (proč?).
„(ii) $\Rightarrow$ (iii)“ Stačí ukázat, že strom má $n-1$ hran. Tvrzení dokážeme indukcí vzhledem k počtu vrcholů.
*Základ indukce:* Triviální strom má $n-1=0$ hran.
*Indukční krok:* Netriviální strom $T_n$ s $n$ vrcholy musí obsahovat list $v$ (podle Lemmatu 3.1.) a jeho odebráním (a odebráním jediné incidentní hrany) dostaneme podle Lemmatu 3.2. strom $T_{n-1} = T_n - v$ s $n-1$ vrcholy, který má dle indukčního předpokladu $n-2$ hran. Strom $T_n$ má proto $n-2+1 = n-1$ hran a tvrzení platí.
„(iii) $\Rightarrow$ (iv)“ Stačí ukázat, že acyklický graf s $n-1$ hranami je souvislý. Předpokládejme, že $T_n$ má $k$ komponent $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Každá komponenta je souvislá a podle předpokladu také acyklická, a je proto strom. Počet vrcholů komponenty $S_i$ označíme $n_i$, kde $i = 1, 2, \ldots, k$. Podle již dokázané implikace (ii) $\Rightarrow$ (iii) víme, že každá komponenta $S_i$ obsahuje $n_i - 1$ hran. Sečteme všechny hrany v grafu $T_n$

$$\sum_{i=1}^{k} |E(S_i)| = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = \left( \sum_{i=1}^{k} n_i \right) - \sum_{i=1}^{k} 1 = n - k.$$

a porovnáme s počtem hran v grafu $T_n$, kterých je $n-1$. Dostaneme $k=1$, proto má graf $T_n$ jedinou komponentu, což znamená, že je souvislý.
„(iv) $\Rightarrow$ (ii)“ Ukážeme sporem, že $T_n$ je acyklický. Pokud by $T_n$ obsahoval cyklus, tak vynecháním libovolné hrany $uv$ cyklu neporušíme souvislost (obsahovala-li nějaká cesta mezi dvěma vrcholy v grafu $T_n$ hranu $uv$, stačí v ní tuto hranu nahradit $(u,v)$-sledem). Odebírání hran opakujeme, dokud nedostaneme souvislý acyklický graf (strom), který má nejvýše $n-2$ hran (alespoň jednu jsme odebrali!). To je však ve sporu s již dokázanými implikacemi (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv), podle kterých má $T_n$ právě $n-1$ hran.
„(ii) $\Rightarrow$ (v)“ Nepřímo ukážeme, že odebráním libovolné hrany souvislého acyklického grafu se poruší souvislost. Jestliže odebráním hrany $uv$ se souvislost neporuší, tak $(u,v)$-cesta v grafu $T_n - uv$ spolu s hranou $uv$ tvoří cyklus v $T_n$, a proto $T_n$ není acyklický graf a není strom.
„(v) $\Rightarrow$ (ii)“ Postupujeme opět nepřímo. Pokud graf $T_n$ není acyklický, obsahuje cyklus $C$ a vynecháním libovolné hrany $uv$ cyklu $C$ souvislost grafu neporušíme, protože obsahuje-li některý sled mezi dvěma vrcholy grafu $T_n$ hranu $uv$, tak ji můžeme nahradit $(u,v)$-cestou z cyklu $C$. □

Všimněte si, že ze tří vlastností: souvislost, acykličnost a mít $n-1$ hran, kterékoliv dvě definují strom. Navíc stromy mají výsadní postavení na hranici souvislosti a acykličnosti.

- ze stromu už nemůžeme žádnou hranu vynechat: porušila by se souvislost.
- do stromu nemůžeme žádnou hranu přidat: porušila by se acykličnost.

Díky souvislosti víme, že ve stromu existuje mezi každými dvěma vrcholy cesta, naproti tomu acykličnost stromu zajistí, že putování ve stromu je velmi omezené. Následuje další nutná a postačující podmínka pro to, aby graf byl strom.

**Věta 3.4.** *Graf je strom právě tehdy, když mezi každými dvěma jeho vrcholy existuje právě jedna cesta.*

*Důkaz.* Věta má tvar ekvivalence, musíme dokázat obě implikace.
„$\Rightarrow$“ Nepřímo: pokud mezi některými dvěma vrcholy grafu $G$ existují alespoň dvě různé cesty $P_1$, $P_2$ (liší se alespoň jednou hranou), tak jejich navázáním dostaneme uzavřený sled. Vyskytuje-li se v tomto uzavřeném sledu například

hrana $uv$ jen jednou, tak odebráním hrany $uv$ dostaneme ze sledu otevřený $(u, v)$-sled. Podle Lemmatu 2.1. můžeme případným vynecháním vrcholů z $(u, v)$-sledu dostat $(u, v)$-cestu. Tato $(u, v)$-cesta neobsahuje hranu $uv$. Nyní je zřejmé, že hrana $uv$ spolu s $(u, v)$-cestou tvoří cyklus v grafu $G$, a proto $G$ není strom.

„⇐“ Opět nepřímo: Pokud graf není strom, potom buď není souvislý a mezi některými dvěma vrcholy neexistuje ani jedna cesta, nebo obsahuje cyklus, a potom mezi každými dvěma vrcholy cyklu existují alespoň dvě různé cesty. □

Následující věta je jednoduchým důsledkem Věty 3.4.

**Důsledek 3.5.** *Mějme nějaký strom $T$ na alespoň třech vrcholech. Přidáním jedné hrany do stromu $T$ vznikne právě jeden cyklus.*

*Důkaz.* Protože mezi libovolnými dvěma vrcholy $u$, $v$ stromu $T$ existuje právě jedna $(u, v)$-cesta, tak přidáním hrany $uv$ dostaneme cyklus. Naopak, pokud by přidáním hrany $uv$ vznikly alespoň dva cykly (liší se alespoň jednou hranou, ale nemusí být nutně hranově disjunktní), oba musí obsahovat hranu $uv$ a odebráním $uv$ z každého cyklu bychom dostali různou $(u, v)$-cestu ve stromu $T$, což není možné. □

**Otázka:** Kde se v důkazu Důsledku 3.5. použila Věta 3.4.?

V kapitole 2.3. jsme zavedli excentricitu vrcholu, poloměr a průměr grafu. Pro stromy jsou obecné definice těchto pojmů samozřejmě stejné, avšak vzhledem ke struktuře stromů můžeme některá tvrzení zpřísnit. Ve stromu s alespoň třemi vrcholy je vždy $\mathrm{rad}(G) < \mathrm{diam}(G)$ (Cvičení 3.1.16.).

Na straně 69 jsme definovali centrum grafu. V rámci cvičení jsme ukázali, že centrum obecného grafu může obsahovat libovolný počet vrcholů. Pro stromy je opět situace jednodušší, jak ukazuje následující tvrzení.

**Věta 3.6.** *Centrum stromu je buď jediný vrchol a nebo dva vrcholy spojené hranou.*

*Důkaz.* Tvrzení dokážeme indukcí vzhledem k počtu vrcholů.

*Základ indukce:* Pro graf s jedním nebo dvěma vrcholy tvrzení platí triviálně, neboť celý strom je centrem.

*Indukční krok:* Mějme strom $T$ na alespoň třech vrcholech. Sestavme strom $T'$, který vznikne ze stromu $T$ odstraněním všech listů (tomuto procesu se říká *holení*).

Ukážeme, že stromy $T$ a $T'$ mají stejné centrum. Podle Lemmatu 3.2. je $T'$ také strom. Protože z každé cesty zůstanou vnitřní vrcholy, zůstane v $T'$ alespoň jeden vrchol.

Pro každý vrchol $v$ ve stromu $T$ jsou nejvzdálenější vrcholy listy, jinak bychom mohli cestu z vrcholu $v$ prodloužit do vzdálenějšího vrcholu. Protože jsme z grafu $T$ odstranili všechny listy a žádná cesta mezi zbývajícími vrcholy neobsahuje list jako vnitřní vrchol, musí pro každý vrchol $v$ ve stromu $T'$ platit $\mathrm{ecc}_{T'}(v) = \mathrm{ecc}_T(v) - 1$. Navíc excentricita listu ve stromu je větší než excentricita jeho sousedního vrcholu (Cvičení 3.1.15.). To znamená, že vrcholy s nejmenší excentricitou ve stromu $T'$ jsou stejné jako vrcholy s nejmenší excentricitou ve stromu $T$, a proto stromy $T$ a $T'$ mají stejné centrum. Tvrzení plyne z principu matematické indukce. □

Důkaz Věty 3.6. nám dává návod, jak centrum stromu najít. Máme-li triviální strom nebo strom na dvou vrcholech, je centrum celý graf. Jinak postupným holením stromu, kdy v každém kroku odebereme všechny listy, dostaneme po $\lfloor \mathrm{diam}(T)/2 \rfloor$ krocích centrum stromu.

**Otázky:**

- Je diametrická cesta ve stromu určena jednoznačně?
- Může v nějakém stromu na alespoň třech vrcholech být poloměr roven průměru?

## Cvičení

*3.1.1. Dokažte, že každý netriviální strom má nejméně dva listy.*

*3.1.2. Bez použití Věty 3.3. dokažte, že graf $T_n$ s $n$ vrcholy je strom právě tehdy, jestliže má $n - 1$ hran a je souvislý.*

*3.1.3. Bez použití Věty 3.3. dokažte, že graf $T_n$ s $n$ vrcholy je strom právě tehdy, jestliže má $n - 1$ hran a je acyklický.*

*3.1.4. Dokažte, že strom $T_n$ na alespoň třech vrcholech je cesta právě tehdy, když $\Delta(T_n) = 2$.*

*3.1.5. Dokažte, že strom $T_n$ je hvězdou (*hvězda *je strom, obsahující nejvýše jeden vrchol stupně vyššího, než 1) právě tehdy, když $\Delta(T_n) = n - 1$.*

*3.1.6. Mějme strom $T_n$ a nechť $\Delta(T_n) = k$. Dokažte, že potom $T_n$ obsahuje alespoň $k$ vrcholů stupně 1.*

*3.1.7. Dokažte, že strom $T_n$ je netriviální cesta právě tehdy, když obsahuje přesně dva vrcholy stupně 1.*

*3.1.8. Nechť $F_n$ je les s $k$ komponentami. Dokažte, že $h(F_n) = n - k$.*

*3.1.9. Charakterizujte třídu grafů, pro které platí, že každý jejich souvislý podgraf je jejich indukovaným podgrafem.*

*3.1.10. Nechť $T_n$ je netriviální strom s $n$ vrcholy a $v$ je jeho vrchol takový, že $\deg(v) = k$. Dokažte, že $\omega(T_n - v) = k$.*

*3.1.11. Použijte výsledek (předcházejícího) Cvičení 3.1.10. k důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (iii) ve Větě 3.3.*

*3.1.12. Dokažte, že má-li graf $G$ s alespoň jednou hranou všechny vrcholy sudého stupně, potom $G$ obsahuje cyklus.*

*3.1.13. Dokažte, že je-li $\delta(G) \geq 2$, potom $G$ obsahuje cyklus.*

*3.1.14. Mějme graf $G$. Dokažte, že je-li $\delta(G) \geq 2$, potom $G$ obsahuje dokonce i cyklus délky alespoň $\delta(G) + 1$.*

*3.1.15. Ukažte, že ve stromu $T$ s alespoň třemi vrcholy je excentricita listového vrcholu vždy větší, než excentricita sousedního vrcholu.*

*3.1.16. Ukažte, že ve stromu $T$ s alespoň třemi vrcholy je vždy $\mathrm{rad}(T) < \mathrm{diam}(T)$.*

*3.1.17. Mějme strom $T$, jehož každý vrchol je lichého stupně. Ukažte, že odebráním libovolné hrany $e$ stromu $T$ dostaneme graf, který má právě dvě liché komponenty. Lichá komponenta má lichý počet vrcholů.*

*3.1.18. Mějme strom $T$, který obsahuje vrcholy pouze dvou stupňů: 1 a $k$. Určete, jakých hodnot může nabývat počet vrcholů $n$ stromu $T$.*

*3.1.19. Mějme netriviální strom $T$, ve kterém je každý list sousední s nějakým vrcholem stupně alespoň 3. Ukažte, že ve stromu $T$ existují alespoň dva listy sousední se společným sousedním vrcholem.*

*3.1.20. Mějme strom $T$ s $2k$ vrcholy lichého stupně. Dokažte, že strom $T$ je možno rozložit na $k$ cest.*

*3.1.21. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení: každý graf, který má méně hran než vrcholů, obsahuje alespoň jednu komponentu, která je stromem.*

*3.1.22. Mějme strom $T$ se sudým počtem vrcholů. Ukažte, že ve stromu $T$ existuje faktor, který má všechny vrcholy lichého stupně. Ukažte také, že tento faktor je jediný.*

*3.1.23. Mějme strom $T$ se sudým počtem vrcholů. Ze stromu $T$ odebereme všechny hrany, které spojují dvě komponenty se sudým počtem vrcholů. Ukažte, že výsledný faktor má všechny vrcholy lichého stupně a je jediný. Proč je důležité, aby strom $T$ měl sudý počet vrcholů?*

## 3.2. Kostry

V minulé podkapitole jsme ukázali, že stromy mají výsadní postavení na hranici souvislosti a acykličnosti: ze stromu není možné žádnou hranu vynechat aniž by se porušila souvislost a do stromu není

možné žádnou hranu přidat aniž by se porušila acykličnost. Má proto smysl hledat v souvislém grafu podgraf, který je strom. Takový podgraf zůstane souvislý a přitom vyřadíme „nadbytečné“ hrany.

**Definice** Mějme graf $G$. *Kostrou* grafu $G$ nazveme každý jeho faktor, který je současně stromem.

Z definice ihned vidíme, že kostra existuje pouze pro všechny souvislé grafy (Cvičení 3.2.1.), nesouvislé grafy kostru nemají. Z předchozích kapitol víme, že kostra je speciální podgraf grafu $G$:

- kostra je faktor (obsahuje všechny vrcholy grafu $G$),
- kostra je souvislá (mezi každými dvěma vrcholy grafu $G$ existuje cesta, která obsahuje jen hrany kostry),
- kostra je acyklická.
- pro pevně zvolenou kostru grafu $G$ je cesta mezi dvěma vrcholy po hranách kostry určena jednoznačně,

Kostry grafu využijeme například při sestavování soustavy lineárně nezávislých rovnic z Kirchhoffových zákonů[16]. Nejprve najdeme kostru v grafu reprezentujícím elektrickou síť, a potom přidáváme různé hrany tak, abych uzavřeli různé obvody a pro každý sestavíme lineární rovnici.

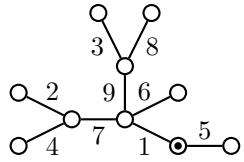
Mějme dán graf $G$. Úloha najít nějakou kostru grafu $G$ je dobře známá. Existují algoritmy, které najdou kostru grafu s $n$ vrcholy a $m$ hranami v čase řádově $O(m+n)$ (Cvičení 3.2.4.). Dokonce je možno v čase $O((m+n)\log n)$ najít minimální kostru hranově ohodnoceného grafu $G$. Problému nalezení minimální kostry se v tomto textu nebudeme věnovat. Naproti tomu ukážeme, jak určit počet všech koster kompletního grafu, jestliže rozlišujeme jeho vrcholy.

V důkazu následujícího tvrzení budeme pracovat s *kořenovým stromem*, což je dvojice $(T, r)$, kde $T$ je nějaký strom a $r \in V(T)$ je *kořen* stromu $T$. V každém kořenovém stromu můžeme všechny hrany (dle Věty 3.4. jednoznačně) zorientovat, například od listů ke kořenům.

**Věta 3.7. Cayleyho vzorec**
*Pro každé $n \geq 2$ je počet různých stromů s $n$ vrcholy roven $n^{n-2}$.*

*Důkaz.* Důkaz provedeme metodou dvojího počítání. Dvěma způsoby spočítáme tzv. *povykosy* (*po*stup *vý*roby *ko*řenových *s*tromů) s $n$ vrcholy.

Nejprve vyrobíme kořenový strom tak, že mezi vrcholy postupně nakreslíme hrany a jeden vrchol zvolíme za kořen. Na Obrázku 3.1. je kořen vyznačen puntíkem. Vezměme libovolný strom $T_n$ s $n$ vrcholy. Strom $T_n$ má $n-1$ hran, které můžeme postupně přidat v libovolném pořadí. Počet takových pořadí je $(n-1)!$. Za kořen $r$ můžeme vybrat libovolný z $n$ vrcholů. Označíme-li $k(n)$ počet různých stromů s $n$ vrcholy, tak počet různých povykosů je $n(n-1)!k(n)$ (nezávislé volby: $k(n)$ různých koster; $n$ možností, jak zvolit kořen; $(n-1)!$ pořadí, jak přidat hrany).




Obrázek 3.1.: *Kořenový strom s $n$ vrcholy a postupně přidanými $n-1$ hranami.*

V kořenovém stromu $(T_n, r)$ zorientujeme hrany od listů ke kořenu. Přitom z žádného vrcholu jistě nemůže vést více než jedna hrana, příchozích hran může být libovolný počet.

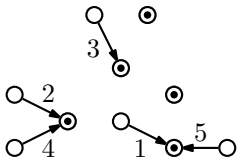
Povykosy můžeme sestavovat druhým způsobem, kdy přidáváme orientované hrany mezi $n$ izolovaných vrcholů. Na Obrázku 3.2. jsou kořeny komponent opět vyznačeny puntíkem. Současně dbáme ta to, aby v každé komponentě takto sestavovaného lesa byl právě jeden vrchol (kořen komponenty), ze kterého žádná orientovaná hrana nevychází. Přidáme-li v nějakém kroku novou orientovanou hranu mezi dvě komponenty, koncový vrchol hrany můžeme zvolit

[16] O Gustavu Kirchhoffovi je psáno na straně 100.

libovolně, ale výchozí vrchol můžeme volit pouze mezi kořeny zbývajících $i-1$ komponent. Při konstrukci povykosu přidáme celkem $n-1$ hran (poslední hranu přidáváme mezi dvě komponenty) a existuje proto

$$\underbrace{(n(n-1))\cdot(n(n-2))\cdots(n\cdot 1)}_{n-1} = \prod_{i=2}^{n} n(i-1) = n^{n-1}(n-1)!$$

různých způsobů sestavení povykosů.



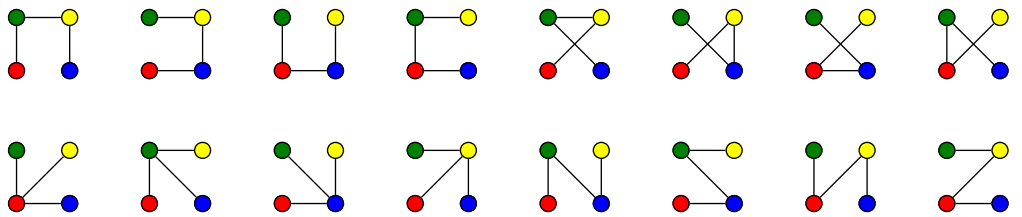

Obrázek 3.2.: *Kořenový „les“ s $n$ vrcholy a několika přidanými orientovanými hranami.*

Dvěma různými způsoby jsme spočítali počet stejných objektů. Porovnáme oba vztahy a dostaneme

$$n(n-1)!k(n) = n^{n-1}(n-1)!$$
$$k(n) = n^{n-2}.$$

Tento důkaz z roku 1998, jehož autorem je Jim Pitman, je asi nejkratší ze známých důkazů Cayleyho vzorce. □

Cayleyho vzorec udává obecný vztah[17] pro počet koster kompletního grafu. Například graf $K_4$ má 16 koster, jestliže rozlišíme vrcholy čtyřmi barvami (Obrázek 3.3.). Pokud bychom vrcholy nerozlišovali, existují jen dva stromy na čtyřech vrcholech, které se liší svou strukturou: $P_4$ a $K_{1,3}$. Co to znamená „lišit se strukturou“ rozebereme podrobně v kapitole 4.



Obrázek 3.3.: *Graf $K_4$ má 16 různých koster.*

**Otázka:** V důkazu Věty 3.5. se při počítání povykosů druhým způsobem přidává v každém kroku orientovaná hrana $n(i-1)$ způsoby. Vysvětlete, proč hledaný počet není $i(n-1)$, tj. proč není správně postup, kdy za výchozí vrchol zvolíme některý z kořenů $i$ komponent a za koncový vrchol zvolíme libovolný z $n-1$ zbývajících vrcholů.

Ze Cvičení 3.2.4. plyne, že každý souvislý graf má kostru. Snadno nahlédneme, že každý strom $T_n$ je kostrou nějakého grafu (například sebe sama nebo kompletního grafu s $n$ vrcholy, kde $n = |V(T_n)|$). Následující věta dává postačující podmínku pro to, aby strom daný byl podgrafem nějakého grafu.

**Věta 3.8.** *Mějme strom $T$ s $k$ hranami a graf $G$. Je-li $\delta(G) \geq k$, tak $T$ je podgrafem $G$.*

Důkaz tohoto tvrzení je ponechán jako Cvičení 4.1.10. Všimněte si, že opačné tvrzení neplatí. Například cesta $P_6$ má 5 hran a je podgrafem cyklu $C_6$, přičemž $\delta(C_6) = 2 \not\geq 5$. Na druhou stranu nerovnost ve Větě 3.8. není možno zpřísnit, protože například hvězda $K_{1,k}$ má $k$ hran, $K_k$ má $\delta(K_k) = k-1$, ale $K_{1,k}$ jistě není podgrafem $K_k$ (proč?).

## Cvičení

*3.2.1.*♡ *Ukažte, že každý souvislý graf má nějakou kostru.*

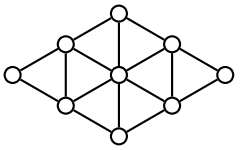
*3.2.2. Kolik koster má unicyklický graf? (*Unicyklický *graf obsahuje jediný cyklus.)*

[17] O počtu koster jednoduchého grafu, ne nutně kompletního, je psáno na straně 92.

*3.2.3. Kolik koster má bicyklický (graf s právě dvěma cykly) graf? Nápověda: které možnosti musíme rozlišit?*

*3.2.4. Navrhněte algoritmus pro hledání kostry (ne nutně minimální) souvislého grafu, který pracuje se složitostí řádově $O(m+n)$.*

*3.2.5. Je možno graf $G$ na Obrázku 3.4. rozložit a) na dvě kostry; b) na dvě kostry se stejnou strukturou (na dvě izomorfní kostry)?*

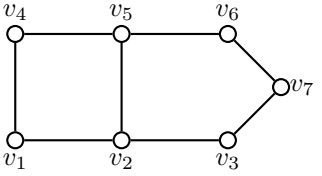


*Obrázek 3.4.: Graf $G$ na devíti vrcholech.*

*3.2.6. Kolik koster má kompletní graf s alespoň dvěma vrcholy bez jedné pevně zvolené hrany?*

*3.2.7. Máme kompletní graf $K_n$ a takovou množinu jeho koster $T_1, T_2, \ldots, T_k$, že každá hrana grafu $K_n$ patří do nějaké kostry přičemž žádné dvě kostry nemají společnou hranu. Ukažte, že a) $n$ je sudé, b) pro $n$ dělitelné 4 je mezi vrcholy koster $T_1, T_2, \ldots, T_k$ alespoň $n$ vrcholů sudého stupně.*

*3.2.8. Mějme graf $G$ na Obrázku 3.5. Určete počet a) počet neizomorfních koster grafu $G$, b) počet koster grafu $G$, jestliže rozlišujeme vrcholy.*




Obrázek 3.5.: *Graf $G$.*

*3.2.9. Mějme souvislý graf $G$ s alespoň třemi vrcholy. Dokažte, že pro každou kostru $T$ grafu $G$ a hranu $e \in E(G) \setminus E(T)$ existují dvě takové hrany $e', e'' \in E(T)$, že $T - e' + e$ i $T - e'' + e$ jsou opět kostry grafu $G$.*

## 3.3. Cykly a bipartitní grafy

Na straně 47 jsme nadefinovali bipartitní graf. Všimněte si, že hrany bipartitního grafu (pokud existují) mohou spojovat pouze vrcholy z různých partit, žádná hrana nespojuje dva vrcholy ve stejné partitě.

Šikovnou pomůckou při práci s bipartitními grafy jsou barvy vrcholů. Můžeme předpokládat, že vrcholy bipartitního grafu jsou obarveny dvěma barvami, všechny vrcholy v jedné partitě vždy stejnou barvou. Hrany pak spojují pouze dva vrcholy *různých* barev, nikdy dva vrcholy stejné barvy. Naopak, jestliže se nám podaří obarvit všechny vrcholy nějakého grafu $G$ dvěma barvami tak, aby žádná hrana nespojovala dva vrcholy stejné barvy, tak víme, že graf $G$ je bipartitní. Partity jsou určeny právě barvami. Rozdělení vrcholů do obou partit je pro souvislé bipartitní grafy určeno jednoznačně až na pořadí partit, pro nesouvislé grafy existuje více možností, jak vrcholy do partit rozdělit.

Graf je podle definice strom právě tehdy, když neobsahuje žádné cykly. Následující věta udává nutnou a postačující podmínku pro to, aby graf byl bipartitní. Všimněte si, že omezení se tyká jen cyklů liché délky.

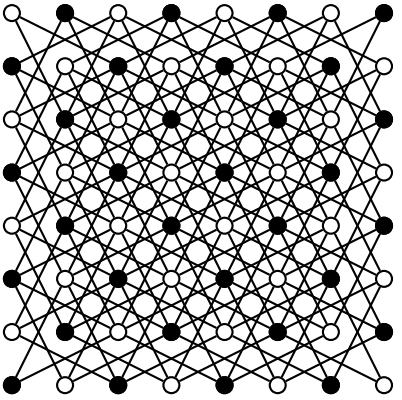
**Věta 3.9.** *Netriviální graf je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje cykly liché délky.*

*Důkaz.* Tvrzení je ekvivalence, musíme dokázat obě implikace.

„⇒“ Postupujeme přímo. Mějme bipartitní graf $G = (U \cup W, E)$. Vrcholy každého sledu (a proto i každé cesty) v $G$ jsou střídavě z množiny $U$ a $W$, protože všechny hrany jsou jen mezi partitami $U$ a $W$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že první vrchol patří do množiny $U$, potom druhý a každý sudý vrchol sledu patří do množiny $W$. Všechny sledy, jejichž poslední vrchol patří do $U$, jsou sudé délky. Pokud je sled uzavřený, musí se „vrátit“ do partity $U$ a musí proto obsahovat sudý počet hran. Protože cyklus je speciálním případem uzavřeného sledu, tak bipartitní graf neobsahuje cykly liché délky.

„⇐“ Mějme graf $G$, který neobsahuje liché cykly. Vrcholy grafu rozdělíme do dvou množin $U$ a $W$ a ukážeme, že koncové vrcholy všech hran grafu budou z různých množin, tedy z různých partit. Triviální komponenty můžeme přidat do libovolné množiny, bez újmy na obecnosti do množiny $U$. Je-li $u$ libovolný vrchol netriviální komponenty $L$, tak pro všechny vrcholy $v \in V(L)$ určíme $\mathrm{dist}(u, v)$. Do množiny $U$ dáme všechny takové vrcholy komponenty $L$, které mají sudou hodnotu $\mathrm{dist}(u, v)$ a do množiny $W$ vrcholy s lichou hodnotu $\mathrm{dist}(u, v)$. V rámci žádné množiny není hrana $vv'$, protože navázáním $(u, v)$-sledu, hrany $vv'$ a $(v', u)$-sledu bychom dostali uzavřený sled liché délky, ze kterého podle Lemmatu 2.2. je možno vybrat lichý cyklus. To by byl spor s předpokladem. Množiny $U$ a $W$ jsou partity bipartitního grafu. □

Ukazuje se, že řadu praktických problému můžeme popsat právě bipartitním grafem, například šachové úlohy. Například bipartitnost grafu, který znázorňuje tahy jezdce (koně) na šachovnici (Obrázek 3.6.), plyne ihned z obarvení políček šachovnice. Avšak třeba graf, který znázorňuje tahy střelce nebo věže bipartitní není, proč?



Obrázek 3.6.: *Graf možných tahů jezdce po šachovnici je bipartitní.*

**Příklad 3.1. Putování jezdce po šachovnici**

Ukažte, že putování jezdce po šachovnici můžeme popsat bipartitním grafem.

Sestavíme graf $\check{S}$, jehož vrcholy budou políčka klasické šachovnice $8 \times 8$ polí a hrany spojují vždy taková dvě políčka, mezi kterými lze táhnout jezdcem. Snadno nahlédneme, že $\check{S}$ je bipartitní graf. Jedna partita je tvořena černými políčky, druhá bílými políčky. Hrany vedou pouze mezi některými „černými“ a „bílými“ vrcholy, neboť mezi dvěma políčky stejné barvy neexistuje legální tah jezdcem (Obrázek 3.6.). ✓

Dalším aplikacím bipartitních grafů se budeme věnovat v kapitole 6.2.

**Cyklomatické číslo grafu**

Je-li $G$ graf a $\omega(G)$ počet jeho komponent, tak *cyklomatické číslo* $\mu(G) = h(G) - v(G) + \omega(G)$ udává, kolik nejméně hran je třeba z grafu odebrat, aby v grafu nezůstal žádný cyklus. Pro stromy a lesy je cyklomatické číslo rovno 0, pro kompletní grafy je cyklomatické číslo $\mu(G) = \binom{n-1}{2}$. Cyklomatické číslo je jakási míra složitosti. V souvislých grafech cyklomatické číslo $\mu(G)$ udává, jak moc se graf $G$ „liší od stromu“. Čím větší je cyklomatické číslo $\mu(G)$, tím více cyklů graf $G$ obsahuje.

Cyklomatické číslo grafu udává počet cyklů v bázi (ve fundamentálním systému cyklů) prostoru cyklů. O prostoru cyklů je psáno na straně 99.

**Otázky:**

- Udává cyklomatické číslo grafu počet cyklů v grafu?

- Co můžeme říci o grafu $G$, ve kterém počet cyklů je roven $\mu(G)$?

**Poznámka 3.1. O grafech, které neobsahují sudé cykly**
Protože stromy neobsahují žádné cykly, bipartitní grafy neobsahují liché cykly, tak by se mohlo zdát, že má smysl uvažovat také grafy, které obsahují pouze liché cykly. Ve Cvičení 3.3.8. ukážeme, že požadavek, aby graf obsahoval jen liché cykly, je příliš omezující a množiny hran cyklů takového grafu musí být po dvou disjunktní.

### Odkazy:

- Jiný důkaz Cayleyho vzorce najdete na http://en.wikipedia.org/wiki/Cayley's_formula.

## Cvičení

*3.3.1.*$^{\heartsuit}$ *Dokažte, že každý netriviální strom je bipartitní graf.*

*3.3.2. Nechť $G$ je pravidelný bipartitní graf s partitami $U$ a $W$ a alespoň jednou hranou. Ukažte, že potom $|U| = |W|$. Je předpoklad existence alespoň jedné hrany nutný?*

*3.3.3. Dokažte, že každý podgraf bipartitního grafu je bipartitní.*

*3.3.4. Ukažte, že při putování jezdcem po šachovnici není možno vrátit se na výchozí políčko po lichém počtu tahů.*

*3.3.5. Sestavíme graf $V$, jehož vrcholy budou políčka klasické šachovnice $8 \times 8$ polí a hrany spojují vždy taková dvě políčka, mezi kterými lze táhnout věží. Je graf $V$ bipartitní? Najdete v grafu $V$ lichý cyklus?*

*3.3.6. V grafech na Obrázku 3.7. najděte bipartitní podgraf s co největším počtem hran. Dokažte, že tento počet je největší.*

*Obrázek 3.7.: Grafy, které nejsou bipartitní.*

*3.3.7. Ukažte, že graf $G$ je unicyklický právě tehdy, když $\mu(G) = 1$.*

*3.3.8. Ukažte, že pokud graf obsahuje pouze liché cykly, tak žádné dva cykly nemohou mít společné hrany.*

*3.3.9. Ukažte, že souvislý $k$-pravidelný bipartitní graf pro $k \geq 2$ neobsahuje žádný most (most je taková hrana, že jejím odebráním dostaneme nesouvislý graf).*

*3.3.10. Kolik je všech cyklů v grafu $K_n$? Vrcholy rozlišujeme označením.*

*3.3.11. Kolik je cyklů a) délky 4, b) délky 5, c) délky 6 v grafu $Q_n$?*

*3.3.12. Kolik různých cyklů obsahuje kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$? Dva cykly považujeme za různé, pokud se liší v alespoň jedné hraně.*

*3.3.13. Jaké je cyklomatické číslo a) cyklu $C_n$ b) kompletního bipartitního grafu $K_{m,n}$ c) hyperkrychle $Q_n$?*

*3.3.14. Najděte příklad tří grafů se stejným počtem vrcholů, se stejným cyklomatickým číslem a různým počtem cyklů.*

*3.3.15. Pro každé přirozené číslo $k$ najděte příklad a) dvou grafů se stejným počtem vrcholů, stejným cyklomatickým číslem a počtem cyklů lišícím se o $k$, b) $k$ grafů se stejným počtem vrcholů, stejným cyklomatickým číslem, přičemž každé dva grafy mají různý počet cyklů.*

*3.3.16. Ukažte, že každý graf $G$ s cyklomatickým číslem $\mu(G)$ obsahuje alespoň $\mu(G)$ různých cyklů.*

*3.3.17. Dokažte nebo vyvraťte: a) každý bipartitní graf, ve kterém jsou všechny vrcholy sudého stupně, má sudý počet hran, b) každý graf se sudým počtem vrcholů, ve kterém jsou všechny vrcholy sudého stupně, má sudý počet hran, c) každý graf se sudým počtem lichých cyklů má sudý počet hran.*

*3.3.18. Mějme graf $G$ s $n$ vrcholy, $n \geq 4$ a alespoň $2n-3$ hranami. Ukažte, že v grafu $G$ existují alespoň dva cykly stejné délky.*

*3.3.19. Ukažte, že v každém grafu $G$ s $h(G)$ hranami existuje bipartitní podgraf s alespoň $h(G)/2$ hranami.*

## 3.4. Doplňková témata

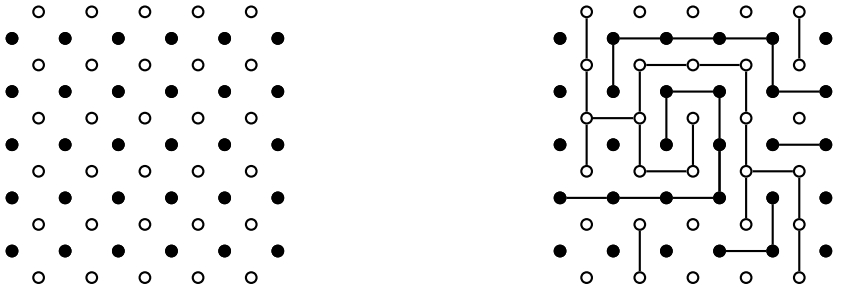
### Hry na grafech

Řadu her je možno analyzovat s využitím pojmů teorie grafů. Kromě toho existuje několik her, které se opravdu hrají na libovolném grafu, případně na grafu z nějaké pevně určené třídy.

**Bridge-it**

Hru *Bridge-it*[18] vymyslel David Gale. Na trh ji uvedla firma Hasbro Toys.

Máme herní plán jako na Obrázku 3.8. Plán obsahuje $n$ řad po $n+1$ černých puntících a $n+1$ řad po $n$ bílých puntících. Dva hráči střídavě spojují vždy dva puntíky své barvy (černé nebo bílé) mostem odpovídající barvy. Mosty mohou být vedeny pouze svisle nebo vodorovně. Cílem hry prvního (černého) hráče je spojit alespoň jednou černou cestou levý kraj herního plánu s pravým krajem. Podobně druhý (bílý) hráč je snaží spojit bílou cestou horní a spodní okraj herního plánu. Mosty se nesmí křížit, a proto každý most jednoho hráče zamezí jednomu tahu druhého hráče. Navíc, protože každá cesta spojující dva protilehlé okraje rozdělí herní plán na dvě části, může při libovolném rozložení černých a bílých mostů na herním plánu vyhrát nejvýše jeden hráč.



Obrázek 3.8.: *Herní plán hry Bridge-it a jedna hra, kterou vyhrál bílý hráč.*

Všimněte si, že oba hráči mají stejné výchozí rozložení puntíků, a proto i stejné výchozí podmínky. Snadno však zdůvodníme, že hra nemůže skončit remízou (Cvičení 3.4.1.) a že neexistuje vítězná strategie pro druhého hráče (Cvičení 3.4.2.). O něco pracnější je ukázat, že hra není spravedlivá, neboť první hráč může vždy vyhrát. Najít vítěznou strategii je možné například s využitím koster grafu (Cvičení 3.4.3.) pro graf jedné barvy.

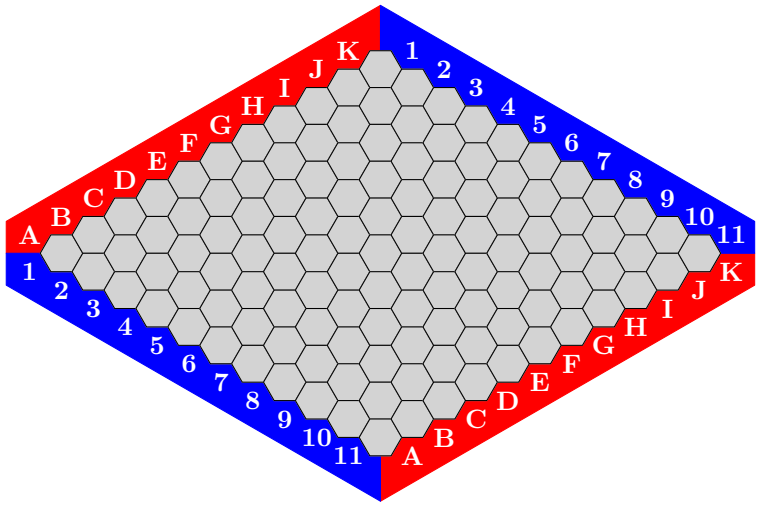
**Odkazy:**

- http://www.math.cornell.edu/~mec/2008-2009/ChorHangLam/bridge.html

**Hex**

Hru vymyslel dánský matematik Piet Hein. Nezávisle na něm vymyslel analogickou hru i americký matematik John Nash v roce 1947. Na trh ji uvedla firma Parker Brothers v roce 1952.

[18] Český ekvivalent by mohl být *Přemosti to!*




Obrázek 3.9.: *Hrací plán hry HEX.*

Dva hráči střídavě umísťují kameny své barvy (například červené a modré) na pole hracího plánu (Obrázek 3.9.). Vyhraje ten hráč, který jako první sestaví z kamenů své barvy cestu, která spojí protilehlé strany plánu své barvy. Rohová pole plánu patří oběma barvám.

John Nash ukázal, že hra nemůže skončit remízou, tj. jediný způsob jak zabránit, aby jeden hráč spojil strany své barvy cestou, je spojit strany druhého hráče cestou. Ve Cvičení 3.4.5. ukážeme nemožnost remízy pomocí Spernerova lemmatu (Lemma 3.14.).

Existuje klasický nekonstruktivní důkaz z teorie her, že existuje vítězná strategie pro prvního hráče: Protože hra HEX je konečná hra, která nemůže skončit remízou, musí existovat vítězná strategie pro prvního nebo druhého hráče. Kámen navíc ve vlastní barvě na libovolném poli hracího plánu je vždy výhodou, a proto má-li některý hráč tah navíc, může mu to ve strategii jen pomoci. Nyní si snadno uvědomíme, že pokud by existovala vítězná strategie pro druhého hráče, může mu ji první hráč „ukrást“. Stačí, aby udělal libovolný první tah nepodstatný pro strategii druhého hráče, a pak pokračoval podle vítězné strategie druhého hráče. Pokud by měl podle strategie během hry položit kámen na takto obsazené pole, stačí, aby ve svém tahu položil kámen na libovolné neobsazené pole. Druhý hráč nezíská výhodu pro svou strategii, kameny prvního hráče mu nemohou pomoci vyhrát.

Jestliže mají strany hracího plánu stejné rozměry, má začínající hráč určitou výhodu. Proto se využívá pravidlo záměny, kdy po prvním tahu prvního hráče si druhý hráč vybere, zda akceptuje tah prvního hráče nebo si vymění role, tj. druhý hráč si ponechá tah prvního hráče a stane se tak prvním hráčem. Vítězná strategie prvního hráče byla nalezena pro všechny symetrické herní plány až do rozměru $9 \times 9$ polí.

Pokud bychom se nevýhodu druhého hráče snažili vykompenzovat změnou rozměru hracího plánu, kdy strany druhého hráče budou blíže u sebe, tak jednoduchá strategie založená na párování vždy zajistí vítězství druhého hráče (Cvičení 6.5.2.).

**Odkazy:**

- http://en.wikipedia.org/wiki/Hex_(board_game)

**Šprouti**

Hru šprouti (anglicky „sprouts“ znamená „výhonky“) vymysleli v roce 1967 matematici John H. Conway a Michael S. Paterson v době, kdy byli na univerzitě v Cambridge. Jedná se o hru pro dva hráče. Pravidla jsou popsána ve Cvičení 9.3.14.

S využitím počítače byly objeveny vítězné strategie pro některé malé počty výchozích puntíků hry šprouti. Na základě výsledků byla vyslovena hypotéza, že pro takový výchozích počet puntíků, který po dělení šesti dává zbytek 3, 4 nebo 5, může vždy vyhrát první hráč. Naopak pro počet puntíků, který po dělení šesti dává zbytek 0, 1, 2, může vždy vyhrát druhý hráč. V době vzniku tohoto textu byla hypotéza ověřena pro nejvýše 11 puntíků.

Modifikace hry zvaná „podvodní šprouti“ je pouze pro hráče, se silnými nervy, neboť se dá ukázat, že o vítězi je rozhodnuto dříve, než se začne hrát (Cvičení 9.3.16.).

**Odkazy:**

- http://www.math.cornell.edu/~mec/2006-2007/Games/sprouts.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/Sprouts_(game)
- http://www.madras.fife.sch.uk/maths/games/sprouts.html

### Další hry na grafech

Některé další hry na grafech jsou zmíněny dále v textu. Například ve Cvičení 6.1.8. nebo na straně 143.

**Poznámka 3.2.** Pokud narazíte na jiné pěkné hry na grafech, pošlete mi je, abych je mohl zařadit do další verze textu.

## Cvičení

*3.4.1. Ukažte, že hra Bridge-it nemůže skončit remízou.*

*3.4.2. Ukažte, že druhý hráč ve hře Bridge-it nemůže mít vítěznou strategii.*

*3.4.3. Ukažte, že první hráč ve hře Bridge-it má vítěznou strategii.*

*3.4.4. Uvažme následující variantu hry Bridge-it. Hráč, který spojí své dvě protilehlé strany cestou,* prohraje. *Je zakázáno zdržovat spojováním puntíků na výchozím nebo koncovém okraji a je zakázáno i spojovat puntíky, mezi kterými už existuje cesta odpovídající barvy. Ukažte, že druhý hráč může vždy vyhrát (přinutit prvního hráče prohrát).*

*3.4.5. Ukažte, že ve hře HEX nemůže nastat remíza. Návod: využijte Spernerovo lemma (Lemma 3.14*

## Kirchhoffova věta

Cayleyho vzorec udává počet koster kompletního grafu. Počet koster obecného grafu dává Kirchhoffova věta. Dříve než ji vyslovíme, je třeba nadefinovat některé pojmy.

### Laplaceova matice

V podkapitole 1.4. jsme zavedli matici sousednosti. V následující definici zavedeme podobnou matici, která má překvapivá využití.

**Definice** Mějme (jednoduchý) graf $G$ na $n$ vrcholech $v_1, v_2, \ldots, v_n$. *Laplaceova matice* je čtvercová matice řádu $n$, jejíž prvky jsou

$$l_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{je-li } i = j, \\ -1 & \text{je-li } v_iv_j \in E(G), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

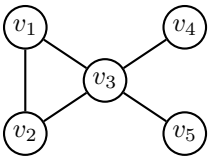
Laplaceouvu matici značíme $L(G)$.

V některé literatuře se zavádí Laplaceova matice *v normované tvaru*:

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li } i = j \text{ a } \deg(v_i) \neq 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{\deg(v_i)\deg(v_j)}} & \text{je-li } v_iv_j \in E(G), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Je zřejmé, že Laplaceova matice (i v normovaném tvaru) je symetrická. Označme $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1}$ vlastní čísla matice $L(G)$. Dá se ukázat, že

- součet každého řádku (i sloupce) je 0,
- $L(G)$ je pozitivně semidefinitní,
- $\lambda_0 = 0$ pro všechny grafy $G$,
- počet nulových vlastních čísel udává počet komponent grafu.




Obrázek 3.10.: *Graf $G$.*

**Příklad 3.2.** Mějme graf $G$ na Obrázku 3.10., jeho vrcholy označíme $v_1, v_2, \ldots, v_5$. Určete Laplaceovu matici $L(G)$ a její vlastní čísla.

Laplaceova matice (nikoli v normovaném tvaru) grafu $G$ je

$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z charakteristické rovnice $\det(L(G) - \lambda I) = 0$ určíme vlastní čísla matice $L(G)$. Vychází $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ a $\lambda_4 = 5$. ✓

**Incidenční matice a Laplaceova matice**

Nejprve ukážeme, jak spolu souvisí incidenční matice a Laplaceova matice libovolného grafu. Následující lemma platí pouze pro orientované grafy. Jestliže máme neorientovaný graf $G$, stačí vzít libovolnou jeho orientaci $D(G)$. Orientace je zavedena na straně 238. Nám v tuto chvíli postačí vědět, že v incidenční matici orientovaného grafu je ve sloupci každé hrany označen počáteční vrchol $-1$ a koncový 1.

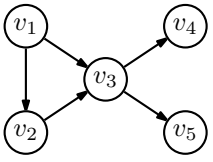
**Lemma 3.10.** *Mějme orientovaný graf $G$ s vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Označme $B(G)$ takovou incidenční matici (Cvičení 12.1.6.) a $L(G)$ takovou Laplaceovu matici orientovaného grafu $G$, ve kterých vrcholu $v_i$ odpovídá řádek $i$. Pak platí $L(G) = B(G)B(G)^T$, kde $B(G)^T$ je transponovaná matice $B(G)$.*

*Důkaz.* Označme $M = B(G)B(G)^T$. Diagonální prvky matice $M$ odpovídají skalárnímu součinu řádku matice $B(G)$ se sebou samým. Protože řádek $i$ matice $B(G)$ obsahuje tolik hodnot 1 nebo $-1$, s kolika hranami je příslušný vrchol $v_i$ sousední, tak hodnota součinu udává stupeň vrcholu $v_i$ v grafu $G$. A protože každý sloupec matice $B(G)$ obsahuje právě jednu hodnotu $-1$ za počáteční vrchol orientované hrany a jednu hodnotu 1 za koncový její vrchol, součin řádku $i$ a řádku $j$ (sloupce $j$ v matici $B(G)^T$) nabývá nenulové hodnoty pouze v případě, že vrcholy $v_i$ a $v_j$ jsou spojeny hranou v grafu $G$. Prvek $m_{ij}$ (v řádku $i$ a sloupci $j$) pak nabývá hodnoty $1 \cdot (-1) = -1$. To znamená, že matice $M$ odpovídá definici Laplaceovy matice $L(G)$. □

**Příklad 3.3.** **(pokračování Příkladu 3.2.)**

Zorientujte graf $G$ na Obrázku 3.10. Sestavte incidenční matici $B(G)$ a z ní vypočítejte Laplaceovu matici $L(G)$.

Hrany grafu $G$ zorientujeme libovolně. Jedna možná orientace $D(G)$ a příslušná incidenční matice je na Obrázku 3.11.




$$B(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1v_3 & v_3v_4 & v_1v_2 & v_2v_3 & v_3v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Obrázek 3.11.: *Orientace $D(G)$ grafu $G$ a příslušná incidenční matice.*

Vypočítáme $B(G)B(G)^T$ a dostaneme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledkem je Laplaceova matice $L(G)$. ✓

**Počet koster grafu**

Nejprve vyslovíme následující lemma, které dává do souvislosti kostry grafu $G$ a hodnoty determinantů submatice incidenční matice grafu $G$. Důkaz je ponechán jako Cvičení 3.4.6.

**Lemma 3.11.** *Mějme souvislý graf $G$ a jeho orientaci $D(G)$. Dále označme $S$ nějakou podmnožinu $n-1$ hran grafu $G$. Symbolem $H^*$ označme incidenční matici orientovaného grafu $D(G)$, ze které je vynechaný nějaký jeden řádek a všechny sloupce s výjimkou těch, které odpovídají hranám v $S$. Potom platí*

$$\det(H^*) = \begin{cases} +1, -1 & \text{pokud hrany } S \text{ tvoří kostru grafu } G, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

V dalším textu použijeme Lemma 3.11. pro určení počtu všech koster obecného souvislého grafu $G$.

**Příklad 3.4. (pokračování Příkladu 3.2.)**

Z incidenční matice $B(G)$ grafu $G$ na Obrázku 3.10. sestavte a vypočítejte všechny determinanty $H^*$ podle Lematu 3.11., které vzniknou vynecháním prvního řádku matice $L(G)$ (řádku příslušného vrcholu $v_1$).

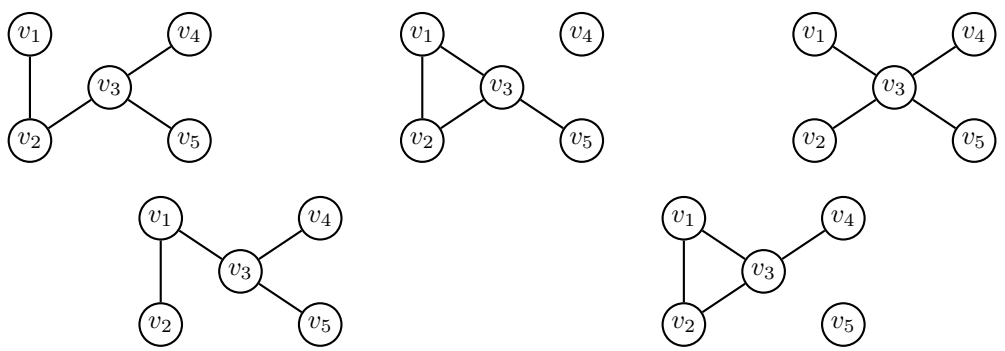
Incidenční matice s vynechaným vrcholem $v_1$ je

$$\begin{array}{c} \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1v_3 & v_3v_4 & v_1v_2 & v_2v_3 & v_3v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Hledaných determinantů je $\binom{5}{4} = 5$. Determinanty $H_1, H_2, \ldots, H_5$ získáme vynecháním prvního, druhého, třetího, čtvrtého respektive pátého sloupce.

$$H_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad H_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad H_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad H_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$




Obrázek 3.12.: *Podgrafy grafu $G$, které odpovídají submaticím s determinanty $H_1, H_2, \ldots, H_5$.*

Srovnáme-li determinanty $H_1, H_2, \ldots, H_5$ s odpovídajícími podgrafy grafu $G$ na Obrázku 3.12., tak vidíme, že právě tři nenulové determinanty odpovídají kostrám grafu $G$. ✓

V dalším textu budeme symbolem $\tau(G)$ značit počet koster grafu $G$. Následující věta ukazuje pěknou souvislost algebry a teorie grafů.

**Věta 3.12. Kirchhoffova věta**
*Nechť $G$ je souvislý graf s $n$ vrcholy a $L(G)$ je jeho Laplaceova matice. Označme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ nenulová vlastní čísla Laplaceovy matice. Počet koster grafu $G$ je*

$$\tau(G) = \frac{1}{n}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}. \tag{6}$$

*Důkaz.* Nejprve ukážeme, že pro Laplaceovu matici $L(G)$ řádu $n$ (ve které je součet každého řádku a každého sloupce roven 0) platí, že algebraické doplňky všech prvků jsou si rovny. Označme $L(G)^*$ matici adjungovanou k $L(G)$, tj. matici sestavenou z algebraických doplňků matice $L(G)$. Čtvercovou matici samých jedniček označíme $J$. Potom platí $L(G)L(G)^* = \det(L(G))J = 0$ a tedy každý sloupec matice $L(G)^*$ je bází nulového prostoru, který pro souvislý graf $G$ má dimenzi 1, neboť jen jedno vlastní číslo matice $L(G)$ je nulové. Proto jsou všechny sloupce matice $L(G)^*$ identické a podobně z rovnosti $L(G)^*L(G) = J\det(L(G)) = 0$ zdůvodníme, že všechny řádky matice $L(G)^*$ jsou identické, a tedy všechny algebraické doplňky v matici $L(G)^*$ jsou stejné.

Zbývá ukázat, že je-li $L(G)$ Laplaceovou maticí grafu $G$, tak hodnota každého prvku matice $L(G)^*$ udává počet různých koster grafu $G$. Pro názornost označme $C$ matici, která vznikne vynecháním některého (bez újmy na obecnosti například prvního) řádku a sloupce Laplaceovy matice $L(G)$. Podobně označme $N$ matici, která vznikne vynecháním prvního řádku z incidenční matice nějaké orientace $D(G)$. S využitím Lemmatu 3.10. víme, že $C = NN^T$. Nyní podle Cauchyovy-Binetovy věty pro determinant matice $C$ dostaneme

$$\det(C) = \sum_{i\in I}\det(N_i)\det(N_i^T) = \sum_{i\in I}\det(N_i)\det(N_i) = \sum_{i\in I}\det(N_i)^2,$$

kde $N_i$ pro $i \in I$ ($I$ je nějaká indexová množina) jsou všechny submatice řádu $n-1$ matice $N$. Takových submatic je $\binom{m}{n-1}$, kde $m$ je počet hran grafu $G$.

Podle Lemmatu 3.11. nabývá determinant $\det(N_i)$ hodnoty 1 nebo $-1$, pokud vybrané sloupce subdeterminantu tvoří kostru grafu $G$ a hodnoty 0 jinak. To znamená, že součet druhých mocnin $\sum_{i\in I}\det(N_i)^2$ udává právě počet koster grafu $G$. □

Všimněte si, že výsledek výpočtu je „správný“ i když graf není souvislý, a proto nemá kostru. V takovém případě má graf alespoň dvě komponenty a platí $\lambda_1 = 0$ (předpokládáme $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_{n-1}$). Potom součin vlastních čísel je $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1} = 0$. Dá se ukázat, že Kirchhoffova věta platí dokonce pro grafy s násobnými hranami (multigrafy), kdy v Laplaceově matici budou prvky $l_{ij}$ pro $i \neq j$ udávat počet hran $v_iv_j$ (až na znaménko).

Cayleyho vzorec je důsledek Kirchhoffovy věty. Stačí si uvědomit, že každý vektor $n$-dimenzionálního vektorového prostoru, který má jednu souřadnici rovnu 1, jednu (jinou) souřadnici rovnu $-1$ a ostatní souřadnice nulové je vlastní vektor Laplaceovy matice $L(K_n)$ kompletního grafu příslušný vlastní hodnotě $n$ (proč?). Všechny tyto vektory generují podprostor dimenze $n-1$, a proto matice $L(K_n)$ nemá jiná nenulová vlastní čísla. Z Kirchhoffovy věty plyne, že $\tau(K_n) = \frac{1}{n}n^{n-1} = n^{n-2}$.

**Příklad 3.5. (pokračování Příkladu 3.2.)**
Určíme počet koster grafu $G$ na Obrázku 3.10.
Ze vztahu (6) vychází pro graf $G$

$$\tau(G) = \frac{1}{5}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 5 = 3,$$

což odpovídá, neboť z nakreslení grafu je ihned zřejmé, že graf $G$ má tři kostry (Obrázek 3.12.). ✓

Kirchhoffovu větu můžeme vyslovit v jiném (ekvivalentním) tvaru. Pro výpočet počtu koster podle Věty 3.12. musíme znát všechna vlastní čísla Laplaceovy matice. To může být pro větší matice

početně náročné. Následující tvar Kirchhoffovy věty ukáže, že to není nutné. Abychom zjistili počet koster stačí spočítat jeden libovolný(!) minor matice $L(G)$ (algebraický doplněk libovolného prvku matice $L(G)$).

**Věta 3.13. Kirchhoffova věta (podruhé)**
*Nechť $G$ je souvislý graf s $n$ vrcholy a $L(G)$ je jeho Laplaceova matice. Počet koster grafu $G$ je roven algebraickému doplňku* libovolného *prvku*

$$\tau(G) = (-1)^{i+j} \det(L_{ij}),$$

*kde $L_{ij}$ je minor, který získáme z matice $L(G)$ po vynechání $i$-tého řádku a $j$-tého sloupce.*

*Důkaz.* Tvrzení ukážeme pro libovolnou matici $A$, ve které je součet každého řádku a každého sloupce roven 0. Taková matice $A$ má vlastní vektor složený ze samých jedniček příslušný vlastní hodnotě $\lambda_0 = 0$.

Označíme $J$ čtvercovou matici samých jedniček (stejného řádu jako matice $A$). Vyjádříme determinant matice $A + J$ s využitím řádkových a sloupcových úprav, které nemění hodnotu determinantu. Pro názornost se zaměříme na první řádek a sloupec, stejnou argumentaci je však možno použít pro libovolný řádek a sloupec. Nejprve přičteme všechny řádky matice $A + J$ k prvnímu řádku. Tak bude každý prvek v prvním řádku roven $n$ a ostatní prvky se nezmění. Potom přičteme všechny sloupce matice $A+J$ k prvnímu sloupci. Tak bude prvek v prvním řádku a prvním sloupci roven $n^2$, všechny ostatní prvky v prvním řádku a prvním sloupci budou rovny $n$ a ostatní prvky matice se nezmění. Vytkneme $n$ z prvního řádku. Dále odečteme první řádek od všech ostatních řádků. Prvek v prvním řádku a prvním sloupci výsledné matice je $n$, ostatní prvky v prvním sloupci jsou nulové, ostatní prvky v prvním řádku jsou jedničky a všechny zbývající prvky výsledné matice jsou rovny prvkům matice $A$, protože jsme od prvků matice $A + J$ odečetli jedničku. Laplaceovým rozvojem podle prvního řádku je ihned zřejmé, že

$$\det(A + J) = n^2 \det(A_{11}), \tag{7}$$

kde $\det(A_{11})$ je algebraický doplněk prvku v prvním řádku a prvním sloupci.

V dalším nechť $A = L(G)$ je symetrická matice s nejmenším vlastním číslem $\lambda_0 = 0$ (odpovídající vlastní vektor obsahuje samé jedničky) a ostatními vlastními čísly $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Zbývá ukázat, proč vlastní čísla matice $A+J$ jsou právě $n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Je-li $\vec{v}$ nějaký vektor z nulového prostoru matice $A$ (pro $A = L(G)$ to je právě vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě $\lambda_0$), pak pro každý vlastní vektor $\vec{v}_i$ příslušný vlastní hodnotě $\lambda_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$ platí $\vec{v}_0 \vec{v}_i = 0$. To však znamená, že také $J\vec{v}_i = 0$, a proto také $(A + J)\vec{v}_i = A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$. Vidíme, že vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ matice $A$ jsou také vlastními čísly matice $A+J$. A konečně $n$ je vlastním číslem matice $A + J$, protože pro vektor $\vec{j}$ samých jedniček platí $(A + J)\vec{j} = A\vec{j} + J\vec{j} = 0 + n\vec{j}$.

Víme, že determinant matice je součin jejich vlastních čísel, a proto dosazením do (7) dostaneme

$$\begin{aligned} \det(A + J) &= n^2 \det(A_{11}) \\ n \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_n &= n^2 \det(A_{11}) \\ \det(A_{11}) &= \frac{1}{n} \lambda_1 \cdots \lambda_n. \end{aligned}$$

Odtud dle Věty 3.12. je $\tau(G) = \det(A_{11})$. Podobně se pro libovolný řádek $i$ a sloupec $j$ Laplaceovy matice $L(G)$ ukáže $\tau(G) = (-1)^{i+j} \det L_{ij}$, což je dokazované tvrzení. □

**Příklad 3.6. (pokračování Příkladu 3.2.)**
Určíme nějaký minor matice $L(G)$ grafu $G$ na Obrázku 3.10. a z něj vypočítáme počet koster grafu $G$.
Pro graf na Obrázku 3.10. je například

$$L_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{12} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{34} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Snadno vypočítáme $\det L_{11} = 3$, $\det L_{12} = -3$, $\det L_{34} = -3$ a vždy dostaneme $\tau(G) = (-1)^2 \det L_{11} = (-1)^3 \det L_{12} = (-1)^7 \det L_{34} = 3$. ✓

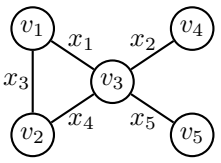
**Seznam všech koster grafu**

Tvrzení Kirchhoffovy věty 3.13. můžeme zesílit a využít i pro hledání všech koster daného grafu $G$. Nejprve upravíme definici Laplaceovy matice tak, že každé hraně $e_k$ $(k = 1, 2, \ldots, |E(G)|)$ grafu $G$ přiřadíme jinou proměnnou $x_k$ a prvek $l_{ij}$ pro $i \neq j$ Laplaceovy matice bude $-x_k$, jestliže hrana $e_k$ spojuje vrcholy $v_i$, $v_j$. Diagonální prvek $l_{ii}$ položíme roven součtu všech proměnných odpovídajících hranám incidentních s vrcholem $v_i$.

Algebraický doplněk $(-1)^{i+j} \det(L_{ij})$ z důkazu Věty 3.13. je pak homogenním polynomem v proměnných odpovídajících hranám grafu $G$. Po úpravách, kdy sečteme, resp. odečteme, odpovídající členy, bude každý člen výsledného zjednodušeného polynomu odpovídat jedné kostře, jejíž hrany jsou právě proměnné z tohoto členu. Determinant $\det(L_{ij})$ tak teoreticky dává nástroj pro přímou konstrukci všech koster.

**Příklad 3.7. (pokračování Příkladu 3.2.)**
Přiřaďte hranám grafu $G$ z Obrázku 3.10. proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_5$. Potom sestavte některý algebraický doplněk $(-1)^{i+j} \det(L_{ij})$ a najděte všechny kostry grafu $G$.

Proměnné přiřadíme hranám jako na Obrázku 3.13. vlevo. Odpovídající zobecněná Laplaceova matice $L(G)$ je na obrázku vpravo.




$$L(G) = \begin{pmatrix} x_1+x_3 & -x_3 & -x_1 & 0 & 0 \\ -x_3 & x_3+x_4 & -x_4 & 0 & 0 \\ -x_1 & -x_4 & x_1+x_2+x_4+x_5 & -x_2 & -x_5 \\ 0 & 0 & -x_2 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & -x_5 & 0 & x_5 \end{pmatrix}$$

Obrázek 3.13.: *Orientace $D(G)$ grafu $G$ a příslušná incidenční matice.*

Vypočítáme algebraický doplněk $(-1)^{1+1} \det(L_{11})$ a zjednodušíme.

$$(-1)^{1+1} \det(L_{1,1}) = 1 \cdot \begin{vmatrix} x_3+x_4 & -x_4 & 0 & 0 \\ -x_4 & x_1+x_2+x_4+x_5 & -x_2 & -x_5 \\ 0 & -x_2 & x_2 & 0 \\ 0 & -x_5 & 0 & x_5 \end{vmatrix}$$

Většina členů determinantu se odečte a dostaneme

$$x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_4x_5 + x_2x_3x_4x_5.$$

Vidíme, že graf $G$ má právě tři kostry, neboť zůstaly tři nenulové členy polynomu. Všimněte si, že tyto členy přesně odpovídají kostrám grafu $G$ na Obrázku 3.12. ✓

**Odkazy:**

- http://en.wikipedia.org/wiki/Kirchhoff's_theorem
- http://math.fau.edu/locke/Graphmat.htm

## Cvičení

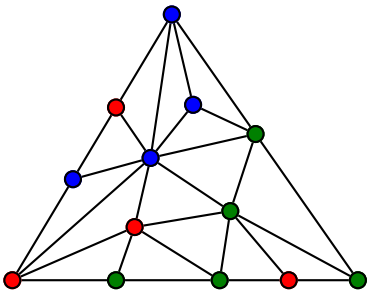
*3.4.6. Dokažte tvrzení Lemmatu 3.11.*

*3.4.7. Kolik koster mají grafy na Obrázku 2.17.?*

### Spernerovo lemma

Mějme v rovině libovolnou triangulaci trojúhelníka $T$. Vrcholy triangulace očíslujeme 1, 2 nebo 3 tak, aby byly splněny následující podmínky.

(i) Vrcholy trojúhelníka $T$ jsou očíslovány různými čísly 1, 2 a 3.
(ii) Vrcholy alespoň jedné strany jsou očíslovány jen dvěma čísly (neobsahují číslo protilehlého vrcholu).
(iii) Očíslování zbývajících vrcholů trojúhelníka je libovolné.

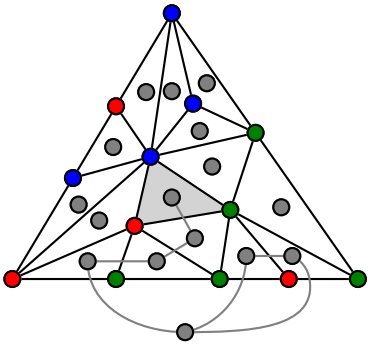


Obrázek 3.14.: *Triangulace trojúhelníka a jeho očíslování podle podmínek (i) až (iii).*

V některých formulacích se požaduje, aby podmínka (ii) byla splněna pro všechny tři strany trojúhelníka $T$, jako na Obrázku 3.14. Čísla 1, 2 a 3 nahrazena barvami červenou, zelenou a modrou.

**Lemma 3.14. Spernerovo lemma**
*V každém očíslování trojúhelníka $T$ podle podmínek (i) až (iii) (najdeme kromě samotného trojúhelníka $T$) lichý počet trojúhelníků, jejichž vrcholy jsou očíslovány různými čísly.*

*Důkaz.* Pro důkaz Spernerova lemmatu použijeme Princip sudosti (Věta 1.1.). Nejprve sestavíme graf $G$, jehož vrcholy budou odpovídat oblastem triangulace. Nezapomeneme na vrchol ve vnější stěně. Nyní vybereme ta dvě čísla, která se vyskytují u všech vrcholů jedné strany. Bez újmy na obecnosti to budou například čísla 1 a 2 (nebo dvě barvy červená a zelená). Dva vrcholy spojíme hranou, pokud odpovídající oblasti spolu hraničí stranou a koncové vrcholy této strany jsou očíslované 1 a 2 (obarveny červeně a zeleně). Dostaneme graf jako na Obrázku 3.15. Stupeň vrcholu v každém vnitřním trojúhelníčku je pouze 0, 1 nebo 2. Nenulový stupeň mají vrcholy v trojúhelnících s některými vrcholy očíslovanými 1 nebo 2 (obarvené červenou a zelenou barvou). Pokud je třetí vrchol trojúhelníka očíslován 1 nebo 2, je stupeň odpovídajícího vrcholu 2. Pokud je třetí vrchol trojúhelníka očíslován 3 (obarven modře), tak bude příslušný vrchol stupně 1. *To je jediná možnost, kdy je stupeň vnitřního vrcholu lichý!*



Obrázek 3.15.: *Pomocný graf a zvýrazněný trojúhelník 123.*

Vrchol odpovídající vnějšímu trojúhelníku může být libovolného *lichého* stupně, neboť na příslušné straně je lichý počet hran mezi vrcholy očíslovanými 1 a 2 (proč?). Podle principu sudosti obsahuje graf $G$ *sudý* počet vrcholů lichého stupně, a tedy *lichý* počet vnitřních vrcholů, z nichž každý odpovídá jednomu trojúhelníčku očíslovanému třemi různými čísly 1, 2 a 3 (obarvenému různými barvami). □

Uvedli jsme speciální formulaci Spernerova lemmatu pro dvoudimenzionální případ. Indukcí je možno lemma zobecnit pro vyšší dimenze. Pomocí Spernerova lemmatu je možno dokázat Brouwerovu větu o pevném bodě. Zájemce odkážeme na knihu [MN]. V tomto textu se na Spernerovo lemma několikrát odkazujeme při dokazování několika tvrzení o hře HEX (strana 90) nebo AZ-kvíz (strana 251).

**Poznámka 3.3.** Spernerovo lemma se také někdy říká Spernerově větě, která říká, že maximální antiřetězec každého systému podmnožin $n$-prvkové množiny s relací inkluze má nejvýše $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ prvků.

## Odkazy:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Sperner's_lemma

- http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/SpernerLemma.shtml

## Prostor cyklů

Ukážeme, že každému grafu je možno přirozeně přiřadit vektorový prostor, a to dokonce několika způsoby.

### Hranový prostor

Mějme graf $G = (V, E)$. *Hranový prostor* grafu $G$ je vektorový prostor nad tělesem $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ (těleso binárních čísel), jehož prvky jsou všechny binární vektory délky $|E|$. Každý vektor odpovídá nějaké podmnožině hran $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}\} \subseteq E$. O množinách hran tak můžeme hovořit jako o vektorech. Například prázdná množina hran $\emptyset$ odpovídá nulovému vektoru $\vec{o}$, vektor odpovídající jednoprvkové množině $\{e_1\}$ je vektor $(1, 0, \ldots, 0)$, vektor odpovídající jednoprvkové množině $\{e_2\}$ je vektor $(0, 1, 0 \ldots, 0)$, atd.

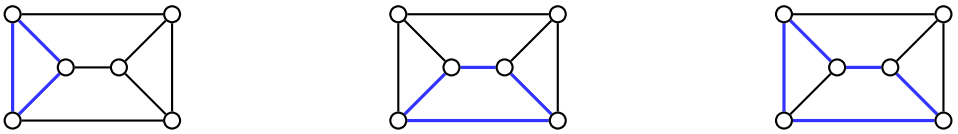
(Binární) součet vektorů odpovídá symetrické diferenci odpovídajících množin hran a násobení skalárem definujeme přirozeně $1 \cdot \vec{e} = \vec{e}$ a $0 \cdot \vec{e} = \vec{o}$. Je zřejmé, že $\{\{e_1\}, \{e_2\}, \ldots, \{e_n\}\}$ tvoří bázi hranového prostoru grafu $G$.

### Prostor cyklů

Hranový prostor zavedený v předchozím odstavci je vlastně triviální. Jedná se o vektorový prostor dimenze $|E|$, jehož prvky jsou *všechny* binární vektory délky $|E|$. Zajímavější strukturou je tzv. prostor cyklů daného grafu. Jedná se o analogickou strukturu, jejíž prvky jsou sudé podgrafy (nikoliv pouhé cykly) daného grafu. Souvislé sudé grafy jsou eulerovské grafy, o eulerovských grafech je psáno na straně 214.

Mějme graf $G = (V, E)$. Sudým podgrafem rozumíme každý podgraf grafu $G$, jehož všechny vrcholy jsou sudého stupně. *Prostor cyklů* grafu $G$ je vektorový prostor nad binárním tělesem $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$, jehož prvky jsou všechny binární vektory délky $|E|$, které odpovídají sudým podgrafům grafu $G$. Podobně jako v hranovém prostoru, součet vektorů odpovídá symetrické diferenci odpovídajících množin hran a násobení skalárem definujeme $1 \cdot \vec{e} = \vec{e}$ a $0 \cdot \vec{e} = \vec{o}$.

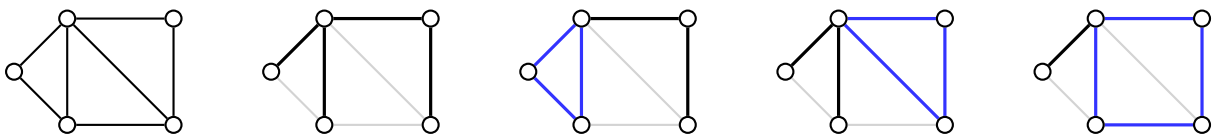
Například v grafu pravidelného trojbokého hranolu označme $c_1$ a $c_2$ dva cykly vyznačené na Obrázku 3.16. vlevo a uprostřed modře. Jejich součtem je cyklus $c_3$ vyznačený vpravo.



Obrázek 3.16.: *Dva různé cykly v grafu a jejich součet.*

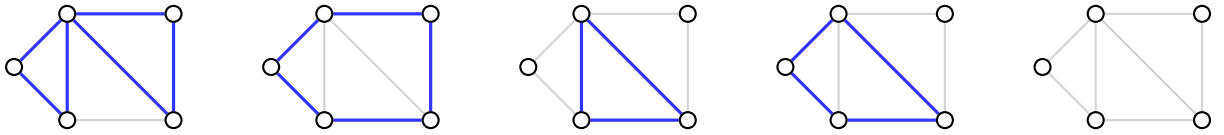
Prostor cyklů je podprostorem hranového prostoru. Zatímco dimenze hranového prostoru je $|E|$, tak dimenze prostoru cyklů je dána cyklomatickým číslem $\mu(G) = h(G) - v(G) + \omega(G)$ (cyklomatické číslo bylo zavedeno na straně 88), které udává, kolik nejméně hran je třeba z grafu $G$ odebrat, aby v grafu nezůstal žádný cyklus.

Báze prostoru cyklů je množina $\mu(G)$ vektorů, které odpovídají některým (bázovým) sudým grafům z prostoru cyklů. Bázi můžeme sestavit například tak, že nejprve najdeme kostru $T$ grafu $G$ (v případě, že graf $G$ není souvislý, najdeme les koster jednotlivých komponent). Potom za každou hranu $e$ grafu $G$, která není v kostře obsažena, vezmeme cyklus, který vznikne přidáním hrany $e$ do kostry (lesa $T$). Takový cyklus je pro každou hranu podle Důsledku 3.5. právě jeden. Budeme jim říkat *elementární cykly*. Odpovídající vektory tvoří bázi vektorového prostoru cyklů a všechny sudé podgrafy grafu $G$ (přesněji jejich odpovídající vektory) lze dostat jako lineární kombinaci bázových vektorů.



Obrázek 3.17.: *Graf $G$, jeho kostra a tři cykly báze prostoru cyklů.*

Například graf na Obrázku 3.17. má prostor cyklů dimenzi 3, neboť $\mu(G) = h(G) - v(G) + \omega(G) = 7 - 5 + 1 = 3$. Jedna možná kostra je vyznačena v druhém grafu na Obrázku 3.17. a dále jsou uvedeny tři elementární cykly příslušné báze. Celý prostor cyklů pak obsahuje $2^{\mu(G)} = 2^3 = 8$ vektorů, které odpovídají třem elementárním cyklům báze a dalším pěti sudým grafům na Obrázku 3.18.



Obrázek 3.18.: *Všechny zbývající prvky prostoru cyklů grafu $G$.*

**Odkazy:**

- https://en.wikipedia.org/wiki/Cycle_space
- http://forum.matweb.cz/viewtopic.php?id=19836
- http://martin.lipinsky.cz/skola/dma/prednasky/8.pdf

## Cvičení

*3.4.8.*$^{\heartsuit}$ *Určete počet různých sudých podgrafů lesa.*

*3.4.9. Ukažte, že množina vektorů, které odpovídají sudým podgrafům grafu $G$ spolu s operací sčítání vektorů a násobení skalárem, tvoří vektorový prostor.*

*3.4.10. Ukažte, že množina elementárních cyklů, které odpovídají cyklům získaným z kostry $T$ (případně lesa $T$ v nesouvislém grafu) přidáním jedené hrany grafu, tvoří bázi prostoru cyklů.*

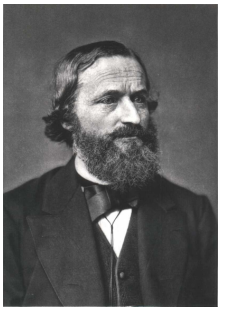
*3.4.11. Určete počet různých cyklů kompletního grafu $K_n$. Vrcholy grafu rozlišujeme ohodnocením.*

*3.4.12. Určete počet různých cyklů kompletního bipartitního grafu $K_{m,n}$. Vrcholy grafu rozlišujeme ohodnocením.*

*3.4.13. Určete počet různých sudých podgrafů kompletního grafu $K_n$. Vrcholy rozlišujeme ohodnocením.*

### Gustav Robert Kirchhoff (12. březen 1824 – 17. října 1887)

Gustav Robert Kirchhoff byl německý fyzik, který zásadní měrou přispěl k pochopení elektrických obvodů, spektroskopie a záření tzv. černého tělesa. Znám je především díky popisu elektrických obvodů. Pro obvody zformuloval dvě rovnosti (zákon zachování náboje a zákon zachování energie v elektrickém obvodu), kterým se dnes říká Kirchhoffovy zákony.



Obrázek 3.19.: *Gustav Robert Kirchhoff.*

Kirchhoff se narodil v roce 1824 v Královci (Königsbergu) ve východním Prusku. Roku 1847 vystudoval Albertovu univerzitu v Královci, kde již během studií formuloval své zákony elektrických obvodů. Po studiích se oženil a přestěhoval do Berlína, kde pracoval na Berlínské univerzitě a od roku 1854 na Univerzitě v Heidelbergu.

Mezi jeho významné výsledky patří fyzikální popis záření černého tělesa včetně formálního důkazu. Kirchhoff je i autorem samotného pojmu „záření černého tělesa“. Vypočítal, že rychlosti elektrického signálu v dokonalém vodiči je rovna rychlosti světla. Spolu s Robertem Bunsenem objevil základní prvky cesium a rubidium. Významně se podílel na rozvoji spektroskopie, spektrální analýzy a optiky, kdy pečlivým řešením Maxwellových rovnic poskytl teoretický základ pro Huygensův princip popisující šíření vlnění a současně tento princip zpřesnil.

Zemřel v roce 1887 a je pochován Schöneberském hřbitově v Berlíně.

**Odkazy:**

- http://en.wikipedia.org/wiki/Gustav_Kirchhoff
- http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=46968
- http://cs.wikipedia.org/wiki/Kirchhoffovy_zákony
- http://en.wikipedia.org/wiki/Kirchhoff's_circuit_laws

# Kapitola 4. Izomorfismus grafů

## 4.1. Pojem izomorfismu

Pracujeme-li s nějakým grafem, je obvykle jedno, zda je graf označený $G$, $\check{R}$ nebo třeba @. Důležité je, jakou má graf strukturu a zda dva grafy mají nebo nemají stejnou strukturu. Pojem mít „stejnou strukturu“ chápeme tak, že z jednoho grafu dostaneme druhý jen přeznačením vrcholů. Následující definice je formálním popisem zmíněného přístupu.

**Definice** Grafy $G$ a $H$ se nazývají *izomorfní*, jestliže existuje bijekce $\varphi : V(G) \to V(H)$ taková, že každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ jsou sousední právě tehdy, když jsou sousední vrcholy $\varphi(u), \varphi(v) \in V(H)$. Píšeme $G \simeq H$. Zobrazení $\varphi$ se nazývá *izomorfismus*.

Jestliže žádný izomorfismus grafu $G$ a $H$ neexistuje, grafy $G$ a $H$ *nejsou izomorfní* a píšeme $G \not\simeq H$.

Formálně můžeme zachování sousednosti vzorů a obrazů v izomorfismu $\varphi : V(G) \to V(H)$ stručně zapsat

$$\forall u, v \in V(G) : uv \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(H). \tag{8}$$

Izomorfismus je tedy relace (vztah) mezi nějakou dvojicí grafů $G$ a $H$. Grafy $G$ a $H$ buď izomorfní jsou nebo nejsou. Izomorfní grafy se někdy značí i $G \cong H$ nebo $G \sim H$, neizomorfní grafy $G \ncong H$ nebo $G \not\sim H$. Pojem izomorfismu grafů je zaveden (podobně jako izomorfismus jiných objektů) proto, abychom mohli zkoumat strukturu bez závislosti na jejím označení nebo pojmenování. Dva různé grafy jsou izomorfní, jestliže mají stejnou strukturu, tj. existuje nějaký izomorfismus. V opačném případě se grafy nazývají *neizomorfní*.

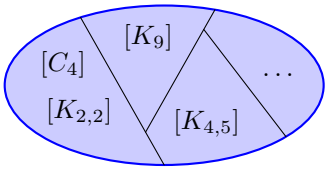
**Třídy izomorfních grafů**

Izomorfismus $\varphi$ dvou grafů, tak jak je zaveden v definici na začátku kapitoly, můžeme využít k sestavení relace ekvivalence na třídě všech grafů. Dva grafy $G$ a $H$ jsou v relaci „$\simeq$“ právě tehdy, když existuje izomorfismus $\varphi$ grafy $G$ a $H$ jsou izomorfní. Důkaz, že „$\simeq$“ je relací ekvivalence, je ponechán jako Cvičení 4.1.12. Značení $G \simeq H$ i terminologie, kdy říkáme, že „grafy $G$ a $H$ jsou spolu izomorfní“, vychází právě z relace „$\simeq$]. Pro konkrétní dvojici grafů však vždy máme na mysli existenci (případně neexistenci) příslušné bijekce mezi vrcholovými množinami, která zachovává vlastnost (8).

To znamená, že tvrzení, které platí pro nějaký graf můžeme stejně vyslovit i pro jakýkoliv jiný graf ze stejné třídy ekvivalence (Obrázek 4.1.). Pojem „graf“ můžeme proto interpretovat také jako celou *třídu ekvivalence*. Každý prvek této třídy je uspořádaná dvojice množiny vrcholů a množiny hran.

**Nutné podmínky izomorfismu**

Následující tvrzení ukazují, že dva izomorfní grafy nerozlišíme pomocí žádné z uvedených vlastností.




Obrázek 4.1.: *Třídy grafů.*

**Věta 4.1.** *Mějme grafy $G$ a $H$. Označme $n = |V(G)|$ a $m = |V(H)|$. Jestliže $G \simeq H$ a $\varphi$ je izomorfismus $\varphi : V(G) \to V(H)$, tak potom*

*(i)* $n = m$,
*(ii) pro každý vrchol* $v \in V(G)$ *platí* $\deg_G(v) = \deg_H(\varphi(v))$,
*(iii) platí* $(g_1, g_2, \ldots, g_n) = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$, *kde* $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ *a* $(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ *jsou nerostoucí stupňové posloupnosti grafů $G$ a $H$,*
*(iv) grafy $G$ a $H$ mají stejný počet hran,*
*(v) pro každý podgraf $N$ grafu $G$ existuje takový podgraf $M$ grafu $H$, že $N \simeq M$.*

*Důkaz.* Dokážeme postupně všechna tvrzení.

*(i)* Protože se zabýváme konečnými neprázdnými grafy, tak rovnost $n = m$ je rovností dvou přirozených čísel. Izomorfismus $\varphi$ je bijekce, a proto každému vrcholu v grafu $G$ existuje právě jeden vrchol v grafu $H$ (a naopak). To znamená, že $n = m$ plyne z rovnosti velikosti množin $|V(G)| = |V(H)|$.

*(ii)* Vezměme libovolný vrchol $v \in V(G)$. Označme $v_1, v_2, \ldots, v_{\deg(v)}$ všechny sousedy vrcholu $v$ v grafu $G$ a $v_{\deg(v)+1}, v_{\deg(v)+2}, \ldots, v_{n-1}$ zbývající vrcholy v $G$, které nejsou sousední s $v$. Z definice izomorfismu $\varphi$ víme, že právě vrcholy $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_{\deg(v)})$ jsou sousední s $\varphi(v)$ v grafu $H$ a navíc zbývající vrcholy $\varphi(v_{\deg(v)+1}), \varphi(v_{\deg(v)+2}), \ldots, \varphi(v_{n-1})$ nejsou v grafu $H$ s vrcholem $\varphi(v)$ sousední. Z definice stupně vrcholu je proto $\deg_G(v) = \deg_H(\varphi(v))$.

*(iii)* Je-li $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ nerostoucí stupňová posloupnost grafu $G$, tak podle již dokázaného bodu *(i)* víme, že $n = m$ a navíc podle *(ii)* víme, že $\deg_G(v) = \deg_H(\varphi(v))$ pro všechny vrcholy $v \in V(G)$. Proto je-li $(g_1, g_2, \ldots, g_n) = (\deg_G(v_1), \deg_G(v_2), \ldots, \deg_G(v_n))$, tak $(\deg_H(\varphi(v_1)), \deg_H(\varphi(v_2)), \ldots, \deg_H(\varphi(v_n)))$ je stejná nerostoucí grafová posloupnost.

*(iv)* S využitím principu sudosti a právě dokázaného bodu *(iii)* je

$$|E(H)| = \frac{1}{2}(h_1 + h_2 + \cdots + h_m) = \frac{1}{2}(g_1 + g_2 + \cdots + g_n) = |E(G)|.$$

*(v)* Mějme nějaký podgraf $N$ grafu $G$. Podgraf $M$ grafu $H$ sestavíme tak, že $V(M) = \{\varphi(v) : v \in V(N)\}$ a $E(M) = \{\varphi(uv) : uv \in E(N)\}$. Že uvedené hrany v grafu $H$ existují plyne z definice izomorfismu $\varphi$, neboť $uv \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$. Abychom ukázali, že $M \simeq N$, stačí vzít izomorfismus $\varphi'$, který je restrikcí[19] izomorfismu $\varphi$ na množinu $V(N)$. □

Všimněte si, všechny body *(i)*–*(v)* jsou nutné podmínky pro izomorfismus daných dvou grafů $G$ a $H$, ale ani jeden z bodů není podmínkou postačující. Například pro $n \geq 2$ (grafy na alespoň dvou vrcholech) mají grafy $G = K_n$ a $H = nK_1$ stejný počet vrcholů $n$, avšak $G$ a $H$ nejsou izomorfní. Proto podmínka v bodu *(i)* není postačující, aby dva grafy byly izomorfní.

Grafy $G = P_n$ a $H = K_{1,n-1}$ mají pro $n \geq 4$ stejný počet hran i vrcholů, jistě ale nejsou izomorfní. Proto ani podmínka v bodu *(iv)* není postačující, aby dva grafy byly izomorfní.

Podobně pro $n \geq 6$ mají grafy $G = C_n$ a $H = C_3 \cup C_{n-3}$ stejnou stupňovou posloupnost $(2, 2, \ldots, 2)$, avšak nejsou izomorfní. Ani podmínky v bodech *(ii)* a *(iii)* nejsou postačující. Grafy $G = C_n$ a $H = C_3 \cup C_{n-3}$ splňují dokonce všechny body *(i)*–*(iv)*, a přitom nejsou izomorfní, protože $G$ je a $H$ není souvislý. A konečně ani podmínka v bodu *(v)* není postačující, aby dva grafy $G$ a $H$ byly izomorfní. Najít protipříklad není obtížné.

**Otázka:** Jak vypadá příklad takových grafů $G$ a $H$, které splňují podmínku *(v)* ve Větě 4.1., ale nejsou izomorfní?

**O rozhodování, zda dané dva grafy jsou izomorfní**

Pro malé grafy můžeme zpravidla snadno rozhodnout, zda jsou izomorfní nebo ne. Pro větší grafy (stačí i méně než 20 vrcholů!) však rozhodnout na první pohled o izomorfismu nemusí být snadné, zejména pokud dané grafy jsou různě nakreslené a snadno ověřitelné podmínky *(i)*–*(iv)* ve Větě 4.1.

[19] Restrikce je nadefinována na straně 13.

jsou splněny. Ukazuje se, že v obecném případě není snadné rozhodnout, zda dané dva grafy jsou nebo nejsou izomorfní, protože žádný univerzální a rychlý algoritmus není znám. Jsou však známy univerzální algoritmy, které nejsou rychlé a také rychlé algoritmy, které nejsou univerzální, tj. fungují jen pro určité třídy grafů.

Následující věta sice udává nutnou a postačující podmínku pro to, aby dané dva grafy byly izomorfní, všimněte si ale, že její praktické použití pro rozpoznání izomorfních grafů je diskutabilní. Převádí totiž otázku existence izomorfismu dvou grafů na otázku existence izomorfismu sice menších, ale mnoha různých grafů. Na druhou stranu podle Věty 4.2. víme, že pokud dva grafy nejsou izomorfní, tak musí existovat nějaký podgraf jednoho grafu, který není podgrafem druhého grafu.

**Věta 4.2.** *(Konečné) grafy $G$ a $H$ jsou izomorfní právě tehdy, když pro každý podgraf $N$ grafu $G$ existuje podgraf $M$ grafu $H$ takový, že $M \simeq N$, a pro každý podgraf $M$ grafu $H$ existuje podgraf $N$ grafu $G$ takový, že $N \simeq M$.*

*Důkaz.*
„⇒“ Důkaz první implikace je snadný. Je-li $\varphi$ izomorfismus mezi $G$ a $H$, tak pro libovolný podgraf $N$ grafu $G$ sestavíme podgraf $M$ grafu $H$ tak, že $M = (\{\varphi(v) : v \in V(N)\}, \{\varphi(u)\varphi(v) : uv \in E(N)\})$. A protože $\varphi$ je bijekce, tak inverzní zobrazení $\varphi^{-1}$ je také izomorfismus a pro každý podgraf $M$ grafu $H$ najdeme izomorfní podgraf $N$ grafu $G$ stejně jako pro $\varphi$.
„⇐“ Stačí si uvědomit, že za podgraf $N$ můžeme vzít celý graf $G$. Protože pracujeme s konečnými grafy, tak $|V(G)| \leq |V(H)|$ a z opačné implikace vyjde $|V(H)| \leq |V(G)|$, a proto můžeme předpokládat, že oba grafy mají stejný počet vrcholů $|V(G)| = |V(H)| = n$.

Podle předpokladu existuje takový podgraf $M$ grafu $H$, že $G \simeq M$ při izomorfismu $\varphi : V(G) \to V(M)$. Vzhledem k izomorfismu $\varphi$ můžeme předpokládat, že $G$ je podgrafem grafu $H$, tj. každá hrana grafu $G$ leží v $H$. Podobně dostaneme, že $H$ je podgrafem grafu $G$, tedy neexistuje hrana grafu $H$, která by nebyla v grafu $G$. Dostáváme tak, že zobrazení $\varphi$ je nejen izomorfismus mezi $G$ a $M$, ale dokonce izomorfismus $\varphi : V(G) \to V(H)$, protože $uv \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$. □

Předchozí tvrzení jsme ukázali pro konečné grafy (podle úmluvy se zabýváme jen konečnými grafy). Pro nekonečné grafy nemůžeme použít argument o stejném počtu vrcholů, a proto pro nekonečné grafy tvrzení Věty 4.2. nemusí platit.

**Otázka:** Najdete takové dva nekonečné grafy $G$ a $H$, které splňují předpoklady Věty 4.2. týkající se existence podgrafů $M$ a $N$, a přitom $G$ a $H$ nejsou izomorfní?

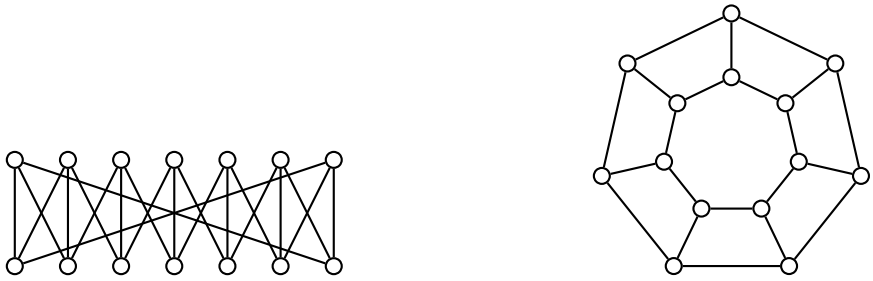
Pro některé třídy grafů (například pro stromy) existují algoritmy, které umí o izomorfismu dvou grafů z dané třídy rozhodnout v čase, který roste v závislosti na velikosti grafu pomalu (polynomiálně s malým stupněm polynomu). V obecném případě

1) ověříme nutné podmínky *(i)–(v)* Věty 4.1. (podmínku *(v)* neověřujeme pro všechny podgrafy, ale podle intuice pro vhodné podgrafy),
2) pokusíme se najít izomorfismus, případně systematickým probráním všech možností ukážeme, že izomorfismus neexistuje.

Všimněte si, že užitím Věty 4.1. je snadné izomorfismus dvou grafů vyvrátit nikoli dokázat. Pokud k některé z podmínek *(i)–(v)* najdeme protipříklad, tak víme, že dané dva grafy nejsou izomorfní. Naproti tomu najít izomorfismus nemusí být snadné, protože existuje $n!$ různých bijekcí $\varphi : V(G) \to V(H)$. Tento počet může být pro konkrétní dvojici grafů $G$ a $H$ výrazně menší, ale pro každou bijekci je potřeba ověřit podmínku $\forall e \in E(G) : e \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(e) \in E(H)$.

**Příklad 4.1.** Rozhodněte, zda dva grafy na Obrázku 4.2. jsou nebo nejsou izomorfní.
Snadno ověříme, že grafy $G$ a $H$ splňují podmínky *(i)–(iv)* ve Větě 4.1. Oba mají 14 vrcholů, jsou 3-pravidelné a mají proto 21 hran. Naproti tomu graf $H$ obsahuje cyklus $C_7$ jako podgraf, ale graf $G$ neobsahuje podle Věty 3.9. žádný lichý cyklus, protože je bipartitní. Grafy $G$ a $H$ proto nejsou izomorfní. ✓

**Počet neizomorfních grafů**



Obrázek 4.2.: *Grafy $G$ a $H$.*

V kapitole 3.2. jsme ukázali, že pokud rozlišujeme jednotlivé vrcholy, tak kompletní graf $K_n$ má $n^{n-2}$ koster. Na straně 92 jsme ukázali, jak spočítat počet koster obecného grafu, pokud rozlišujeme vrcholy. Je přirozené se ptát, kolik *neizomorfních* koster má $K_n$. Odpovídá to situaci, kdy nerozlišujeme vrcholy, což je složitější otázka.

Další přirozená otázka je, kolik existuje neizomorfních grafů s $n$ vrcholy. Počet neizomorfních grafů s $n$ vrcholy je možné určit, není však dán jednoduchou uzavřenou formulí. Vzorce obsahují složitější sumace, případně odhady. Tabulka 4.1. shrnuje počet různých neizomorfních a různých souvislých neizomorfních grafů s malým počtem vrcholů.

| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| zomorfní grafy | 2 | 4 | 11 | 34 | 156 | 1044 | 12346 | 274668 | 12005168 | 1018997864 | 16509117259 |
| oho souvislé | 1 | 2 | 6 | 21 | 112 | 853 | 11117 | 261080 | 11716571 | 1006700565 | 16405983047 |

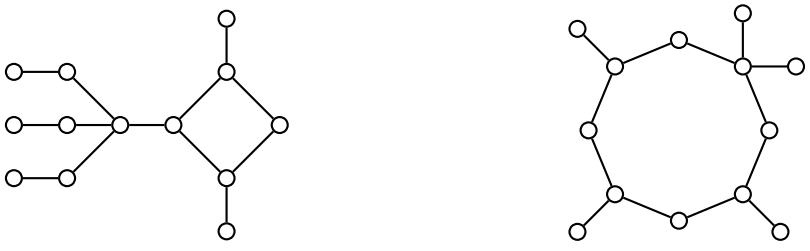
Tabulka 4.1.: *Počty neizomorfních grafů s $n$ vrcholy.*

Přesný výpočet počtu neizomorfních grafů s $n$ vrcholy je obtížný. Počítání neizomorfních grafů se věnujeme na straně ??, odhadům na straně 110.

**Poznámka 4.1.** Při různých nakresleních grafu je každému vrcholu přiřazen bod v rovině, což je informace, která není zahrnuta ve struktuře grafu $(V, E)$. Proto pro různě nakreslené grafy můžeme dostat různá tvrzení, která souvisí s nakreslením grafu (například počet křížení hran). Tématu kreslení grafů se se budeme věnovat v kapitole 9.

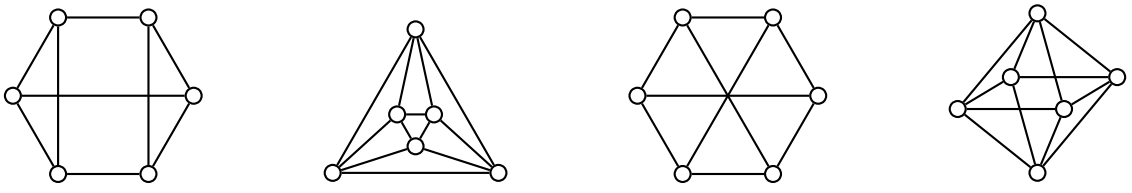
## Cvičení

*4.1.1.*$^{\heartsuit}$ *Ukažte, že grafy na Obrázku 4.3. nejsou izomorfní.*



*Obrázek 4.3.: Grafy $G$ a $H$ na třinácti vrcholech.*

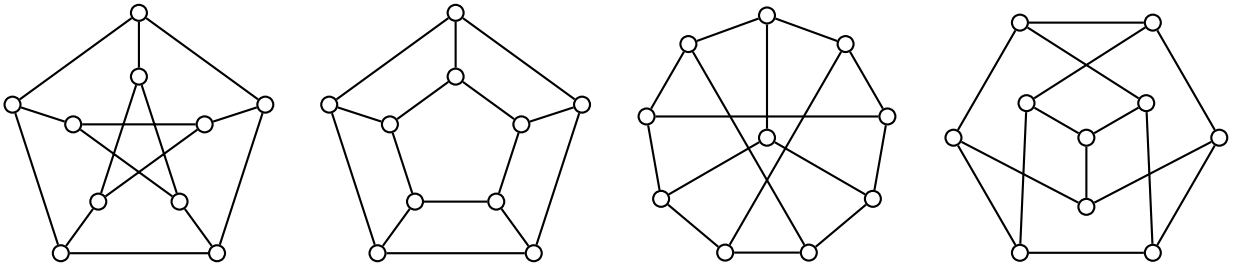
*4.1.2. Rozhodněte, které grafy na Obrázku 4.4. jsou izomorfní.*



$G_1$ $G_2$ $G_3$ $G_4$

*Obrázek 4.4.: Pravidelné grafy $G_1$, $G_2$, $G_3$ a $G_4$ na šesti vrcholech.*

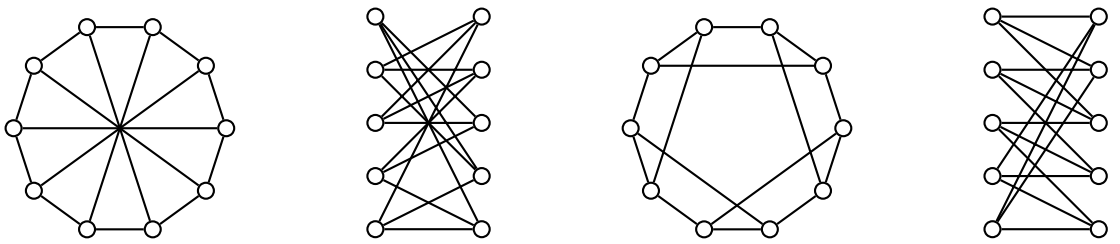
*4.1.3. Rozhodněte, které z následujících grafů jsou izomorfní:*



$G_1$ $G_2$ $G_3$ $G_4$

*Obrázek 4.5.: Grafy $G_1$, $G_2$, $G_3$ a $G_4$.*

*4.1.4. Rozhodněte, které grafy na Obrázku 4.6. jsou izomorfní.*



$G_1$ $G_2$ $G_3$ $G_4$

*Obrázek 4.6.: Pravidelné grafy $G_1$, $G_2$, $G_3$ a $G_4$ na deseti vrcholech.*

*4.1.5. Nechť $T_n$ a $T'_n$ jsou dva stromy s $n$ vrcholy pro které platí $\Delta(T_n) = \Delta(T'_n) = n-2$. Ukažte, že potom $T_n \simeq T'_n$.*

*4.1.6. Dokažte že pro libovolné $n \geq 6$ existují vždy přesně tři neizomorfní stromy $T_n$ takové, že $\Delta(T_n) = n-3$.*

*4.1.7.$^{\heartsuit}$ Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení: Grafy $G$ a $H$ jsou izomorfní právě tehdy když jsou grafy $\overline{G}$ a $\overline{H}$ izomorfní.*

*4.1.8. Ukažte, že existuje 11 navzájem neizomorfních grafů na čtyřech vrcholech.*

*4.1.9. Ukažte, že každý graf $G$ s $n$ vrcholy je izomorfní nějakému podgrafu $K_n$.*

*4.1.10. Nechť $T_n$ je libovolný strom s $n$ vrcholy a $G$ je libovolný graf takový, že $\delta(G) \geq n-1$. Ukažte, že potom $G$ má podgraf, izomorfní s $T_n$.*

*4.1.11. Ukažte, že a) pokud v předchozím Cvičení 4.1.10. bude $\delta(G) = n-2$, tak tvrzení nemusí platit, a b) pokud místo $T_n$ vezmeme libovolný graf s alespoň jedním cyklem, tak tvrzení nemusí platit.*

*4.1.12. Ukažte, že relace $\sim$ zavedená na straně 102 je relací ekvivalence na třídě všech grafů.*

*4.1.13.**Najděte co největší třídu navzájem neizomorfních grafů s $n$ vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Třída by měla obsahovat alespoň $2^{kn}$ různých grafů pro nějaké $k \in \mathbb{Q}^+$, kde $k > 0$.*

*4.1.14. Najděte příklad grafů $G$ a $H$, které splňují podmínky (i)–(v) ve Větě 4.1., ale nejsou izomorfní. Nápověda: hledané grafy nejsou konečné.*

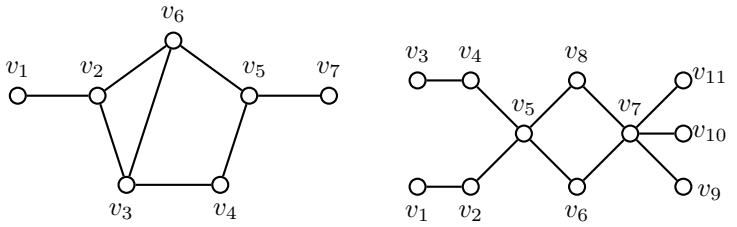
*4.1.15. Existuje více neizomorfních grafů se stupňovou posloupností $(1,1,2,3,4,4,5,5,5,6)$ nebo grafů se stupňovou posloupností $(3,4,4,4,5,5,6,7,8,8)$?*

## 4.2. Automorfismus grafů

Každý graf je triviálně izomorfní sám se sebou. Za izomorfismus můžeme vzít identické zobrazení $\iota : V(G) \to V(G)$. Takový izomorfismus nemusí být jediný, například Petersenův graf má 120 různých izomorfismů na sebe (Cvičení 4.2.14.).

**Definice** Každý izomorfismus $\varphi : V(G) \to V(G)$ se nazývá *automorfismus* grafu $G$.

Graf $H$ na Obrázku 4.7. má kromě triviálního automorfismu $\iota$ například také automorfismus $\varphi$, ve kterém se zobrazí $\varphi(v_1) = v_3$, $\varphi(v_2) = v_4$, $\varphi(v_3) = v_1$, $\varphi(v_4) = v_2$, $\varphi(v_{10}) = v_{11}$, $\varphi(v_{11}) = v_{10}$ a zbývající vrcholy na sebe. Naproti tomu graf $G$ má pouze triviální automorfismus (proč?). *Triviálním* automorfismem $\iota$ rozumíme identické zobrazení $\iota : V(G) \to V(G)$, kde $\forall v \in V : \iota(v) = v$.




Obrázek 4.7.: *Graf $G$ s jediným automorfismem a graf $H$ s více automorfismy.*

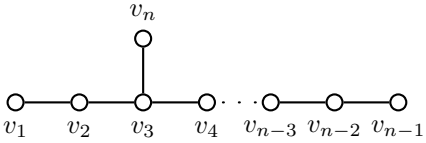
Čím více je graf „symetrický“, tím více má automorfismů. Počet různých automorfismů grafu tak můžeme chápat jako mírou „symetrie“ grafu. Kompletní graf $K_n$ má $n!$ automorfismů (každá možná bijekce je automorfismem), cyklus $C_n$ má $2n$ automorfismů.

**Otázka:** Jaké jsou všechny grafy s $n$ vrcholy, které mají právě všech $n!$ automorfismů?

Protože složením dvou automorfismů $\varphi_1$ a $\varphi_2$ grafu $G$ dostaneme zobrazení $\varphi_2 \circ \varphi_1 : G \to G$, které je opět automorfismem grafu $G$ (složením bijekcí dostaneme bijekci a definice izomorfismu zůstane splněna), protože identita je také automorfismus, a protože inverzní zobrazení k automorfismu je opět automorfismus, tak snadno nahlédneme, že množina všech automorfismů $\Phi$ libovolného grafu $G$ tvoří grupu s operací skládání zobrazení $\circ$. Tato grupa $\mathrm{Aut}(G) = (\Phi, \circ)$ se nazývá *grupa automorfismů* daného grafu $G$. Zjednodušeně můžeme říci, že čím bohatší je grupa automorfismů, tím „symetričtější“ je graf a naopak.

**Grafy s malým počtem automorfismů**

Grafy, které mají pouze triviální automorfismus $\iota$ se nazývají *strnulé* grafy, případně *asymetrické* grafy. Triviální graf je strnulý, má pouze triviální automorfismus $\iota$, dále pro každé $n \geq 6$ (Cvičení 4.2.10.) je možno najít strnulý graf. Například pro $n \geq 7$ stačí vzít cestu $P_{n-1}$ s vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ a přidat vrchol $v_n$ a hranu $v_3v_n$ (Obrázek 4.8.). Výsledný graf je jistě strnulý, protože cesta $P_{n-1}$ má pro $n \geq 7$ pouze dva automorfismy (oba listy se musí zobrazit na listy). Přidáním vrcholu $v_n$ jsme zvýšili stupeň vrcholu $v_3$, zatímco stupeň vrcholu $v_{n-3}$ zůstal 2. Tím jsme zajistili, že $v_3$ se musí zobrazit na sebe, $v_n$ se v libovolném automorfismu musí zobrazit na $v_n$ (jediný jeho soused je stupně 3) a $v_2$ se musí zobrazit na $v_2$, protože to je jediný vrchol, který má jednoho souseda stupně 3 a druhého souseda stupně 1. Podobně se vynutí obrazy zbývajících vrcholů a výsledný strom $T_n$ je strnulý.




Obrázek 4.8.: *Strnulý strom $T_n$ pro $n \geq 7$.*

**Příklad 4.2.** Popište grupu automorfismů cesty $P_n$.
Je-li cesta $P_n$ triviální, má jediný automorfismus. Grupa automorfismů je triviální.

Netriviální cesta má právě dva vrcholy stupně 1, označme je $v_1$ a $v_n$. V každém automorfismu se podle Věty 4.1. vrchol stupně 1 musí zobrazit na vrchol stupně 1, tj. vrchol $v_1$ se musí zobrazit na vrchol $v_1$ nebo $v_n$. Obraz (jediného) sousedního vrcholu $v_2$ je pak určen jednoznačně a stejně i obraz každého dalšího vrcholu $v_i$, $i = 3, 4, \ldots, n$. Netriviální cesta $P_n$ má právě dva automorfismy a grupou automorfismů je (jediná) grupa řádu 2. Označíme-li identický automorfismus 0 a netriviální automorfismus 1, tak tabulka grupy automorfismů odpovídá dvouprvkové symetrické grupě $(S_2, \circ)$, nebo například grupě $(\mathbb{Z}_2, +)$. ✓

**Grafy s velkým počtem automorfismů**

Na druhé straně spektra co do počtu automorfismů jsou grafy, které mají bohatou grupu automorfismů, například kompletní grafy, kompletní bipartitní grafy a hyperkrychle. Při řešení problémů na grafech se někdy nevyhneme probrání velkého počtu možností, které je třeba vyšetřit. Má-li graf velký počet automorfismů, může se obvykle významným způsobem snížit počet případů, které je třeba vyšetřit, neboť víme, že zbývající případy budou odpovídat izomorfní instanci grafu.

**Definice** Graf $G$ se nazývá *vrcholově tranzitivní*, jestliže pro libovolné dva vrcholy $u, v \in V(G)$ existuje takový automorfismus $\varphi$ grafu $G$, že $\varphi(u) = v$. Podobně se graf $G$ nazývá *hranově tranzitivní*, jestliže pro libovolné dvě hrany $xy, uv \in E(G)$ existuje v grafu $G$ takový automorfismus $\varphi$, že $\{\varphi(x), \varphi(y)\} = \{u, v\}$.

Například kompletní grafy $K_n$, hyperkrychle $Q_n$ nebo Petersenův graf jsou vrcholově i hranově tranzitivní.

Vrcholově tranzitivní grafy mají okolí každého vrcholu stejné, lokálně není možné rozlišit, se kterým vrcholem pracujeme. V hranově tranzitivních grafech sice každá hrana může být v nějakém automorfismu zobrazena na jinou hranu, ale oba koncové vrcholy každé hrany mohou být odlišné. Kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$ pro $m \neq n$ je hranově tranzitivní, ale není vrcholově tranzitivní (proč?). Otázka nalezení grafu, který je vrcholově tranzitivní, ale není hranově tranzitivní je ponechána jako Cvičení 4.2.17.

**Příklad 4.3.** Popište grupu automorfismů kompletního grafu $K_n$.
Kompletní graf $K_n$ obsahuje každou hranu a každý vrchol je možno zobrazit na každý vrchol. Každá bijekce vrcholové množiny je automorfismem, proto grupa automorfismů je symetrická grupa $(S_n, \circ)$ všech permutací $n$-prvkové množiny. ✓

## Cvičení

*4.2.1. Ukažte, že vrcholově tranzitivní graf musí být pravidelný. Platí, že hranově tranzitivní graf musí být pravidelný?*

*4.2.2. Nalezněte netriviální automorfismus grafu $H$ z Obrázku 4.7., který je různý od automorfismu uvedeného v textu na straně 107.*

*4.2.3. Kolik automorfismů má graf a) $C_n$; b) $P_n$; c) $K_{m,n}$; d)* hyperkrychle $Q_n$?*

*4.2.4. Nechť $G \simeq H$ a nechť existuje $k$ různých izomorfismů z $G$ do $H$. Co můžeme říci o počtu automorfismů grafu $G$?*

*4.2.5. Najděte nejméně tři nekonečné třídy a) vrcholově tranzitivních grafů b) hranově tranzitivních grafů.*

*4.2.6. Určete rozsah možného počtu různých automorfismů vrcholově tranzitivního grafu s $n$ vrcholy.*

*4.2.7. Ukažte, že je-li graf $G$ strnulý, tak potom i $\overline{G}$ je strnulý graf.*

*4.2.8. Ukažte, že je-li graf $G$ vrcholově tranzitivní, tak potom i $\overline{G}$ je vrcholově tranzitivní.*

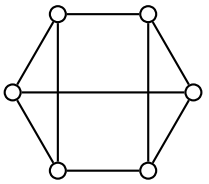
*4.2.9. Platí, že je-li graf $G$ hranově tranzitivní, tak potom i $\overline{G}$ je hranově tranzitivní? Pokud ano, dokažte a pokud ne, najděte protipříklad.*

*4.2.10. Najděte nejmenší netriviální graf a nejmenší netriviální strom, který má pouze triviální automorfismus. Ukažte, že nalezený příklad je nejmenší.*

*4.2.11. Kolik automorfismů mají všechny grafy na čtyřech vrcholech. Čeho si můžeme všimnout, abychom ušetřili polovinu práce?*

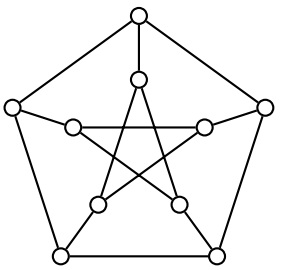
*4.2.12. Najděte příklad netriviálního grafu, který je pravidelný, ale není vrcholově tranzitivní.*

*4.2.13. Je graf na Obrázku 4.9. a) vrcholově tranzitivní? b) hranově tranzitivní?*



*Obrázek 4.9.: 3-pravidelný graf $G$.*

*4.2.14.* Ukažte, že Petersenův graf (Obrázek 4.10.) má přesně 120 automorfismů.*



Obrázek 4.10.: *Petersenův graf.*

*4.2.15. Najděte příklad grafu, který má právě $k$ automorfismů pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.*

*4.2.16.♡ Najděte graf, který je hranově tranzitivní, ale není vrcholově tranzitivní. Pokud takový graf neexistuje, pečlivě zdůvodněte.*

*4.2.17. Najděte graf, který je vrcholově tranzitivní, ale není hranově tranzitivní. Pokud takový graf neexistuje, pečlivě zdůvodněte.*

*4.2.18.* Najděte příklad strnulého 3-pravidelného grafu na dvanácti vrcholech.*

*4.2.19. Jaká je nejmenší stupeň netriviálního pravidelného strnulého grafu?*

*4.2.20. Ukažte, že graf $G$ a jeho doplněk $\overline{G}$ mají stejnou grupu automorfismů.*

*4.2.21. Ukažte, že hranově tranzitivní graf bez izolovaných, který není vrcholově tranzitivní, musí být bipartitní. Takovým grafům se říká (*semi-symetrické*).*

*4.2.22.♡ Proč ve Cvičení 4.2.21. požadujeme, aby graf neměl izolované vrcholy?*

*4.2.23. Ukažte, že graf, který je hranově tranzitivní a není vrcholově tranzitivní, musí být bipartitní.*

*4.2.24.♡ Popište grupu automorfismů grafu $C_n$.*

## 4.3. Doplňková témata

### Výpočetní složitost algoritmů

Mějme nějakou kladnou funkci $g(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Předpokládejme, že hodnota funkce $g(n)$ vyjadřuje odhad počtu kroků nějakého algoritmu v závislosti na velikosti vstupu, který je dán proměnnou $n$.

Symbolem $O(g(n))$ rozumíme takovou množinu nezáporných funkcí $f(n)$, pro které existují kladné konstanty $c$ a $n_0$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ platí $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$. Jestliže řekneme, že algoritmus má složitost $O(g(n))$, tak tím chceme vyjádřit, že počet kroků (základních operací) algoritmu, a tedy i doba běhu algoritmu, poroste stejně jako roste funkce $g(n)$ v závislosti na velikosti vstupu $n$. Přesný počet kroků nebo doba běhu pak závisí (až na nějaký konstantní násobek) na konkrétní implementaci nebo architektuře, případně na taktu použitého procesoru.

Obecně, algoritmy s polynomiální složitostí považujeme za vhodnější pro řešení praktických problémů, ideálně pokud je složitost kubická, kvadratická, či dokonce lineární. Naproti tomu algoritmy, jejichž složitost je dána exponenciální funkcí zpravidla (v závislosti na základu a konkrétním vstupu) vyžadují příliš mnoho kroků, než abychom je mohli pro velké grafy použít pro vyřešení problému.

### Izomorfismus stromů

Jestliže máme dva obecné grafy $G$ a $H$, tak rozhodnout, zda jsou $G$ a $H$ izomorfní, je výpočetně náročná úloha. Zejména, pokud oba grafy splňují nutné podmínky popsané ve Větě 4.1. Obecně je potřeba pro ověření izomorfismu svou grafů $G$, $H$ s $n$ vrcholy prověřit všech $n!$ možných bijekcí $f : V(G) \to V(H)$, zda splňují podmínku zachování sousednosti $uv \in E(G) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(H)$.

Není těžké si uvědomit, že funkce složitosti $O(n!)$ roste rychleji, než funkce exponenciální složitosti $O(2^n)$. Stačí porovnat

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$$
$$2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2$$

Pro $n \geq 5$ můžeme dokonce psát

$$O(n!) \simeq \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}_{24} \cdot \underbrace{5 \cdots 5}_{5^{n-4}} > \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{16} \cdot \underbrace{2 \cdots 2}_{2^{n-4}} \simeq O(2^n)$$

Při hledání izomorfismu můžeme mít štěstí a na vhodný izomorfismus narazit rychle, avšak pro vyvrácení izomorfismu dvou pravidelných grafů s 10 vrcholy je potřeba prověřit $10! = 3\,628\,800$ různých bijekcí, zatímco pro grafy se 100 vrcholy je takových bijekcí již více než $9,3 \cdot 10^{157}$.

Stromy jsou velmi specifické grafové struktury. Acykličnost stromů umožní navrhnou algoritmy, které každému stromu přiřadí nějaký jednoznačně určený kód a porovnání kódů dvou stromů pak můžeme ihned rozhodnout o tom, zda jsou, nebo nejsou izomorfní. Například v rámci předmětu „Diskrétní matematika“ bakalářského studia probíráme jeden takový polynomiální algoritmus, jehož složitost roste jen s třetí mocnou počtu vrcholů. Prověření izomorfismu dvou stromů s 10 vrcholy stačí algoritmus řádově s $1\,000k$ operacemi (pro nějakou vhodnou konstantu $k$, která závisí na konkrétní implementaci) a pro stromy se 100 vrcholy vystačí tento algoritmus řádově s $1\,000\,000k$ operacemi. Při řešení praktických problémů se vždy snažíme mít na paměti algoritmickou složitost řešení.

### Odhady počtu neizomorfních grafů

Určení přesného počtu neizomorfních grafů s daným počtem vrcholů je pracné. Naproti tomu jednoduše můžeme udělat odhad takového počtu.

Označíme-li $p(n)$ počet neizomorfních grafů s $n$ vrcholy, tak $p(n)$ jistě není větší než $2^{\binom{n}{2}}$, což je počet všech různých grafů s $n$ vrcholy. Proto platí

$$p(n) \leq 2^{\binom{n}{2}}.$$

Naproti tomu podle definice izomorfismu nemůže s $n$ vrcholy být více než $n!$ navzájem izomorfních grafů, protože na $n$-prvkové množině existuje nejvýše $n!$ bijekcí (a tedy i potenciálních izomorfismů). Proto jistě platí

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \leq p(n).$$

Označíme horní odhad $p_{max} = 2^{\binom{n}{2}}$ a dolní odhad $p_{min} = \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$. Ukážeme, že tento odhad je sice hrubý (i asymptoticky), ale na logaritmické stupnici při základu 2 jsou obě funkce asymptoticky srovnatelné.

Pro velká $n$ je relativní chyba $(p_{max}(n) - p_{min}(n))/p_{min}(n)$ velká. Přesněji

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{max}(n) - p_{min}(n)}{p_{min}(n)} = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{p_{max}(n)}{p_{min}(n)} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{2^{\binom{n}{2}}}{\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} (n! - 1) = +\infty.$$

Avšak po zlogaritmování při základu 2 (porovnáme tak exponenty odhadů $p_{max}$ a $p_{min}$) a s využitím $n! \leq n^n$ dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(p_{max}(n)) - \log_2(p_{min}(n))}{\log_2(p_{min}(n))} = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{\log_2(p_{max}(n))}{\log_2(p_{min}(n))} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{\log_2 2^{\binom{n}{2}}}{\log_2 \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left( \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{2} - \log_2 n!} - 1 \right) \leq \lim_{n\to\infty} \left( \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{2} - n\log_2 n} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{1}{1 - \frac{\log_2 n}{n}} - 1 \right) = \frac{1}{1-0} - 1$$

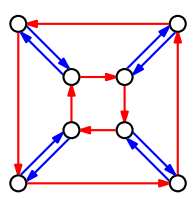
## Cayleyho grafy

Cayleyho graf, nebo někdy také Cayleyho barevný graf je zpravidla hranově obarvený orientovaný graf (digraf). Mějme grupu $(G, \circ)$ a množinu prvků (*generátorů*) $S$, $S \subseteq G$. Sestavíme graf $G = (V, E)$ tak, že položíme $V = G$ a každému prvku $s \in S$ přiřadíme jinou barvu. Prvek $s$ můžeme považovat za barvu. Z každého prvku $g \in V$ povede orientovaná hrana do prvku $g \circ s$ za každý prvek $s \in S$. Takový graf $G$ je orientovaný, z každého vrcholu $g$, $g \in V$, vede stejný počet $|S|$ hran, každá hrana je jiné barvy $s \in S$. Současně do každého vrcholu $g$ vede stejný počet $|S|$ hran $S$ různých barev.

Definice Cayleyho grafu se v různé literatuře v několika ohledech liší. Existuje více variant, zejména různá omezení na prvky množiny $S$. Pokud do $S$ nepatří neutrální prvek grupy, bude Cayleyho graf jednoduchý orientovaný graf (digraf). Pokud je množina $S$ *symetrická*, tj. s každým prvkem $s$, $s \in S$, patří do $S$ také inverze $s^{-1}$, tak můžeme považovat Cayleyho graf za jednoduchý neorientovaný graf.

Každý Cayleyho digraf je vrcholově tranzitivní, ale ne každý vrcholově tranzitivní graf je Cayleyho grafem. Nejmenší příklad vrcholově tranzitivního grafu, který není Cayleyho grafem je Petersenův graf (Obrázek 2.16.).

**Příklad 4.4.** Sestavíme Cayleyho graf dihedrální grupy $(D_{2\cdot 4}, \circ)$ se dvěma generátory $S = \{R_{90}, H\}$. Protože dihedrální grupa $(D_2 \cdot 4, \circ)$ má 8 prvků, má odpovídající Cayleyho graf 8 vrcholů. Označíme je jako prvky grupy $V = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, E, F\}$, kde $H$ odpovídá zrcadlení podle vodorovné osy, $V$ odpovídá zrcadlení podle svislé osy, $F$ odpovídá zrcadlení podle osy prvního a třetího kvadrantu a $E$ odpovídá zrcadlení podle osy druhého a čtvrtého kvadrantu. Protože množina generátorů $S$ má dva prvky, bude příchozí i odchozí stupeň každého vrcholu 2. Cayleyho graf je na Obrázky 4.11. Hran odpovídající prvku $R_{90}$ jsou červené a hrany odpovídající zrcadlení $H$ jsou modré. ✓



Obrázek 4.11.: *Nakreslení Cayleyho grafu grupy* $(D_{2\cdot 4}, \circ)$ *s generátory* $R_{90}$, $H$.

**Otázky:**

- Může každé grupě odpovídat nějaký Cayleyho graf?
- Je pevně zvolené grupě $(G, \circ)$ Cayleyho graf přiřazený jednoznačně?
- Je každý graf Cayleyho grafem nějaké grupy?
- Je každý vrcholově tranzitivní graf Cayleyho grafem nějaké grupy?

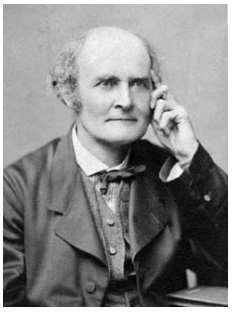
### Odkazy:

- https://en.wikipedia.org/wiki/Cayley_graph
- https://mathworld.wolfram.com/CayleyGraph.html

### Arthur Cayley (16. srpna 1821 – 26. ledna 1895)

Arthur Cayley byl významným Britským matematikem, který se věnoval zejména otázkám algebry. Dětství strávil s rodiči v Petrohradě, do Británie se vrátili, když bylo Arthurovi osm let.

Již v sedmnácti letech nastoupil na Trinity College a ve dvaceti publikoval první vědecké články. Během studií získal několik ocenění a posléze i postgraduální stipendium, takže mohl ve studiích pokračovat. Nicméně na živobytí si vydělával čtrnáct let jako právník, specializoval se na převody vlastnických práv nemovitostí. Během této doby však intenzivně pokračoval ve studium matematiky a vydal více než 200 článků.



Obrázek 4.12.: *Arthur Cayley*

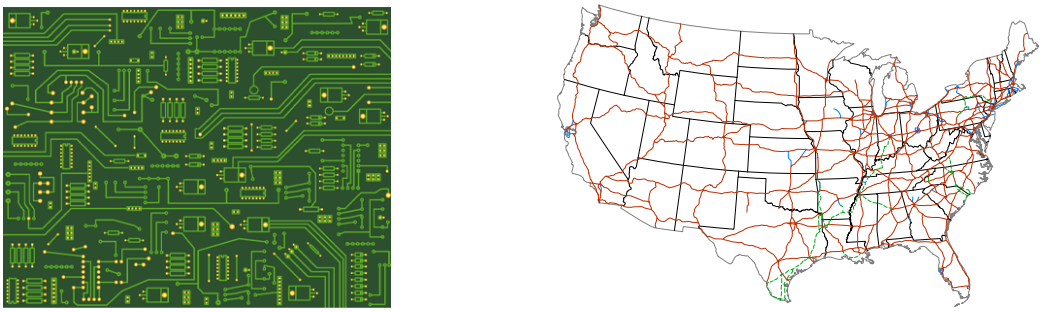
Ve dvaačtyřiceti letech získal trvalé profesorské místo na Univerzitě v Cambridqe. Cayley je autorem moderní definice grupy, věnoval se i algebraické geometrii či eliptickým funkcím. Definice Cayleyho grafu vychází ze struktury Cayleyho věty v algebře, která říká, že každá konečná grupa je izomorfní nějaké podgrupě grupy permutací. Je autorem téměř tisícovky odborných publikací, věnoval se editování časopisů i sborníků. Je po něm pojmenováno více než dvacet matematických pojmů či vět.

### Odkazy:

- https://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Cayley
- https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_things_named_after_Arthur_Cayley

# Kapitola 5. Vrcholová a hranová souvislost

Jestliže nějaký graf reprezentuje komunikační síť, dopravní nebo i virtuální síť, je důležité vědět, jak odolná je taková síť vůči poruchám, které mohou narušit komunikaci nebo transport v síti. Výpadky mohou být dvojího druhu: porucha může nastat jednak v rámci každého spojení, které odpovídá hraně grafu, nebo v křižovatkách/uzlech sítě, které odpovídají vrcholům grafu. V této kapitole si ukážeme, jak takovou souvislost grafu měřit a že souvislost grafu je možno popsat číselným parametrem.



Obrázek 5.1.: *Elektrická síť a dopravní síť (Eisenhowerův systém dálnic).*

## 5.1. Míra souvislosti grafu

V kapitole 2.2. jsme zavedli pojem souvislosti grafu. Přestože oba grafy na Obrázku 5.2. jsou souvislé, tak je intuitivně zřejmé, že kompletní graf vpravo je „souvislejší“. Po odebrání libovolné hrany bude graf $K_{1,7}$ jistě nesouvislý, neboť se jedná o strom. Naproti tomu dokonce po odebrání libovolných pěti hran zůstane graf $K_7$ souvislý.

Obrázek 5.2.: *Grafy $K_{1,7}$ a $K_7$.*

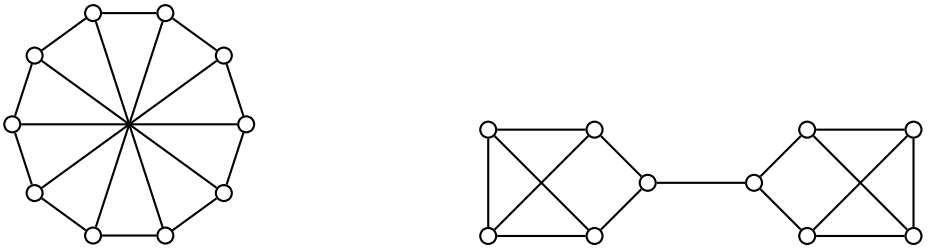
Dle Obrázku 5.2. by se na první pohled mohlo zdát, že vyšší nebo nižší souvislost je určena počtem hran grafu nebo nejmenším stupněm vrcholu v grafu. Není to pravda. Například grafy $M$ a $N$ na Obrázku 5.3. mají stejný počet vrcholů, jsou 3-pravidelné a podle principu sudosti (Věta 1.1.) tak mají také stejný počet hran. Po odebrání libovolných dvou vrcholů zůstane graf $M$ souvislý, zatímco z grafu $N$ stačí odebrat jeden (vhodně zvolený) vrchol a dostaneme nesouvislý graf. Podobně po odebrání libovolných dvou hran zůstane graf $M$ souvislý, zatímco odebráním jediné (vhodně zvolené) hrany z grafu $N$ dostaneme nesouvislý graf. Ukážeme, jak souvislost „měřit“. Zavedeme několik pojmů.

**Řezy**

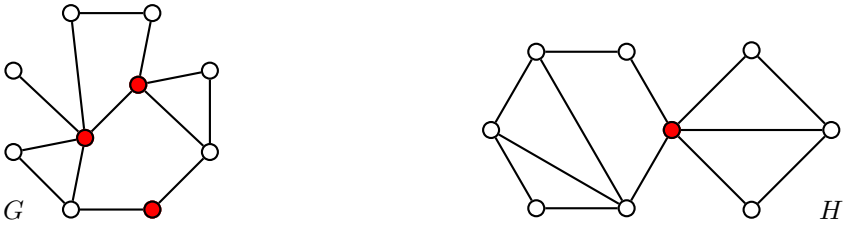
Při zkoumání souvislosti budeme odebírat různé množiny vrcholů a hran. Takovým množinám budeme říkat řezy.

**Definice Vrcholový řez**

Každou množinu vrcholů, jejímž vynecháním dostaneme z grafu $G$ nesouvislý graf, nazýváme *vrcholový řez* (stručně jen *řez*) grafu $G$. V souvislém grafu se vrcholový řez, který obsahuje jediný vrchol, nazývá *artikulace*. V nesouvislém grafu $G$ je artikulací každý vrchol, jehož odebráním z grafu dostaneme graf s větším počtem komponent.




Obrázek 5.3.: *Dva 3-pravidelné grafy $M$ a $N$.*




Obrázek 5.4.: *Vrcholový řez grafu $G$ a artikulace grafu $H$.*

Pojem artikulace pro nesouvislé grafy můžeme vyslovit i jinak. Artikulací je každý jednoprvkový vrcholový řez nějaké komponenty grafu.

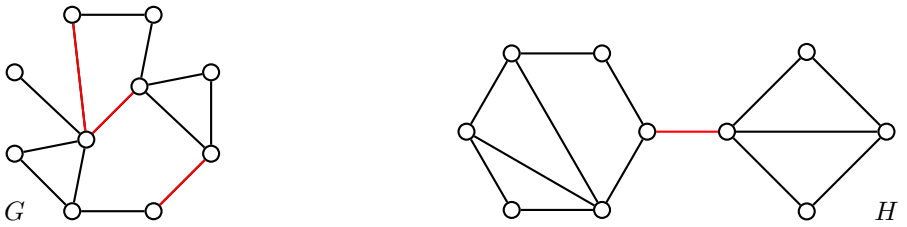
**Příklad 5.1.** Prozkoumáme vyznačené vrcholové řezy grafu na Obrázku 5.4.
Tři červené vrcholy na Obrázku 5.4. vlevo tvoří vrcholový řez grafu $G$. Odebráním všech tří vrcholů dostaneme graf, který má čtyři komponenty.

Červený vrchol na Obrázku 5.4. vpravo tvoří vrcholový řez grafu $H$, který je artikulací. Odebráním tohoto vrcholu dostaneme graf, který má dvě komponenty.

V grafu $G$ však existují i jiné vrcholové řezy. Například také všechny bílé vrcholy tvoří vrcholový řez. Jejich odebráním dostaneme graf, který má dvě komponenty. ✓

Všimněte si, že když graf obsahuje například dvě komponenty, tak odebráním všech vrcholů jedné komponenty dostaneme souvislý graf. Taková množina vrcholů podle definice *není* vrcholovým řezem. Jiné množiny vrcholů, po jejichž odebrání zůstane graf nesouvislý, však definici splňují také.

**Definice Hranový řez**
Každou množinu hran, jejímž vynecháním dostaneme z grafu $G$ nesouvislý graf, nazýváme *hranový řez* grafu $G$. V souvislém grafu se hranový řez, který obsahuje jedinou hranu, nazývá *most*. V nesouvislém grafu $G$ je mostem každá hrana, jejímž odebráním z grafu $G$ dostaneme graf s větším počtem komponent.




Obrázek 5.5.: *Hranový řez grafu $G$ a most grafu $H$.*

**Příklad 5.2.** Prozkoumáme vyznačené hranové řezy grafu na Obrázku 5.5.
Tři červené hrany na Obrázku 5.5. vlevo tvoří hranový řez grafu $G$. Odebráním všech tří hran dostaneme graf, který má dvě komponenty.

Červená hrana na Obrázku 5.5. vpravo tvoří hranový řez grafu $H$, který je mostem. Odebráním této hrany dostaneme graf, který má dvě komponenty.

V grafu $G$ však opět existuje řada jiných hranových řezů. Například také všechny černé hrany tvoří hranový řez. Jejich odebráním dostaneme graf, který má dvě komponenty. ✓

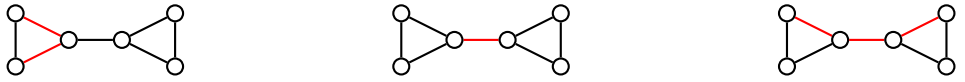
**Řezy, minimální řezy a nejmenší řezy**

Je dobré zdůraznit, že i jiné než *nejmenší možné* množiny vrcholů (respektive hran, pokud zkoumáme hranové řezy), jejichž odebráním ze souvislého nebo nesouvislého grafu dostaneme nesouvislý graf, definici splňují. Například množina vrcholů vyznačená v grafu na Obrázku 5.4. vlevo je vrcholovým řezem, třebaže by stačilo odebrat jen kterékoliv dva vyznačené vrcholy a dostali bychom nesouvislý graf. V daném grafu najdeme dokonce řez obsahující jediný vrchol, tj. v grafu $G$ existuje artikulace. Samozřejmě takové vrcholové řezy, které obsahují nejmenší možný počet vrcholů (resp. takové hranové řezy, které obsahují nejmenší možný počet hran) hrají významnou roli. Ukazují, jak „odolná“ je souvislost daného grafu vůči odebírání vrcholů či hran. Nejprve však musíme připomenout, že „nejmenší řez“ a „minimální řez“ nejsou jedno a totéž.

**Poznámka 5.1. Minimální a nejmenší řez v grafu**

V běžné řeči obvykle nevnímáme rozdíl mezi pojmy minimální a nejmenší, případně maximální a největší (oba pojmy jsme zavedli na straně 10). V matematice naopak rozlišujeme, zda pracujeme s nejmenší množinou, kdy máme obvykle na mysli velikost (počet prvků) nějaké množiny, nebo s minimální množinou, kdy danou množinu porovnáváme v inkluzi s jinými množinami.

Například hranový řez na Obrázku 5.6. vlevo je minimální, ale není nejmenší, neboť odebráním jen jedné z těchto dvou hran nedostaneme nesouvislý graf. Uprostřed je hranový řez, který je minimální i nejmenší a hranový řez na obrázku vpravo není ani minimální ani nejmenší.



Obrázek 5.6.: *Minimální hranový řez, minimální i nejmenší hranový řez a obecný hranový řez.*

**Otázka:** Existuje graf a nějaký jeho nejmenší řez, který není minimálním řezem?

**Vrcholová souvislost**

Nyní se zaměříme na odolnost grafu vůči odstraňování vrcholů.

**Definice Vrcholová souvislost**

*Vrcholová souvislost* (stručně jen *souvislost*) grafu $G$ je takový nejmenší počet vrcholů, které je třeba z grafu $G$ vynechat, abychom dostali nesouvislý graf nebo triviální graf. Vrcholovou souvislost grafu $G$ značíme $\kappa(G)$.

Řekneme, že graf $G$ je *vrcholově $k$-souvislý* (stručně $k$-souvislý) pro $k \in \mathbb{N}$, jestliže $k \leq \kappa(G)$. Nesouvislý graf budeme považovat za 0-souvislý.

Všimněte si, jaký je rozdíl mezi pojmem vrcholové souvislosti grafu a pojmem vrcholové $k$-souvislosti grafu. Vrcholová souvislost je číslo, které je každému grafu jednoznačně přiřazeno, zatímco vrcholová $k$-souvislost je vlastnost, kterou graf buď má nebo nemá. Oba pojmy jsou takto zavedené proto, aby odpovídaly přirozenému očekávání, že například každý 7-souvislý graf je také 6-souvislý, 5-souvislý atd. Je-li vrcholová souvislost grafu $G$ rovna číslu $k \geq 1$, tak potom je $G$ vrcholově $k$-souvislý, je ale také $(k-1)$-souvislý, $(k-2)$-souvislý, …, 1-souvislý. Naproti tomu vrcholovou souvislost grafu $G$ bychom mohli definovat (v některé literatuře je takto pojem vrcholové souvislosti definovaný) jako největší číslo $k$ takové, které $k < |V(G)|$ a pro které je graf $G$ vrcholově $k$-souvislý. Pro netriviální souvislé grafy platí, že vynecháním libovolných $k-1$ vrcholů z $k$-souvislého grafu zůstane výsledný graf souvislý.

Všimněte si, že v kompletním grafu žádný vrcholový řez neexistuje a vrcholová souvislost je rovna velikosti nejmenšího vrcholového řezu v grafu pouze pro nekompletní grafy. Vrcholová souvislost triviálního grafu je 0. Avšak podle definice triviální graf *není* 0-souvislý, tato vlastnost pro triviální graf není definována.

**Příklad 5.3.** Určíme vrcholovou souvislost grafu $G$ na Obrázku 5.7. vlevo a zjistíme, pro jaká $k$ je graf $G$ vrcholově $k$-souvislý.

Obrázek 5.7.: *Graf $G$ a jeho vrcholový řez.*

Graf $G$ je souvislý, proto je vrcholově 1-souvislý a platí $\kappa(G) \geq 1$. Prověřením všech možností snadno nahlédneme, že odebráním jednoho libovolného vrcholu $v$ zůstane graf $G-v$ souvislý. Proto je graf $G$ také vrcholově 2-souvislý a platí $\kappa(G) \geq 2$. Na Obrázku 5.7. vpravo vidíme vrcholový řez obsahující dva červené vrcholy. To znamená, že graf $G$ není vrcholově 3-souvislý a platí $\kappa(G) = 2$. ✓

**Hranová souvislost**

Analogicky nás může zajímat odolnost grafu vůči odstraňování hran.

**Definice Hranová souvislost**

*Hranová souvislost* grafu $G$ je takový nejmenší počet hran, které je třeba z grafu $G$ vynechat, abychom dostali nesouvislý graf nebo triviální graf. Hranovou souvislost grafu $G$ značíme $\kappa'(G)$.

Řekneme, že graf $G$ je hranově *$k$-souvislý* pro $k \in \mathbb{N}$, jestliže $k \leq \kappa'(G)$. Nesouvislý graf budeme považovat za hranově 0-souvislý.

Hranovou souvislost grafu $G$ je můžeme opět chápat jako největší číslo $k$ takové, že graf $G$ je hranově $k$-souvislý. Každý hranově $k$-souvislý graf je také hranově $(k-1)$-souvislý, hranově $(k-2)$-souvislý, atd. Pro netriviální souvislé grafy platí, že jsou hranové $k$-souvislé jestliže vynecháním libovolných $k-1$ hran zůstane výsledný graf souvislý.

Podle definice je vrcholová i hranová souvislost nesouvislého grafu rovna 0. Po krátkém rozmyšlení je jasné, proč je v definici vrcholové i hranové souvislosti explicitně zmíněn triviální graf. Pokud bychom vynechávali vrcholy z kompletního grafu, nikdy nedostaneme nesouvislý graf a vrcholová souvislost kompletního grafu by nebyla definována. A pokud bychom vynechali triviální graf z definice hranové souvislosti a určovali hranovou souvislost triviálního grafu, tak vynecháním žádného počtu hran nedostaneme nesouvislý graf a jeho hranová souvislost by nebyla definována. Pro netriviální graf je hranová souvislost rovna velikosti nejmenšího hranového řezu v grafu. Zahrnutím triviálního grafu do definice nejenže je souvislost triviálního grafu definována, ale má i hodnotu 0, kterou bychom „přirozeně“ očekávali, neboť je menší než u grafu $K_2$. Avšak pozor, triviální graf *není* hranově 0-souvislý, tato vlastnost není pro triviální graf definována.

**Příklad 5.4.** Určíme hranovou souvislost grafu $G$ na Obrázku 5.8. vlevo a zjistíme, pro jaká $k$ je graf $G$ hranově $k$-souvislý.

Obrázek 5.8.: *Graf $G$ a jeho podgrafy.*

Graf $G$ je souvislý, proto je hranově 1-souvislý a platí $\kappa'(G) \geq 1$. Prověřením všech možností snadno nahlédneme, že odebráním jedné libovolné hrany $e$ zůstane graf $G-e$ souvislý. Proto je graf $G$ také hranově 2-souvislý a platí $\kappa'(G) \geq 2$. Na Obrázku 5.8. vpravo vidíme, že graf obsahuje dva podgrafy $K_3$ propojené čtyřmi hranami.

Odebráním libovolných dvou šedých hran $e$, $f$ porušíme podgraf $K_3$, avšak $G-\{e,f\}$ zůstává souvislý, podobně odebráním libovolných dvou černých hran $e$, $f$, nebo jedné černé hrany $e$ a jedné šedé hrany $f$ souvislost neporušíme a graf $G-\{e,f\}$ zůstane souvislý. Proto je graf $G$ také hranově 3-souvislý a platí $\kappa'(G) \geq 3$.

Odebráním všech tří hran incidentních s některým vrcholem stupně 3 dostaneme nesouvislý graf. Proto graf $G$ není vrcholově 4-souvislý a platí $\kappa'(G) = 3$. ✓

**Otázky:**

- Je každý graf, jehož a) vrcholová souvislost b) hranová souvislost je rovna $0$, nesouvislý?
- Je nějaký graf, pro který nelze určit, zda je $k$-souvislý (pro nějakou hodnotu $k \geq 0$, kde $k \in \mathbb{Z}$?
- Je nějaký graf, pro který nelze určit, zda je hranově $k$-souvislý (pro nějakou hodnotu $k \geq 0$, kde $k \in \mathbb{Z}$?
- Proč je kompletní graf $K_n$ podle definice (také) vrcholově $(n-1)$-souvislý?
- Proč není podle definice vrcholové $k$-souvislosti kompletní graf $K_n$ vrcholově $n$-souvislý?

**Vztah mezi vrcholovou a hranovou souvislostí grafu**

Odebereme-li všechny hrany incidentní s některým pevně zvoleným vrcholem, dostaneme nesouvislý graf. Podobně, odebereme-li z grafu všechny sousedy nějakého pevně zvoleného vrcholu, dostaneme nesouvislý graf nebo triviální graf. Následující věta ukazuje, že mezi hranovou souvislostí, vrcholovou souvislostí a nejmenším stupněm vrcholu je jednoznačný vztah.

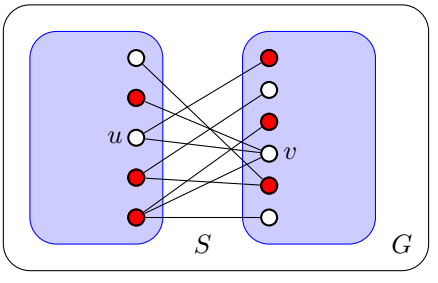
**Věta 5.1.** *V libovolném grafu $G$ platí $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.*

*Důkaz.* V triviálním grafu obě nerovnosti jistě platí, protože $\kappa(G) = \kappa'(G) = \delta(G) = 0$. I v nesouvislém grafu jsou obě nerovnosti splněny, neboť $0 = \kappa(G) = \kappa'(G) \leq \delta(G)$. V dalším můžeme předpokládat, že graf $G$ je souvislý a netriviální.

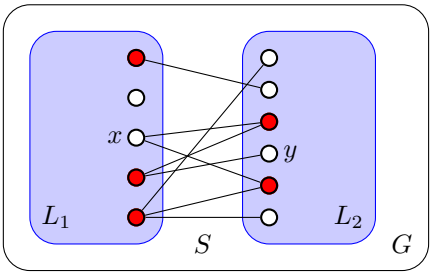
Je zřejmé, že druhá nerovnost platí v každém grafu $G$. Vždy můžeme odebrat hrany incidentní s vrcholem, jehož stupeň je $\delta(G)$, proto hranová souvislost $\kappa'(G)$ nemůže být větší než $\delta(G)$. První nerovnost ukážeme indukcí vzhledem k počtu hran.

*Základ indukce:* Souvislý graf $G$ s nejmenším počtem hran na daném počtu vrcholů je strom. Pro každý netriviální strom $T$ tvrzení jistě platí, protože $\kappa(T) = 1 = \kappa'(T)$. Stačí odebrat hrany incidentní s listem nebo jediný vrchol sousední s listem a dostaneme nesouvislý graf, případně triviální graf, pokud $T \simeq T_2$.

*Indukční krok:* Nyní předpokládejme, že věta platí pro libovolný graf s $t$ hranami. Mějme graf $G$ s $t+1$ hranami a označme $S$ nějaký nejmenší hranový řez grafu $G$ (Poznámka 5.1.). Podle definice hranové souvislosti je $\kappa'(G) = |S|$. Označme $G' = G - uv$, kde $uv$ je libovolná hrana řezu $S$. Všimneme si, že jistě platí, že $S' = S \setminus \{uv\}$ je nejmenší hranový řez grafu $G'$, jinak by $S'$ byl i hranovým řezem grafu $G$ menším než $S$. Podle indukčního předpokladu platí $\kappa(G') \leq \kappa'(G') = |S'|$. Jestliže vrátíme hranu $uv$ do grafu $G - S$, dostaneme souvislý graf (proč?), ve kterém je hrana $uv$ mostem. Nyní vybereme mezi koncovými vrcholy hran z množiny $S \setminus \{uv\}$ takovou množinu vrcholů, abychom pro každou hranu měli vybraný alespoň jeden koncový vrchol různý od $u$ i od $v$ (takový vrchol jistě existuje, proč?). Na Obrázku 5.9. jsou vybrané vrcholy vyznačeny červeně. Vybrané vrcholy vynecháme z grafu $G$ a dostaneme graf $H$. Je-li $H$ nesouvislý, potom $\kappa(G) \leq \kappa'(G') < \kappa'(G)$ a tvrzení platí. Je-li $H$ souvislý, je buď $H \simeq K_2$, nebo alespoň jeden z vrcholů $u$, $v$ je artikulací ($H$ má alespoň 3 vrcholy a mezi $u$ a $v$ nevede v $H$ kromě hrany $uv$ žádná cesta). V obou případech stačí odebrat jeden z vrcholů $u$, $v$ abychom dostali nesouvislý graf nebo triviální graf. Proto je $\kappa(G) \leq \kappa(G') + 1 \leq \kappa'(G)$, neboť platí $\kappa(G') < \kappa'(G)$, a tudíž $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$. □




Obrázek 5.9.: *Graf $G$ s hranovým řezem $S$.*




Obrázek 5.10.: *Graf $G$ s hranovým řezem $S$ spolu s grafem $G - S$ s komponentami $L_1$ a $L_2$.*

*Jiný důkaz.* Pro triviální graf a pro nesouvislé grafy jsou evidentně obě nerovnosti splněny. Hrany incidentní s vrcholem stupně $\delta(G)$ tvoří hranový řez, a proto je druhá nerovnost splněna triviálně.

První nerovnost ukážeme přímo. Z definice vrcholové souvislosti je zřejmé, že $\kappa(G) \leq v(G) - 1$ (po odebrání vrcholů zůstane alespoň triviální graf). Označme $S$ množinu hran nejmenšího hranového řezu, který rozdělí graf na dvě komponenty $L_1$, $L_2$. Pokud jsou všechny vrcholy v $L_1$ sousední se všemi vrcholy v $L_2$, tak $\kappa'(G) = |S| = |L_1| \cdot |L_2| \geq v(G) - 1 \geq \kappa(G)$ a tvrzení platí. V opačném případě zvolme dva nesousední vrcholy $x \in V(L_1)$ a $y \in V(L_2)$.

Nyní sestavíme množinu vrcholů $T$, která bude obsahovat všechny vrcholy z $L_1 - x$, které jsou sousední s některým vrcholem z komponenty $L_2$. Dále do množiny $T$ přidáme všechny vrcholy v komponentě $L_2$, které jsou sousední s vrcholem $x$ (na Obrázku 5.10. jsou vrcholy v $T$ vyznačeny červeně). $T$ je vrcholový řez, neboť každá cesta z $L_1$ do $L_2$ obsahuje některý vrchol z $T$. Platí $|T| \leq |S|$, protože $S$ obsahuje všechny hrany z vrcholu $x$ do vrcholů v $T \cap V(L_2)$ a všechny hrany z $V(L_1 - x)$ do $V(L_2)$, přičemž ke každému vrcholu v $T$ najdeme alespoň jednu různou hranu v $S$ (všechny hrany z vrcholu $x$ do vrcholů v $T \cap V(L_2)$ a alespoň jednu hranu z každého vrcholu v $V(L_1 - x)$ do nějakého vrcholu v $V(L_2)$). Proto $\kappa(G) \leq |T| \leq |S| = \kappa'(G)$ a tím je věta dokázána. □

Je zajímavé si uvědomit, jaký praktický význam má tvrzení Věty 5.1. Pro zajištění souvislosti musíme dbát na vrcholovou souvislost, hranová souvislost bude automaticky splněna. Pozorování můžeme i obrátit. Pokud záškodník chce narušit souvislost sítě, tak vyřazením vrcholů grafu dosáhne svého cíle obvykle snadněji, než přerušením spojení. A proto i ochrana by se měla soustředit na vrcholy hranových řezů malé velikosti.

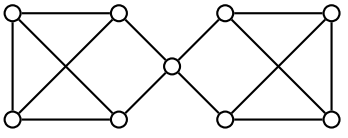
Obě nerovnosti ve Větě 5.1. mohou být neostré, přičemž rozdíl stran v každé z nich může být libovolně velký (Cvičení 5.1.15.). Například v grafu $G$, ve kterém dva kompletní grafy $K_x$ sdílí jediný vrchol, je $\kappa(G) = 1$ a $\kappa'(G) = x - 1 = \delta(G)$. Na druhou stranu v nesouvislém grafu $H$, který má dvě komponenty $K_x$, je $\kappa(H) = \kappa'(H) = 0$, $\delta(H) = x - 1$.

**Otázka:** Proč nestačí v induktivním důkazu Věty 5.1. zvolit za základ indukce graf $T = K_2$?

Následující věta ukazuje, že pro některé speciální třídy grafů rozdíly velké být nemohou. Důkaz je ponechán jako Cvičení 5.1.8. Další podobné omezení je diskutováno ve Cvičení 5.1.6.

**Věta 5.2.** *V každém 3-pravidelném grafu $G$ platí $\kappa(G) = \kappa'(G)$.*

Na Obrázku 5.11. je příklad grafu $G$, ve kterém jsou obě nerovnosti ve Větě 5.1. ostré: $\kappa(G) < \kappa'(G) < \delta(G)$. V $G$ je $\kappa(G) = 1$, $\kappa'(G) = 2$ a $\delta(G) = 3$. Všimněte si, že uvedený příklad grafu neodporuje Větě 5.2., protože $G$ není 3-pravidelný (jeden jediný vrchol je stupně jiného než 3).



Obrázek 5.11.: *Graf $G$, pro který platí $\kappa(G) < \kappa'(G) < \delta(G)$.*

V některých knihách se rozlišuje mezi pojmem *separující množina vrcholů*, což je libovolná množina vrcholů $S$ taková, že $G - S$ má alespoň dvě komponenty a mezi *vrcholovým řezem*, což je pak nějaká nejmenší separující množina vrcholů. Podobně se rozlišuje *separující množinu hran* a *hranový řez*. Následující věta pak platí nejen pro mosty, ale je možno ji zobecnit pro libovolný *minimální* hranový řez, ale ne pro obecnou separující množinu hran.

**Věta 5.3.** *Hrana $e$ je most v souvislém grafu $G$ právě tehdy, když $G - e$ není souvislý a má právě dvě komponenty.*

*Důkaz.* Jedná se o ekvivalenci, dokážeme obě implikace.
„⇒“ Jestliže hrana $e$ je most v grafu $G$, tak podle definice mostu graf $G - e$ není souvislý graf. Není možné, aby graf $G - e$ měl více než dvě komponenty, protože hrana $e$ má právě dva koncové vrcholy z nejvýše dvou komponent. Pokud by graf $G - e$ měl více než dvě komponenty, tak vrácením hrany $e$ do $G - e$ spojíme dva vrcholy z nejvýše dvou komponent, nevznikl by souvislý graf a $e$ by nebyl most grafu $G$.
„⇐“ Jestliže graf $G$ je souvislý a graf $G - e$ není souvislý, tak $\{e\}$ je v grafu $G$ hranovým řezem s jedinou hranou (mostem). □

Následující lemma je praktické při sestavení grafu s předepsanou souvislostí i při určování souvislosti grafu s využitím znalosti souvislosti jeho podgrafů.

**Lemma 5.4. Rozšiřující Lemma**
*Mějme $k$-souvislý graf $G$. Sestavíme graf $G'$, který vznikne přidáním nového vrcholu $v$ a libovolných alespoň $k$ hran incidentních s vrcholem $v$. Graf $G'$ je také $k$-souvislý.*

*Důkaz.* Ukážeme, že souvislost grafu $G'$ je alespoň $k$. Pokud je $G'$ kompletním grafem, tak má alespoň $k + 2$ vrcholů a triviálně platí $\kappa(G') \geq k$. Jinak označme $S$ libovolný řez grafu $G'$. Ukážeme, že $|S| \geq k$.

Pokud vrchol $v \in S$, tak množina $S \setminus \{v\}$ je řezem grafu $G$ a platí $|S| \geq k + 1$. A naopak, pokud $v \notin S$, rozlišíme dva případy. Jestliže okolí $N(v) \subseteq S$, tak jistě $|S| \geq k$, a jestliže $N(v) \not\subseteq S$, tak vrchol $v$ a neodebraná část jeho okolí $N(v) \setminus S$ leží ve stejné komponentě grafu $G' - S$. To znamená, že $S$ je současně řezem grafu $G$ a podle předpokladu platí $|S| \geq k$. □

## Cvičení

*5.1.1.*$^{\heartsuit}$ *Mějme libovolné nezáporné celé číslo $k$. Ukažte, že $2k$-pravidelný graf neobsahuje most.*

*5.1.2. Označme $k = \kappa'(G)$, kde $k > 0$, a nechť $F$ je libovolná množina nějakých $k$ hran z $E(G)$. Ukažte, že potom $\omega(G - F) \leq 2$.*

*5.1.3. Ukažte, že vrcholová verze Cvičení 5.1.2. neplatí. Pro každé $k > 0$ najděte $k$-souvislý graf $G$ a takovou množinu vrcholů $V'$, kde $V' \subseteq V(G)$ a $|V'| = k$, že $\omega(G - V') > 2$.*

*5.1.4. Pro každé $k > 0$ a $r > 1$ nalezněte $k$-souvislý graf $G$ a takovou množinu vrcholů $V'$, kde $V' \subseteq V(G)$ a $|V'| = k$, že $\omega(G - V') > r$.*

*5.1.5. Dokažte, že pro každý hranově $k$-souvislý graf $G$, kde $G = (V, E)$, platí $|E| \geq k|V|/2$.*

*5.1.6. Nechť v grafu $G$ platí $\delta(G) \geq |V(G)| - 2$. Ukažte, že potom platí $\kappa(G) = \delta(G)$. Najděte graf $G'$, pro který platí $\delta(G') = |V(G')| - 3$ a $\kappa(G') < \delta(G')$.*

*5.1.7. Nechť v grafu $G$ platí $\delta(G) \geq |V(G)|/2$. Ukažte, že potom platí $\kappa'(G) = \delta(G)$. Najděte graf $G'$, pro který je $\delta(G') = \lfloor(|V(G')|/2) - 1\rfloor$ a $\kappa'(G') < \delta(G')$.*

*5.1.8. Dokažte Větu 5.2., tj. že v každém 3-pravidelném grafu $G$ platí $\kappa(G) = \kappa'(G)$.*

*5.1.9. Ukažte, že rovnost $\kappa(G) = \kappa'(G)$ platí v každém 1-, 2- a 3-pravidelném grafu $G$, avšak pro 4-pravidelné grafy rovnost platit nemusí.*

*5.1.10. Ukažte, že souvislý graf je strom právě tehdy, když každá jeho hrana je most. Platí, že souvislý graf je strom právě tehdy, když každý jeho vrchol je artikulace?*

*5.1.11. Dokažte, že souvislý graf $G$ je unicyklický právě tehdy, když $|V(G)| = |E(G)|$.*

*5.1.12. Dokažte, že hrana souvislého grafu je most právě tehdy, když neleží v žádném cyklu.*

*5.1.13. Nechť $G$ je $k$-souvislý a nechť $H$ je graf, který vznikne z $G$ přidáním vrcholu $v$ a $k$ hran $vv_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, kde $v_i$ jsou navzájem různé vrcholy grafu $G$. Ukažte, že $H$ je $k$-souvislý. Mohl by být $(k+1)$-souvislý?*

*5.1.14. Nechť $G$ je $k$-souvislý graf s $n$ vrcholy a nechť $H$ je graf, který vznikne z $G$ přidáním vrcholu $v$ a $n$ hran $vv_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, kde $v_i$ jsou navzájem různé vrcholy grafu $G$. Ukažte, že $H$ je $(k+1)$-souvislý.*

*5.1.15. Pro libovolná přirozená čísla $a, b, c$ taková, že $0 < a \leq b \leq c$, sestrojte graf $G$, pro který platí $\kappa(G) = a$, $\kappa'(G) = b$ a $\delta(G) = c$.*

*5.1.16. Nechť pro graf $G$ platí $\kappa(G) \geq 1$, $\kappa'(G) \geq 1$. Jaké jsou možné hodnoty $\kappa(G - v)$, $\kappa(G - e)$, $\kappa'(G - v)$, $\kappa'(G - e)$?*

*5.1.17. Určete vrcholovou souvislost $\kappa$, hranovou souvislost $\kappa'$ i nejmenší stupeň $\delta$ grafů $G$ a $H$ na Obrázku 5.12.*

*Obrázek 5.12.: Grafy $G$ a $H$.*

*5.1.18. Ukažte, že každý souvislý 3-pravidelný bipartitní graf je vrcholově 2-souvislý.*

*5.1.19. Dokažte tzv. „rozšiřující lemma“. Mějme $k$-souvislý graf $G$. Graf $G'$ vznikne z grafu $G$ přidáním nového vrcholu $x$, který bude sousední s alespoň $k$ vrcholy v množině $V(G)$. Ukažte, že graf $G'$ je také $k$-souvislý.*

*5.1.20. Určete počet různých a) vrcholových řezů, b) hranových řezů grafu $C_6$, přičemž vrcholy grafu rozlišujeme označením.*

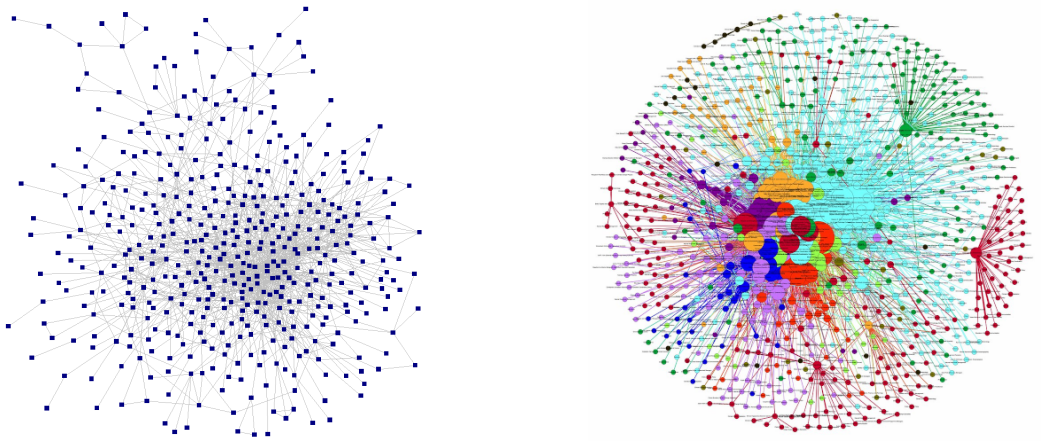
*5.1.21. Ukažte, že opačná implikace v Lemmatu 5.4. neplatí. Mějme $k$-souvislý graf $G$ s alespoň $k + 2$ vrcholy. Sestavíme graf $G'$, který vznikne odebráním vrcholu $v$ (a všech hran incidentních s vrcholem $v$). Ukažte, že graf $G'$ nemusí být $k$-souvislý.*

## 5.2. Bloky a artikulace grafů

Při zkoumání vrcholové souvislosti grafů, které reprezentují komunikační nebo sociální sítě, se často setkáme s grafy, které jako celek mají malou vrcholovou souvislost $\kappa(G)$, ale některé části grafu jsou naopak „velmi souvislé“, tj. existují podgrafy s vysokou souvislostí. Na Obrázku 5.13. jsou příklady takových grafů. Na obrázku vlevo je graf, který reprezentuje vztahy v určité skupině lidí kolem vybraného člověka. Konkrétní příklad týkající se maďarského matematika Paula Erdőse je na Obrázku 5.21. Obrázek vpravo reprezentuje komunikaci týkající se klimatu, počasí a ekologie v odborné komunitě vědců z oblasti pacifiku. V dalším textu se pokusíme zmíněný jev formalizovat.

**Definice** *Blok grafu* je maximální souvislý podgraf daného grafu, který nemá artikulaci. Souvislý graf, který nemá artikulaci, se nazývá *blok*.

Alternativně (ekvivalentně) bychom definici bloku mohli vyslovit popisem vlastnosti (bez užití pojmu artikulace). Ihned z definice artikulace je vidět, že každý podgraf bez artikulace (v podgrafu) je buď vrcholové 2-souvislý graf nebo podgraf, který je příliš malý na to, aby obsahoval artikulaci, tedy podgraf $K_2$, respektive komponenta $K_1$. Podgraf Můžeme zformulovat následující lemma, které pomůže při nalezení bloku.



Obrázek 5.13.: *Příklad grafu, který reprezentuje vztahy v určité skupině lidí.*

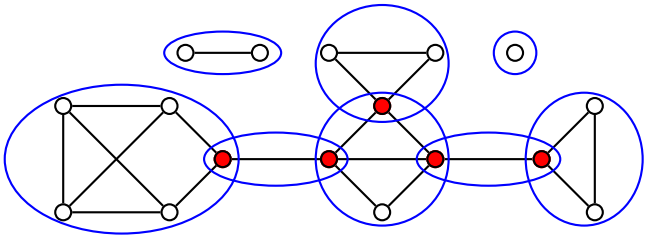
**Lemma 5.5.** Blok grafu *je maximální 2-souvislý podgraf daného grafu nebo podgraf $K_2$ nebo komponenta $K_1$. Graf je* blok, *jestliže je 2-souvislý nebo je $K_2$ nebo je $K_1$.*

Důkaz, že Lemmatu 5.5. je ponechán jako Cvičení 5.2.1.

**Otázky:**

- Jsou uvedené definice bloku grafu ekvivalentní, nebo je některá obecnější?
- Jsou uvedené definice bloku ekvivalentní, nebo je některá obecnější?
- Existují grafy, ve kterých není žádný blok grafu?

Připomeňme, že slovo „maximální“ v definici bloku grafu neznamená „největší“, ale vztahuje se k inkluzi: je-li $B$ blok grafu $G$, tak neexistuje jiný takový blok $B'$ grafu $G$, aby blok $B$ byl vlastním podgrafem bloku $B'$ (viz také strana 10). Na Obrázku 5.14. jsou znázorněny bloky grafu. Podgraf $K_1$ může být blokem grafu jen je-li v triviální komponentě grafu. Podgraf $K_2$ (hrana) může být blokem grafu jen v případě, že hrana je mostem v daném grafu, protože každá hrana, která leží na nějakém cyklu je součástí bloku, který tento (2-souvislý) cyklus obsahuje.



Obrázek 5.14.: *Graf $G$, ve kterém jsou zvýrazněné bloky a artikulace.*

**Věta 5.6.** *Každé dva různé bloky grafu $G$ sdílí nejvýše jeden společný vrchol. Takový společný vrchol je artikulace grafu $G$.*

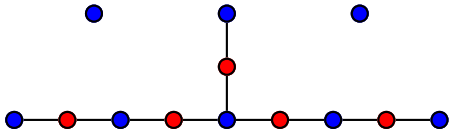
*Důkaz.* Tvrzení ukážeme sporem. Pokud by dva bloky $B_1$ a $B_2$ daného grafu $G$ obsahovaly alespoň dva společné vrcholy $x$, $y$, tak sjednocením[20] bloků $B_1 \cup B_2$ dostaneme souvislý podgraf bez artikulace. Vskutku, odebráním libovolného vrcholu z bloku $B_1$ nebo z bloku $B_2$ neporušíme souvislost, protože $B_1$ i $B_2$ jsou bloky. Dále po odebrání jednoho společného vrcholu, bez újmy na obecnosti odebereme vrchol $x$, zůstane podgraf $(B_1 \cup B_2) - x$ souvislý, protože libovolný $(u, v)$-sled mezi vrcholy bloků $u \in (B_1 - x)$ a $v \in (B_2 - x)$ můžeme získat navázáním $(u, y)$-sledu a $(y, v)$-sledu.

Zbývá ukázat, že pokud existuje společný vrchol, tak tento společný vrchol je artikulace. Společný vrchol bloků $B_1$ a $W_2$ označme $x$. Pokud by společný vrchol nebyl artikulací (vrcholovým řezem s jediným vrcholem), tak i po jeho vynechání by zůstal podgraf $(B_1 \cup B_2) - x$ souvislý a $B_1$ ani $B_2$ by nemohly být dva různé bloky. □

[20] O sjednocení grafů je psáno na straně 72.

**Blokový–artikulační graf**

Máme-li daný nějaký graf $G$, který reprezentuje vztahy mezi vrcholy (lidmi, objekty, ...), tak Věta 5.6. může pomoci při studiu struktury grafu s vrcholovou souvislostí $\kappa(G) = 1$. Sestavíme bipartitní graf, ve kterém vrcholy jedné partity budou odpovídat artikulacím grafu $G$ a v druhé partitě bude za každý blok $B_i$ grafu $G$ jeden vrchol $b_i$. Hranou $vb_i$ spojíme dva vrcholy bipartitního grafu právě tehdy, když se artikulace $v$ nachází v bloku $B_i$. Výsledný graf nazveme *blokový–artikulační* graf a značíme jej Blok($G$). Na Obrázku 5.15. je graf Blok($G$) grafu $G$ z Obrázku 5.14. Ve Cvičení 5.2.4. ukážeme, že blokový–artikulační graf Blok($G$) je acyklický a pokud je graf $G$ souvislý graf, tak Blok($G$) bude dokonce strom.



Obrázek 5.15.: *Graf* Blok($G$)*, jehož modré vrcholy odpovídají blokům a červené vrcholy artikulacím grafu $G$ z Obrázku 5.14.*

**2-souvislé grafy**

Každý blok grafu je 2-souvislý graf. Ukážeme, že v každém 2-souvislém grafu existují mezi každou dvojicí vrcholů dvě „nezávislé“ cesty. Nejprve formálně popíšeme, co rozumíme pod pojmem „nezávislé“ cesty.

**Definice Interně disjunktní cesty**

Dvě cesty v grafu jsou *(vrcholově) disjunktní*, jestliže nemají žádný společný vrchol. Dvě $(u, v)$-cesty v grafu jsou *interně disjunktní*, jestliže nemají žádný společný vrchol s výjimkou koncových vrcholů $u$ a $v$. Dvě cesty v grafu jsou *hranově disjunktní*, jestliže nemají žádnou společnou hranu.

Nyní můžeme vyslovit nutnou a postačující podmínku (vrcholové) 2-souvislosti.

**Věta 5.7.** *Graf s alespoň třemi vrcholy je 2-souvislý právě tehdy, když každé dva jeho různé vrcholy jsou spojeny dvěma interně disjunktními cestami.*

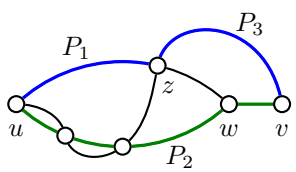
*Důkaz.* Jedná se o ekvivalenci, proto ukážeme obě implikace.

„⇒“ Předpokládejme, že graf $G$ je 2-souvislý. Indukcí vzhledem ke vzdálenosti $\mathrm{dist}(u, v)$ ukážeme, že mezi každými dvěma různými vrcholy $u$ a $v$ existují dvě interně disjunktní cesty.

*Základ indukce:* Předpokládejme nejprve, že $\mathrm{dist}(u, v) = 1$. Potom, protože $G$ je 2-souvislý, je i hranově 2-souvislý (dle Věty 5.1.) a hrana $uv$ není mostem $G$. Podle Cvičení 5.1.12. leží hrana v nějakém cyklu. Hrana $uv$ je jednou z $uv$-cest a zbývající hrany cyklu tvoří druhou interně disjunktní $uv$-cestu.

*Indukční krok:* Mějme vrcholy $u$, $v$ grafu $G$, pro které platí $\mathrm{dist}(u, v) > 1$. Označme $k = \mathrm{dist}(u, v)$ a označme $w$ předposlední vrchol před $v$ na nějaké nejkratší $(u, v)$-cestě. Protože $\mathrm{dist}(u, w) = k - 1$, tak podle indukčního předpokladu existují v $G$ dvě interně disjunktní $(u, w)$-cesty $P_1$ a $P_2$. Pokud $v$ leží na některé z cest $P_1$ nebo $P_2$, tak protože jsou interně disjunktní, dostaneme jejich navázáním cyklus a z něj dvě interně disjunktní $(u, v)$-cesty.

Pokud $v$ neleží na $P_1 \cup P_2$, tak odebráním $w$ z 2-souvislého grafu $G$ dostaneme souvislý graf a v něm najdeme $(u, v)$-cestu $P_3$ ($P_3$ neobsahuje $w$). Jestliže jsou cesty $P_1$, $P_2$ a $P_3$ navzájem disjunktní, tak $P_1$ spolu s hranou $wv$ a cesta $P_3$ jsou hledané interně disjunktní $(u, v)$-cesty. Pokud má $P_3$ společný vnitřní vrchol s $P_1$ nebo $P_2$, tak poslední takový vrchol na $(u, v)$-cestě $P_3$ označíme $z$ (protože $P_3$ není kratší než $P_1$ nebo $P_2$, tak $z$ není sousední s $v$). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $z$ je vnitřní vrchol cesty $P_1$ (Obrázek 5.16.). Nyní $(u, w)$-cesta $P_2$ spolu s hranou $wv$ (v obrázku je vyznačena zelenou barvou) a $(u, z)$-podcesta cesty $P_1$ spolu s $(z, v)$-podcestou cesty $P_3$ (v obrázku je vyznačena modrou barvou) tvoří dvě interně disjunktní $(u, v)$-cesty a tím je tvrzení dokázáno.




Obrázek 5.16.: *Cesty $P_1$, $P_2$, $P_3$ a dvě interně disjunktní $(u, v)$-cesty v grafu $G$.*

„⇐“ Tato implikace je jednoduchá. Pokud jsou každé dva různé vrcholy $u$ a $v$ grafu $G$ spojeny dvěma interně disjunktními cestami, tak po vynechání libovolného jednoho vrcholu (různého od $u, v$), jsou oba vrcholy $u, v$ navzájem dosažitelné po alespoň jedné zbývající cestě. Proto graf $G$ neobsahuje artikulaci a je (alespoň) 2-souvislý. □

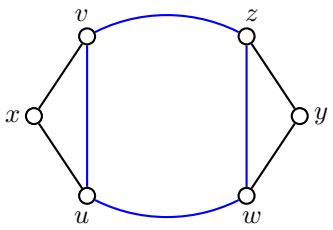
Tvrzení Věty 5.7. zobecníme i pro $k$-souvislé grafy v Mengerových větách na straně 123. Nyní dokážeme dvě tvrzení, která využijeme pro řadu důkazů ve cvičeních.

**Věta 5.8.** *Každé dva vrcholy 2-souvislého grafu leží na společném cyklu.*

*Důkaz.* Mějme dva různé vrcholy $u, v \in G$. Protože $G$ je 2-souvislý, tak podle Věty 5.7. existují mezi $u$ a $v$ dvě interně disjunktní cesty $P = (u = x_1, x_2, \ldots, x_n = v)$ a $Q = (u = y_1, y_2, \ldots, y_n = v)$. Navázáním cest $P$ a $Q$ dostaneme cyklus, který obsahuje oba vrcholy $u$ a $v$. □

**Věta 5.9.** *Každé dvě hrany 2-souvislého grafu leží na společném cyklu.*

*Důkaz.* V důkazu využijeme právě dokázanou Větu 5.8. Mám nějaký 2-souvislý graf $G$ a v něm libovolné hrany $uv$ a $wz$. Do $G$ přidáme dva nové vrcholy $x$ a $y$ a spojíme je hranami $xu$, $xv$ a $yw$, $yz$. Dostaneme graf $G'$, který je také 2-souvislý (proč?).




Obrázek 5.17.: *Konstrukce cyklu $C$, který obsahuje hrany $uv$ a $wz$.*

Nyní podle Věty 5.8. je graf $G'$ 2-souvislý a vrcholy $x$ a $y$ leží na společném cyklu $C'$, který nemůže obsahovat hrany $uv$ a $wz$ (Obrázek 5.17.). Nyní stačí v cyklu $C'$ nahradit cestu $(u, x, v)$ hranou $uv$ a cestu $(w, y, z)$ hranou $wz$. Dostaneme cyklus $C$, který obsahuje hrany $uv$ a $wz$. □

**Otázka:** Platí některá z Vět 5.8. a 5.9. také pro hranově 2-souvislé grafy? Tj. můžeme říci, že každé dvě hrany nebo každé dva vrcholy hranově 2-souvislého grafu leží na společném cyklu?

**Mengerovy věty**

Tvrzení Věty 5.7. je možno zobecnit pro libovolný počet $k$ interně disjunktních cest. Analogické tvrzení platí i pro hranově disjunktní cesty.

**Věta 5.10. Mengerovy věty**

*Graf $G$ je $k$-souvislý právě tehdy, když mezi libovolnými dvěma vrcholy grafu $G$ existuje alespoň $k$ po dvou interně disjunktních cest.*

*Graf $G$ je hranově $k$-souvislý právě tehdy, když mezi libovolnými dvěma vrcholy grafu $G$ existuje alespoň $k$ po dvou hranově disjunktních cest.*

*Důkaz.* Uvedeme McCuaigův důkaz z roku 1984 pro první Mengerovu větu: Graf $G$ je $k$-souvislý právě tehdy, když mezi libovolnými dvěma vrcholy grafu $G$ existuje alespoň $k$ interně disjunktních cest. Tvrzení má tvar ekvivalence, ukážeme obě implikace. Druhou Mengerovu větu ponecháme bez důkazu.

Pro dva nesousední vrcholy $u$, $v$ řekneme, že množina vrcholů $S \subseteq (V(G) - \{u, v\})$ *separuje vrcholy $u$, $v$*, jestliže každá $(u, v)$-cesta obsahuje nějaký vrchol z množiny $S$.

„⇒“ Mějme vrcholově $k$-souvislý graf $G$ a zvolme libovolné dva vrcholy $u, v \in V(G)$. Dále postupujeme indukcí vzhledem ke $k$.

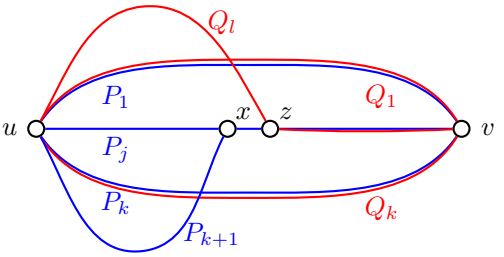
*Základ indukce:* Pro $k = 1$ je graf $G$ vrcholově 1-souvislý graf, tvrzení platí z definice souvislosti.

*Indukční krok:* Jestliže vrcholy $u$, $v$ jsou sousední, hranu $uv$ odebereme (a implikaci dokážeme i pro graf $G - uv$). Předpokládejme, že $G$ je alespoň $(k+1)$-souvislý, kde $k \geq 1$, tj. libovolná množina separující vrcholy $u$, $v$ obsahuje více než $k$ vrcholů. Sporem ukážeme, že v $G$ existuje alespoň $k+1$ interně disjunktních $(u, v)$-cest. Dle indukčního předpokladu existuje v grafu $G$ alespoň $k$ interně disjunktních $(u, v)$-cest $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Množina sestavená z druhých vrcholů (prvních za $u$) těchto cest neseparuje vrcholu $u$, $v$, proto v $G$ existuje $(u, v)$-cesta $P$, jejíž první

hrana neleží na žádné cestě $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Označme $x$ první vrchol cesty $P$ za vrcholem $u$, který leží na nějaké z cest $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Označme $P_{k+1}$ úsek cesty $P$ do vrcholu $x$, tj. $(u,x)$-cestu. Mezi všemi možnostmi, jak zvolit cesty $P_1, P_2, \ldots, P_{k+1}$, zvolíme tu, která má nejmenší vzdálenost vrcholů $x$ a $v$ v grafu $G-u$.

Jestliže $x = v$, tak $P_1, P_2, \ldots, P_{k+1}$ je hledaný systém cest a důkaz končí. Dále předpokládejme, že $x \neq v$. Podle indukčního předpokladu existuje v grafu $G-x$ alespoň $k$ interně disjunktních $(u,v)$-cest $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$. Předpokládejme navíc, že ze mezi všemi možnostmi, jak zvolit cesty $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$, zvolíme tu, která obsahuje co nejméně hran grafu $G$ mimo hrany cest $P_1, P_2, \ldots, P_{k+1}$, tj. co nejméně hran z množiny $B = E(G) \setminus \bigcup_{i=1}^{k+1} E(P_i)$.

Označme $H$ takový podgraf grafu $G$, který je sestavený z vrcholů a hran cest $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ a vrcholu $x$. Mezi cestami $P_1, P_2, \ldots, P_{k+1}$ označme $P_j$ tu cestu, jejíž první hrana nepatří do $E(H)$. Označme $y$ první vrchol cesty $P_j$ za vrcholem $u$, který patří do $V(H)$. Jestliže $y = v$, tak $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, P_j$ je hledaný systém cest a důkaz končí. Dále předpokládejme, že $y \neq v$.




Obrázek 5.18.: *Systémy cest* $P_1, P_2, \ldots, P_{k+1}$ *a* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$.

Jestliže $y = x$, tak nejkratší $(x,v)$-cestu v grafu $G-u$ označme $R$ a označme $z$ první vrchol cesty $R$, který leží na některé cestě $Q_l$, $1 \leq l \leq k$ (Obrázek 5.18.). Víme, že vrchol $x$ na žádné této cestě neleží, protože $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ jsou cesty v grafu $G-x$. Potom je ale v grafu $G-u$ vzdálenost $\mathrm{dist}(z,v)$ menší než vzdálenost $\mathrm{dist}(x,v)$ a existence systému cest $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, P_j$ je ve sporu s volbou systému cest $P_1, P_2, \ldots, P_{k+1}$.

Jestliže vrchol $y$ leží na některé cestě $Q_m$, $1 \leq m \leq k$, tak její výchozí úsek: $(u,y)$-cesta musí mít hranu v množně $B$. Jinak by cesty $P_1, P_2, \ldots, P_{k+1}$ musely mít další společný vrchol kromě vrcholů $u$, $v$ a $x$. Jestliže nyní nahradíme výchozí úsek cesty $Q_l$: $(u,y)$-cestu výchozím úsekem cesty $P_j$: jinou $(u,y)$-cestou, tak dostaneme $k$ interně disjunktních $(u,v)$-cest v grafu $G-x$, které obsahují méně hran množiny $B$, než systém $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$, což je spor s volbou systému cest $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$. Tím důkaz končí.

„⇐“ Jestliže mezi libovolnými dvěma vrcholy $u$, $v$ grafu $G$ existuje $k$ interně diskunktních cest, tak odebráním nejvýše $k-1$ vrcholů porušíme nejvýše $k-1$ těchto cest. Vrcholy $u$, $v$ zůstanou navzájem dosažitelné a graf výsledný graf zůstane souvislý. To znamená, že graf $G$ je vrcholově (alespoň) $k$-souvislý. □

Všimněte si, že hranově disjunktní cesty *mohou* sdílet vrcholy. Proto i z Mengerových vět ihned plyne, že vrcholově $k$-souvislý graf je současně hranově $k$-souvislý, avšak hranově $k$-souvislý graf nemusí být vrcholově $k$-souvislý (například graf na Obrázku 5.11.). Můžeme tak považovat tvrzení zaručující existenci $k$-vrcholově disjunktních cest v $k$-souvislém grafu v jistém smyslu za silnější, než jeho hranovou analogii.

**Ušaté lemma**

Na závěr uvedeme jednu zajímavou nutnou a dostatečnou podmínku pro to, aby graf byl vrcholově 2-souvislý. Nejprve zavedeme pojem „ucha“ v grafu.

**Definice Ucho v grafu**

*Ucho* je každá taková cesta v grafu $G$, jejíž vnitřní vrcholy jsou v grafu $G$ stupně 2 a jejíž koncové vrcholy buď splývají nebo jsou v grafu $G$ stupně alespoň 3.

Všimněte si, že podle definice koncové vrcholy ucha nemohou být stupně 1. Koncové vrcholy jsou stupně 2 pouze v případě, že $G$ je cyklus, jinak musí koncové vrcholy být stupně alespoň 3. Dále, uchem může být i cesta $P_2$, která nemá žádný vnitřní vrchol.

Hassler Whitney dokázal v roce 1932 následující tvrzení, které charakterizuje 2-souvislé grafy.

**Lemma 5.11. Ušaté lemma**[21]

[21] Ačkoli se jedná o neživotná „ucha“, v běžné řeči se při popisu často používá životná forma „uši“.

*Graf $G$ je 2-souvislý právě tehdy, když jej lze získat z cyklu přidáním uší. Navíc, za výchozí cyklus můžeme zvolit libovolný cyklus v grafu $G$.*

*Důkaz.*
„⇒“ Mějme 2-souvislý graf $G$ a v něm zvolme libovolný cyklus $C$. Označme $G_0 = C$ a $G_i$ takový podgraf grafu $G$, který vznikne z grafu $G_0$ postupným přidáním $i$ uší. Jestliže $G_i \neq G$, tak vždy můžeme najít nějakou hranu $uv \in E(G) \setminus E(G_i)$. Dále zvolíme libovolnou hranu $xy \in E(G_i)$, což můžeme udělat neboť $G_0$ má neprázdnou množinu hran.

Graf $G$ je 2-souvislý a podle Věty 5.9. můžeme v $G$ najít cyklus $C'$, který obsahuje obě hrany $uv$ i $xy$. Označme cestu $P$ takovou část cyklu $C'$, která obsahuje hranu $xy$ a pouze koncové vrcholy cesty $P$ leží v podgrafu $G_i$. Všimněte si, že cesta $P$ tvoří ucho, které můžeme přidat do grafu $G_i$ a sestavit větší podgraf $G_{i+1}$ grafu $G$, který vznikl z cyklu $C$ přidáváním uší.

Uvedený proces můžeme opakovat. Přidávání uší skončí až celý graf $G$ vznikne z cyklu $C$ postupným přidáním uší.
„⇐“ Protože každý cyklus je 2-souvislý graf, tak stačí ukázat, že přidáním uší 2-souvislost neporušíme. Označme $u$, $v$ koncové vrcholy ucha $P$. Dále graf, který vznikne přidáním nové hrany mezi vrcholy $u$, $v$, označme $G + uv$. Je-li ucho tvořeno hranou $uv$, tak graf $G + uv$ jistě zůstane 2-souvislý. Každé dva vrcholy původního grafu jsou spojeny dvěma interně disjunktními cestami. Označme $P'$ jednu z cest mezi vrcholy $u$, $v$ v grafu $G$. Cesta $P$ tvoří spolu s cestou $P'$ cyklus $C$, a proto i mezi každými dvěma vrcholy cesty $P$ jsou dvě interně disjunktní cesty v cyklu $C$, a proto jsou i v grafu $G$ s přidaným uchem $P$. Tvrzení nyní plyne z Věty 5.7. □

## Cvičení

*5.2.1. Ukažte, že Lemma 5.5. dává alternativní popis bloku.*

*5.2.2. Graf $G'$ nazveme* rozdělením *grafu $G$, jestliže vznikne z $G$ přidáním vrcholů stupně 2 do jeho hran, tedy hranu $uv$ nahradíme dvojicí hran $uw$ a $wv$, kde $w$ je nový vrchol $G'$, nebo dokonce $(u, v)$-cestou $u, w_1, w_2, \ldots, v$ (definice je na straně 180). (Graf $G'$ potom také nazýváme* homeomorfním obrazem *nebo* homeomorfem *grafu $G$.) Použijte rozdělení grafu pro důkaz Věty 5.9.*

*5.2.3. Nechť netriviální souvislý graf $G$ neobsahuje sudé cykly. Dokažte, že potom každý blok grafu $G$ je buď $K_2$ nebo lichý cyklus.*

*5.2.4. Máme dán graf $G$. Ukažte, že graf* $\mathrm{Blok}(G)$ *je acyklický, a je-li $G$ souvislý, tak* $\mathrm{Blok}(G)$ *je strom.*

*5.2.5. Ukažte, že každý souvislý graf, který není blokem, obsahuje alespoň dva koncové bloky.* Koncový blok *je blok, obsahující jedinou artikulaci.*

*5.2.6. Můžeme v zadání předchozího Cvičení 5.2.5. vynechat požadavek souvislosti?*

*5.2.7. Můžeme v zadání Cvičení 5.2.5. místo souvislosti požadovat existenci alespoň jedné hrany?*

*5.2.8. Určete největší množství artikulací, které mohou ležet v souvislém grafu s $n$ vrcholy.*

*5.2.9. Jaké je největší množství artikulací, které mohou ležet v jediném bloku konečného grafu s $n$ vrcholy.*

*5.2.10. Nechť $G$ na více než dvou vrcholech má $\kappa(G) = 1$. Ukažte, že potom $G$ obsahuje takovou artikulaci $w$, že všechny bloky obsahující $w$ s výjimkou nejvýše jednoho, jsou koncovými bloky $G$.*

*5.2.11. Ukažte, že souvislý sudý graf (sudý graf má všechny vrcholy sudého stupně; definice je na straně 215) neobsahuje žádný most.*

*5.2.12. Ukažte, že pro každé liché $k$, $k = 2t + 1$, existuje $k$-pravidelný graf, který obsahuje most.*

*5.2.13. Dokažte nebo vyvraťte: V každém 2-souvislém grafu $G$ existuje cyklus $C$ takový, že $G - V(C)$ je souvislý graf.*

*5.2.14. Ukažte, že v každém grafu s alespoň jednou hranou existují alespoň dva vrcholy, které nejsou artikulacemi.*

*5.2.15. Mějme graf $G$, jehož každá hrana se vyskytuje v nejvýše jednom cyklu. Ukažte, že každý blok grafu $G$ je buď $K_2$, nebo cyklus, nebo izolovaný vrchol.*

*5.2.16. Dokažte nebo vyvraťte: a) Jestliže průměr grafu $G$ je nejvýše 2, tak jeho doplněk obsahuje izolovaný vrchol; b) Jestliže graf $G$ s průměrem 2 obsahuje artikulaci, tak jeho doplněk obsahuje izolovaný vrchol.*

## 5.3. Doplňková témata

### Chybné použití indukce

V podkapitole 0.6. jsme na straně 24 zmínili, že v teorii grafů se důkazy indukcí obvykle provádí tak, že z „většího“ grafu odebereme nějaký element (vrchol, hrana, podgraf, ...) a s využitím indukčního předpokladu pro „menší“ graf dokážeme tvrzení i pro „větší“ graf po vrácení odebraného elementu. Tento postup na první pohled vypadá jako zbytečně komplikovaný. Proč nestačí do „menšího“ grafu jen něco přidat? Následující varovný příklad ukáže, že existují příklady grafů (spolu s nějakou vlastností), které nemůžeme dostat pouhým přidáním elementu do nějakého menšího grafu s danou vlastností. Může se totiž stát, že některý graf neobsahuje žádný další podgraf *s danou* vlastností a takový graf pak nemůžeme z „menšího“ grafu zkonstruovat. Této chyby se nedopustíme, jestliže nejprve z „většího“ grafu s danou vlastností odebereme nějaký element a prozkoumáme všechny možnosti, které mohou nastat. Přitom využijeme indukční předpoklad.

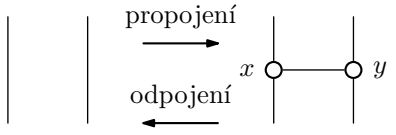
**Příklad 5.5. Varovný příklad**

„Ukážeme“ indukcí vzhledem k počtu vrcholů, že každý souvislý kubický graf neobsahuje most.

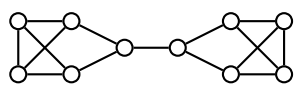
Dle principu sudosti (Věta 1.1.) je počet vrcholů v kubickém grafu sudý, proto se můžeme omezit jen na grafy, které mají $2m$ vrcholů.

*Základ indukce:* Nejmenší kubický graf je $K_4$. Je souvislý a neobsahuje žádný most. Tím jsme ukázali tvrzení pro nejmenší hodnotu $m = 2$ (pro menší hodnotu žádný jednoduchý kubický graf neexistuje).

*Indukční krok:* Předpokládejme, že pro nějaké $m$ tvrzení platí, tj. že každý souvislý kubický graf $G$ na $2m$ vrcholech neobsahuje most. Ukážeme, jak sestavit souvislý kubický graf $G'$ na $2(m+1)$ vrcholech užitím „propojením“: Vezmeme dvě libovolné hrany grafu $G$, nahradíme je cestou délky 2 a oba nově přidané vrcholy $x$ a $y$ spojíme novou hranou (Obrázek 5.19.). Dostaneme graf $G'$, který je jistě souvislý, protože přidáním vrcholů $x$, $y$ a hrany $xy$ se neporuší dosažitelnost a nové vrcholy jsou dosažitelné ze svých sousedů. Navíc graf $G'$ neobsahuje most, protože podle Věty 5.9. stačí ukázat, že každé dvě jeho hrany leží na společném cyklu. Původní hrany tuto vlastnost mají podle indukčního předpokladu. Hrany vzniklé rozdělením a nově přidaná hrana tuto vlastnost mají protože ji měly původní hrany (rozmyslete si jednotlivé případy).




Obrázek 5.19.: *Postup zleva doprava je „propojení“, postup zprava doleva je „odpojení“.*



Obrázek 5.20.: *Příklad souvislého kubického grafu s mostem.*

Protože $G'$ je souvislý a neobsahuje most, tak se zdá, že jsme indukcí ukázali, každý souvislý kubický graf neobsahuje most. Avšak na Obrázku 5.20. je protipříklad! Chybou uvedeného „důkazu“ bylo, že jsme (mlčky) předpokládali, že každý „větší“ souvislý kubický graf $G'$ na $2(m+1)$ vrcholech můžeme dostat „propojením“ z „menšího“ souvislého kubického grafu na $2m$ vrcholech. To není pravda, jak ukazuje protipříklad na Obrázku 5.20. Dokazované tvrzení neplatí! ✓

**Příklad 5.6. Varovný příklad 2**

Mějme libovolnou množinu stromů $T_1, T_2, \ldots, T_n$, kde $T_i$ je strom na $i$ vrcholech. „Ukážeme“ indukcí vzhledem k $n$, že kompletní graf $K_n$ je možno rozložit na stromy $T_1, T_2, \ldots, T_n$ (o rozkladu grafů je psáno na straně 155).
Indukcí vzhledem k $n$ ukážeme dokonce obecnější tvrzení. Ukážeme, že stromy $T_1, T_2, \ldots, T_n$ tvoří rozklad grafu $K_{n+1}$ a navíc, že vrcholy stromu $T_i$ v rozkladu jsou právě vrcholy $v_{n-i}, v_{n-i+1}, \ldots, v_n$, kde $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jsou vrcholy grafu $K_n$.
*Základ indukce:* Pro $n = 1$ tvrzení platí triviálně.
*Indukční krok:* Předpokládejme, že pro nějaké $n$ platí, že libovolná množina stromů $T_1, T_2, \ldots, T_n$ tvoří rozklad kompletního grafu $K_n$.

Vezměme libovolnou množinu stromů $T_1, T_2, \ldots, T_n, T_{n+1}$. Vrcholy grafu $K_{n+1}$ označme $v_1, v_2, \ldots$. Podle Lemmatu 3.1. obsahuje každý ze stromů $T_i$ pro $i > 1$ list. Odebráním listu z každého stromu dostaneme množinu stromů $T_1, T'_2, \ldots, T'_{n+1}$, přičemž $T_1$ a $T'_2$ jsou triviální stromy a nemusíme je uvažovat. Podle předpokladu rozložíme graf $K_n$ na stromy $T'_2, T'_3, \ldots, T'_{n+1}$ a přidáním listu $v_{n+1}$ a hrany $v_{n+2-i}v_{n+1}$ do každého stromu $T'_i$ dostaneme takový rozklad $K_{n+1}$ na stromy $T_1, T_2, \ldots, T_n, T_{n+1}$ (strom $T_1$ zvolíme ve vrcholu $v_{n+1}$), ve kterém vrcholy stromu $T_i$ jsou $v_{n-i}, v_{n-i+1}, \ldots, v_{n+1}$. Tím je důkaz ukončen.

Chyb v uvedeném „důkazu“ je několik. Předně nevíme, zda list bude sousední vždy s jiným vrcholem v rozkladu $K_n$ na stromy $T'_2, T'_3, \ldots, T'_{n+1}$. Dále není jasné, zda vrchol $v_{n+2-i}$ ve stromu $T_i$ je sousední s listem. A konečně není zřejmé, že všechny množiny stromů můžeme sestavit takovým rekurzívním postupem. Nemůžeme, uvedený důkaz by fungoval pouze pro hvězdy. ✓

**Poznámka 5.2.** To, že důkaz uvedený v Příkladu 5.6. je chybný, neznamená, že tvrzení neplatí. Existence rozkladu kompletního grafu na libovolné stromy s různým počtem hran stále patří mezi otevřené problémy. Není znám žádný protipříklad a není znám důkaz tohoto tvrzení.

### Odkazy:

- http://www.maa.org/editorial/euler/How Euler Did It 22 False induction.pdf
- http://en.wikipedia.org/wiki/Inductive_reasoning
- http://www.soe.ucsc.edu/classes/cmps102/Fall02/inductionproof.doc

## Cvičení

*5.3.1. Pro každé celé číslo $m \geq 5$ najděte příklad souvislého kubického grafu s mostem na $2m$ vrcholech.*

*5.3.2. Najděte chybu v následujícím důkazu Cvičení 8.3.8. (příslušné pojmy budou probrány v Kapitole 8.):*

*Mějme graf $G$ s maximálním stupněm 3. Dokažte, že jeho vrcholy lze obarvit dvěma barvami tak, že nevznikne jednobarevná cesta se třemi vrcholy.* Důkaz: *Vrcholy grafu rozdělíme do dvou množin $U$, $V$ podle toho, jakou barvou jsou obarveny. Důkaz povedeme matematickou indukcí vzhledem k počtu vrcholů $n = |U \cup V|$. Pro $n = 1$ je tvrzení triviální. Jediný vrchol obarvíme libovolnou barvou. První netriviální případ nastane pro $n = 2$. Každý vrchol můžeme obarvit jinou barvou a tvrzení jistě platí.*

*V indukčním kroku předpokládáme, že každý graf s méně než $n$ vrcholy umíme obarvit dvěma barvami (rozdělit vrcholy do množin $U$ a $V$) tak, aby $G$ neobsahoval jednobarevnou cestu se třemi vrcholy, tj. každý vrchol má nejvýše jednoho souseda stejné barvy jako je on sám. Pokud máme graf $G$ s $n$ vrcholy, libovolný z nich označíme $x$ a graf $G - x$ podle indukčního předpokladu umíme obarvit. Vrchol $x$ je sousední s nejvýše třemi vrcholy, protože $\Delta(G) \leq 3$. Existuje proto barva, kterou je obarven nejvýše jeden sousední vrchol a vrchol $x$ obarvíme druhou barvou. Tak zajistíme, že vrchol $x$*

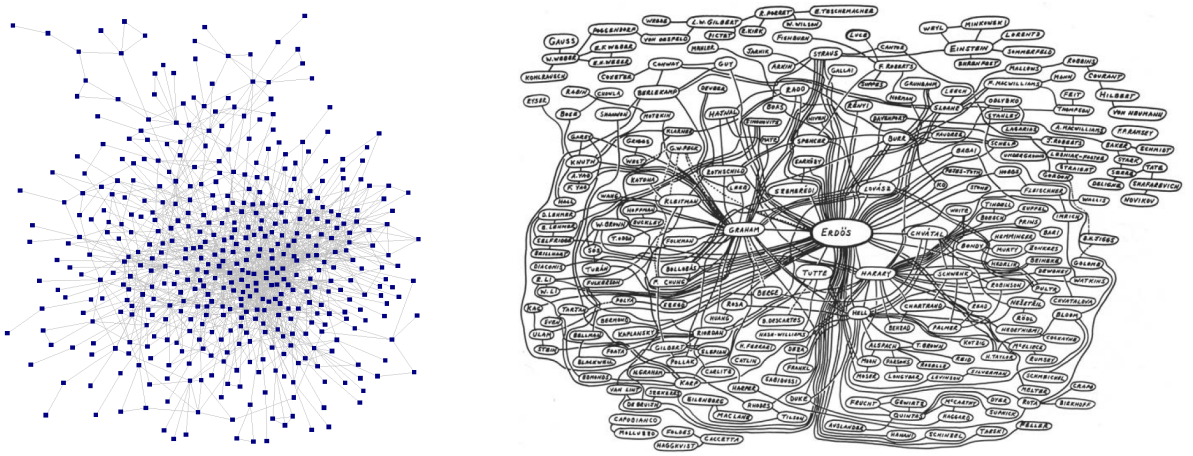
*má nejvýše jednoho souseda stejné barvy jako sám vrchol $x$. Podle principu matematické indukce je důkaz hotov.*

### Erdősovo číslo

Erdősovo číslo je součástí matematického folklóru. Udává „vzdálenost přes autory a spoluautory“ matematických článků až k Paulu Erdősovi. Z původní žertovně pojaté poznámky se stalo obecně známé kritérium, které neoficiálně a možná i mírně poťouchle popisuje prestiž autorů.

Erdősovo číslo je definováno následujícím způsobem. Sám Paul Erdős má Erdősovo číslo 0. Každý jeho spoluautor nějakého vědeckého článku má Erdősovo číslo 1. Každý další autor nějakého vědeckého článku má Erdősovo číslo $k+1$, jestliže nejmenší Erdősovo číslo jeho spoluautorů je $k$. Jestliže někdo nemá žádnou takovou posloupnost spoluautorů až k Erdősovi, je jeho Erdősovo číslo rovno $\infty$.

Erdős je přirozeným kandidátem na vztažnou veličinu, neboť během svého života publikoval (s mnoha spoluautory) ve významných časopisech více vědeckých publikací než kdokoliv jiný. Pro matematiky několika generací je samozřejmostí znát své Erdősovo číslo. Koncem roku 2010 měl graf, jehož vrcholy odpovídaly autorům vědeckých publikací a hrany spojovaly spoluautory článků, více než čtvrt miliónu vrcholů a více než 600 000 hran. Část grafu a starší (menší) verze grafu ze 70. let je na Obrázku 5.21.




Obrázek 5.21.: *Část Erdősova grafu obsahující jen spoluautory Paula Erdőse verze z roku 2004 a velká část celého grafu (z konce 70. let).*

Erdősův graf je příkladem sociální sítě. Je přirozenou otázkou jaká je optimální struktura profesionální sociální sítě, zda hustá síť s malým průměrem, která umožní využít výhod sociálních kontaktů, nebo řídká radiální struktura, která dává prostor inovativním pohledům a přístupům. Erdősův graf na Obrázku 5.21. vlevo má obě vlastnosti. Silně souvislé jádro s řadou řidších větví, které obsahující odborníky z různých oborů.

### Odkazy:

- http://www.oakland.edu/enp/
- http://www.orgnet.com/Erdos.html

### Paul Erdős (26. března 1913 – 20. září 1996)

Paul Erdős byl jeden z nejvýznamnějších matematiků všech dob. Publikoval více článků než kterýkoliv jiný matematik v historii.

Obrázek 5.22.: *Paul Erdős.*

Erdősovo matematické nadání se projevilo záhy. Už ve třech letech zvládal počítání s vysokými čísly. Oba rodiče byli učitelé matematiky, místo prvních let školní docházky zajistili Paulovi domácí učitele.

V roce 1934 dokončil doktorské studium na Univerzitě Pázmány Péter v Budapešti. V témže roce se přestěhoval do Manchesteru v Británii, kde získal stipendium hostujícího přednášejícího. Protože byl židovského původu, tak současně opustil Maďarsko, ve kterém v té době sílil antisemitismus. Roku 1938 poprvé přijal místo na americké univerzitě, když získal stipendium v Princetonu. Tím začala jeho éra putování z univerzity na univerzitu, nikdy nežil dlouho na jednom místě, ale vždy jen cestoval z jednoho matematického pracoviště na jiné až do své smrti.

Žil skromně, neměl téměř žádný hmotný majetek a většinu peněz, které získal (například 50 tisíc dolarů v rámci Wolfovy ceny v roce 1983) rozdal mezi studenty formou drobných cen za vyřešení matematických problémů.

Vzhledem ke svému výstřednímu vystupování a často i neobvyklé slovní zásobě se několikrát dostal do problémů. Koncem padesátých a začátkem šedesátých let dvacátého století dokonce nesměl cestovat do Spojených států.

Během svého života napsal nebo byl spoluautorem téměř 1500 matematických článků. V oblibě měl spíše řešení problémů než budování matematických teorií. Problémy nejen řešil, ale také je formuloval a často vypisoval odměny za jejich vyřešení. Odměny se pohybovaly v rozmezí několika dolarů až několika tisíc dolarů. Řada z nich je stále otevřených a odměny je možno získat.

**Odkazy:**

- http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Erdos.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Erdos
- http://math.ucsd.edu/~fan/ep.pdf

## Cvičení

*5.3.3.*[?] *Jeden Erdősův problém: Ukažte, že každý graf s $n$ vrcholy a alespoň $n(k+1)/2+1$ hranami obsahuje jako podgraf libovolný strom na $k+1$ vrcholech pro $n \geq k+1$.*

*5.3.4.*[?] *Další Erdősův problém: Mějme graf $G$ s $4n$ vrcholy a nejmenším stupněm alespoň $2n$. Potom v grafu $G$ existuje $n$ navzájem hranově disjunktních podgrafů $C_4$.*

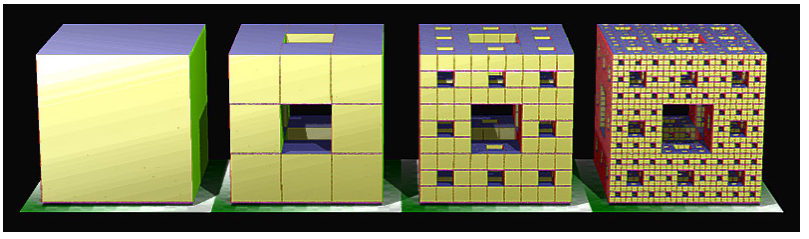
### Karl Menger (13. ledna 1902 – 5. října 1985)

Karl Menger (čti „Karl Menger“) byl rakousko-americký matematik. Narodil se a studoval ve Vídni, kde v letech 1928–1936 působil jako univerzitní profesor, byl členem Vídeňského kroužku. Od roku 1937 žil a pracoval v USA: do roku 1946 byl profesorem matematiky na University of Notre Dame v Indianě a v letech 1946–1971 profesorem na Illinois Institute of Technology v Chicagu.

Obrázek 5.23.: *Karl Menger v roce 1970,* Shimer College Bulletin.

Zabýval se algebrou, topologií, teorií křivek a prostoru. V roce 1927 dokázal vztah mezi $k$-souvioslostí grafu a počtem (interně) disjuktních cest v grafu (Věta 5.10.).

Jeho nejznámější výsledek je pravděpodobně konstrukce tzv. Mengerovy houby, které se někdy nepřesně říká Sierpinského houba (čti „Šerpiňského“). Jedná se o uzavřenou nespočetnou množinu s Lebesgueovou mírou 0. Má nekonečný povrch, ale nulový objem. Mengerova houba je trojrozměrným zobecněním Cantorova diskontinua (nespočetné podmnožiny intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s Lebesgueovou mírou 0).



Obrázek 5.24.: *Ilustrace prvních tří kroků konstrukce Mengerovy houby.*

**Odkazy:**

- http://science.iit.edu/applied-mathematics/about/about-karl-menger
- https://en.wikipedia.org/wiki/Menger_sponge

# Kapitola 6. Párování a pokrytí

## 6.1. Párování

V této kapitole se budeme věnovat pojmu *párování*. Jak název naznačuje, budeme tvořit páry, dvojice. Párování souvisí s řadou praktických problémů. Vezmeme například skupinu pracovníků, kteří v rámci podniku často komunikují telefonem při řešení společných úkolů. Sestavíme graf, jehož vrcholy odpovídají pracovníkům a každá dvojice, která spolu pravidelně komunikuje telefonem, bude spojena hranou. Je přirozené zjistit, kolik pracovních hovorů můžeme vést současně (konferenční hovory neuvažujeme). Hledáme co největší nezávislou množinu hran v grafu. Uvědomte si, že omezení úlohy není dáno jen technickými možnostmi telefonní ústředny, ale také strukturou grafu: kdo s kým potřebuje a kdo může komunikovat, protože každý člověk může v danou chvíli komunikovat jen s jedním dalším člověkem.

Na straně 134 popíšeme další úlohu, tzv. „přiřazovací problém“, který odpovídá hledání párování v bipartitním grafu.

**Definice** **Párování v grafu**
Nezávislá množina hran $M$ grafu $G$ se nazývá *párováním*. Říkáme, že koncové vrcholy hran v $M$ jsou *spárovány* nebo *saturované*.

Párování budeme obvykle označovat písmenem $M$ z anglického „matching“. V každém grafu párování vždy existuje, stačí vzít prázdnou množinu hran. Přirozeně zajímavá otázka je, kolik *nejvíce* hran může párování v daném grafu obsahovat.

**Maximální a největší párování**

**Definice** Řekneme, že párování $M$ v grafu $G$ je *největší*, jestliže pro každé párování $M'$ v grafu $G$ platí $|M| \geq |M'|$. Párování $M$ nazveme *maximální*, jestliže pro každé párování $M'$ takové, že $M \subseteq M'$, platí $M = M'$.

Jinými slovy, párování je maximální, pokud do něj není možné žádnou hranu přidat. Všimněte si, že největší párování je vždy maximální, ale opačná implikace neplatí. Párování $M$ může být maximální, žádnou hranu již není možné do párování přidat, přitom však nemusí být největší. Rozdíl pojmů největší a maximální párování je ilustrován na Obrázcích 6.1. a 6.2.

Obrázek 6.1.: *Cesta $P_6$ s maximálním párováním a s největším párováním.*

Obrázek 6.2.: *Graf s maximálním párováním, které není největší a stejný graf s největším párováním.*

### $M$-alternující a $M$-rozšiřující cesty

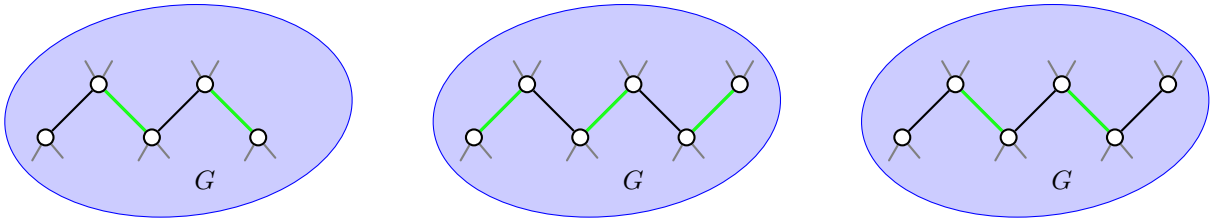
Ukážeme, že existuje poměrně jednoduchá nutná a postačující podmínka pro to, aby nějaké párování $M$ grafu $G$ bylo největší. Abychom mohli podmínku popsat zavedeme následující pojmy.

**Definice** Mějme nějaké párování $M$ v grafu $G$. Vrchol $v$ grafu $G$ nazveme *$M$-saturovaným*, jestliže je koncovým vrcholem nějaké hrany v $M$. Jinak se $v$ nazývá *$M$-nesaturovaný*. Párování $M$ se nazývá *úplné* (nebo též *perfektní*), jestliže je každý vrchol grafu $G$ $M$-saturovaný.

Netriviální cesta $P$ v grafu $G$ se nazývá *$M$-alternující*, jestliže se na cestě $P$ pravidelně střídají hrany, které patří do párování $M$, a hrany, které do $M$ nepatří. Jestliže navíc oba koncové vrcholy nějaké $M$-alternující cesty $P$ jsou $M$-nesaturované, říkáme, že cesta $P$ je *$M$-rozšiřující cesta*.

Cesty na Obrázku 6.3. jsou $M$-alternující, cesta vpravo je i $M$-rozšiřující. V dalším textu se zaměříme na hledání největšího párování v daném grafu. Párování, které je v daném grafu největší, budeme značit $M^*$ (všimněte si, že takových párování může existovat několik).

Jestliže existuje úplné párování v nějakém grafu $G$, říkáme, že $G$ má úplné párování. Pochopitelně ne každý graf má úplné párování. Například bipartitní graf $K_{1,n}$ pro $n \geq 2$ nemá úplné párování, ani žádný graf s lichým počtem vrcholů nemá úplné párování.




Obrázek 6.3.: *Dvě $M$-alternující cesty a $M$-rozšiřující cesta v grafu $G$ (vpravo).*

**Otázky:**

- Najdete v Obrázku 6.2. $M$-rozšiřující cestu?
- Je některé párování na Obrázcích 6.1. a 6.2. úplné?

Následující věta dává pěknou charakteristiku největších párování, kterou lze snadno algoritmicky prověřit.

**Věta 6.1.** *Párování $M$ v grafu $G$ je největší právě tehdy, když graf $G$ neobsahuje žádnou $M$-rozšiřující cestu.*

*Důkaz.* Jedná se o ekvivalenci, ukážeme obě implikace $P \Leftrightarrow T$.

„$\Rightarrow$“ Postupujeme nepřímo. Předpokládejme, že $G$ obsahuje nějakou $M$-rozšiřující cestu $P$. Ukážeme, že pak párování $M$ není největší.

Každý vnitřní vrchol cesty $P$ je incidentní s jednou hranou patřící do $M$ a jednou hranou, která do $M$ nepatří. Koncové vrcholy cesty $P$ nejsou podle definice incidentní s žádnou hranou v $M$, proto můžeme z $M$ vynechat všechny hrany, které leží na cestě $P$ (tj. každá druhá hrana cesty $P$) a místo nich do $M$ přidat všechny hrany cesty $P$, které do párování $M$ nepatřily (takových hran je o jednu více, včetně první a poslední hrany). Dostaneme párování $M'$, které má o jednu hranu více než párování $M$, a proto nebylo párování $M$ největší.

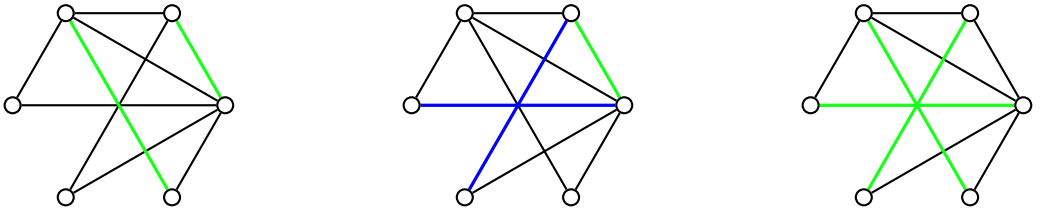
„$\Leftarrow$“ Opět postupujeme nepřímo. Předpokládejme, že $M$ není největší párování, tj. existuje větší párování $M'$. Ukážeme, že $G$ obsahuje nějakou $M$-rozšiřující cestu.

Sestavíme graf $H = (V(G), E)$, kde do $E$ dáme všechny takové hrany, které patří jen do jednoho párování $M$ nebo $M'$ ($E = M \triangle M'$ je symetrická diference množin $M$ a $M'$). Protože každý vrchol grafu $G$ je incidentní s nejvýše jednou hranou z párování $M$ a s nejvýše jednou hranou z párování $M'$, je $\Delta(H) \leq 2$. To znamená, že každá komponenta grafu $H$ je buď cyklus nebo cesta. Navíc, protože se v každém takovém cyklu pravidelně střídají hrany z párování $M$ a z párování $M'$, jsou všechny cykly v grafu $H$ sudé délky.

Protože $M'$ je větší párování než $M$, tak graf $H$ musí obsahovat alespoň jednu netriviální komponentu, která má více hran z párování $M'$ než z párování $M$. Každá triviální komponenta grafu $H$ a každý sudý cyklus mají

sudý počet hran, proto musí graf $H$ obsahovat alespoň jednu cestu $P$ liché délky takovou, že obsahuje o jednu hranu z párování $M'$ více než z párování $M$. Cesta $P$ je současně hledanou $M$-rozšiřující cestou v grafu $G$. □

**Příklad 6.1.** Je párování $M$ v grafu $G$ na Obrázku 6.4. vlevo největší? Pokud ne, najděte největší párování.



Obrázek 6.4.: *Graf $G$ s párováním $M$, $M$-rozšiřující cesta a párování $M'$.*

Protože párování $M$ není úplné, zkusíme najít $M$-rozšiřující cestu. Taková cesta je vyznačena na Obrázku 6.4. uprostřed: zelené hrany do párování $M$ patří a modré hrany do párování $M$ nepatří. Záměnou zelené hrany v množině $M$ za modré hrany dostaneme větší párování $M'$, které je na Obrázku 6.4. vpravo. ✓

Věta 6.1. dává nejen nutnou a postačující podmínku, kdy je nějaké párování grafu $G$ největší, ale navíc její důkaz dává postup, jak největší párování sestavit. Potřebujeme jen efektivní algoritmus pro hledání $M$-rozšiřujících cest. Jeden možný postup je následující: můžeme začít množinou nesaturovaných vrcholů a hledat všechny vrcholy (postupem do šířky nebo do hloubky) dosažitelné po alternujících cestách. Pro každý vrchol uchováme informaci o jeho předchůdci na $M$-rozšiřující cestě. Jakmile najdeme $M$-nesaturovaný vrchol, můžeme zpětně zrekonstruovat alternující cestu $P$ a záměnou hran cesty $P$, které do párování $M$ patří a které ne, zvýšit počet hran v párování.

## Cvičení

*6.1.1. Kolo $W_{n+1}$ je graf, který vznikne z cyklu $C_n$ s vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ přidáním vrcholu $v_0$ a všech hran $v_0v_1, v_0v_2, \ldots, v_0v_n$ (viz strana 74). Určete, pro které hodnoty $n$ má $W_{n+1}$ úplné párování.*

*6.1.2. Které úplné tripartitní grafy mají úplné párování?*

*6.1.3. Kolik různých úplných párování mají grafy a) $K_n$, b) $C_n$?*

*6.1.4. Dokažte, že strom má nejvýše jedno úplné párování.*

*6.1.5. Pro každé $k > 1$ najděte příklad $k$-pravidelného grafu, který nemá úplné párování.*

*6.1.6. Pro každé $p > 0$ najděte graf $G$ a takové jeho maximální párování $M$, že pro největší párování $M^*$ v grafu $G$ platí $|M^*| = |M| + p$.*

*6.1.7.♡ Pro každé $p > 0$ najděte souvislý graf $G$, že pro největší párování $M^*$ v grafu $G$ platí $|V(G)| = 2|M^*| + p$.*

*6.1.8. Dva hráči hrají následující hru. Střídavě obarvují vrcholy grafu $G$ tak, že první hráč obarvuje modrou barvou, druhý hráč červenou barvou a každý musí vybarvit některý nevybarvený vrchol, který je sousední s vrcholem, jež jeho protihráč vybarvil v předchozím tahu. Ten hráč, který nemůže obarvit další vrchol podle pravidel, prohrál. Ukažte, že první hráč může vyhrát vždy, když $G$ nemá úplné párování a druhý hráč může vždy vyhrát, když graf $G$ má úplně párování.*

*6.1.9. Mějme kubický graf $G$, který má úplné párování $M$. Ukažte, že každý most grafu $G$ patří do úplného párování $M$.*

*6.1.10. a) Najděte v Petersenově grafu (Obrázek 4.10.) takové maximální párování, které saturuje pouze 6 vrcholů. b) V grafu pravidelného dvanáctistěnu (Obrázek 9.27.) najděte takové maximální párování, které saturuje pouze 12 vrcholů. Dále najděte rozšiřující cesty, pomocí kterých lze najít úplné párování obou graf.*

*6.1.11.* Mějme $k$-pravidelný graf $G$ s $n$ vrcholy a nějaké jeho maximální párování $M$. Kolik nejméně může mít maximální párování grafu $G$ hran? Tj. kolik nejvýše může v grafu $G$ být $M$-nesaturovaných vrcholů? Najdete příklad takového grafu a jeho maximální párování pro $k = 2$ a $k = 3$?*

## 6.2. Párování v bipartitních grafech

Na straně 50 bylo zavedeno okolí vrcholu $v$ jako množina $N_G(v)$ všech vrcholů, které jsou sousední s vrcholem $v$ v grafu $G$. Podobně zavedeme okolí množiny vrcholů, případně „ryzí“ okolí množiny vrcholů.

**Definice Okolí množiny vrcholů**
Je-li $S \subseteq V(G)$, tak *okolí množiny* $S$ je množina všech vrcholů grafu $G$, které jsou sousední s alespoň jedním vrcholem v $S$. Okolí množiny $S$ budeme značit $N_G(S)$ nebo $N(S)$. *Ryzí okolí množiny* $S$ je množina všech vrcholů grafu $G$, které jsou sousední s alespoň jedním vrcholem v $S$ a zároveň nepatří do $S$.

Okolí množiny vrcholů $S$ v grafu $G$ můžeme také definovat množinovým zápisem

$$N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$$

a ryzí množiny $S$ okolí pak zápisem

$$\bigcup_{v \in S} N(v) \setminus S.$$

Jestliže vrcholy v množině $S$ jsou nezávislé, tak okolí množiny $S$ je současně ryzí.

**Příklad 6.2. Úplné párování v grafu $K_{n,n}$ s partitami $U$ a $W$**
Na párování grafu $K_{n,n}$ se můžeme dívat jako na zobrazení z partity $U$ do partity $W$. Úplné párování tak přiřadí každému vrcholu partity $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ právě jeden vrchol partity $W$ a naopak každému vrcholu partity $W$ lze přiřadit právě jeden vrchol partity $U$. Protože existuje $n!$ různých bijekcí mezi $n$-prvkovými množinami, tak v grafu $K_{n,n}$ existuje $n!$ různých úplných párování.

**Přiřazovací problém**
Pojem bipartitního grafu přirozeně vyvstane u praktických aplikací, kdy vrcholy grafu mají dva různé významy. Bipartitním grafem můžeme například modelovat situaci, kdy máme množinu úkolů, které je nutno vykonat a množinu pracovníků, kteří mohou mít různou kvalifikaci, každý pro vykonání určité podmnožiny úkolů. Hrany takového grafu spojují vždy pracovníka s několika úkoly, žádné hrany nespojují vrcholy, které odpovídají dvěma pracovníkům nebo dvěma úkolům. Přirozenou úlohou je, rozdělit úkoly jednotlivým pracovníkům tak, aby co nejvíce úkolů bylo řešeno současně. Přiřazovací problém pak odpovídá nalezení největšího párování v daném grafu. Ideálně, pokud mají být všechny úlohy vyřešeny, musíme být schopni přidělit úkoly tak, aby každý úkol byl přidělen nějakému pracovníkovi. To odpovídá nalezení takového párování, které saturuj všechny vrcholy v partitě úkolů.

**Hallova věta**
Po chvíli přemýšlení si všimneme, že má-li bipartitní graf úplné párování, tak musí

- obě partity mít stejný počet vrcholů,
- každý vrchol být stupně alespoň 1 (každý vrchol z jedné partity musí být sousední s alespoň jedním vrcholem z druhé partity),
- každé dva vrcholy z jedné partity musí být sousední s alespoň dvěma vrcholy z druhé partity,
- každé tři vrcholy z jedné partity musí být sousední s alespoň třemi vrcholy z druhé partity...

Je zřejmé, že poslední dvě podmínky musí platit pro libovolnou podmnožinu vrcholů v jedné partitě. Následující věta (v anglické literatuře se jí často říká „Marriage theorem“) říká, že takováto nutná podmínka pro existenci úplného párování je zároveň postačující. Všimněte si, že věta je zformulována tak, aby platila i pro $K_{m,n}$, kde $m \neq n$, tj. udává nutnou a postačující podmínku pro existenci párování, které saturuje všechny vrcholy jedné partity.

**Věta 6.2. Hallova věta**
*Nechť $G$ je bipartitní graf s partitami $U$ a $W$. Graf $G$ má párování $M$, které saturuje všechny vrcholy množiny $U$ právě tehdy, když $|S| \leq |N(S)|$ pro každou podmnožinu $S \subseteq U$.*

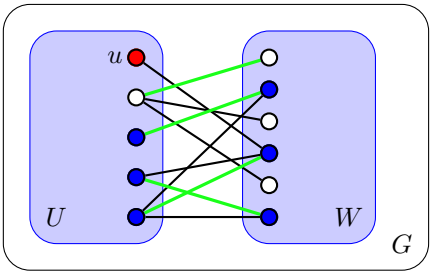
*Důkaz.* Jedná se o ekvivalenci, ukážeme obě implikace $P \Leftrightarrow T$.
„$\Rightarrow$“ První implikace je snadná. Je-li $M$ párování, které saturuje všechny vrcholy množiny $U$, potom ke každému vrcholu $u \in U$ existuje právě jeden (různý) vrchol $w \in W$ takový, že $uw \in M$. Proto pro každou podmnožinu $S \subseteq U$ bude podmnožina $N(S) \subseteq W$ (uvědomte si, že $N(S)$ je ryzí okolí množiny $S$) a bude také obsahovat alespoň tolik vrcholů jako $S$ a platí $|N(S)| \geq |S|$.
„$\Leftarrow$“ Důkaz provedeme nepřímo. Ukážeme, že je-li $M^*$ největší párování v $G$ a $M^*$ nesaturuje všechny vrcholy $U$, potom najdeme takovou množinu $S \subseteq U$, že pro její (ryzí) okolí platí $|N(S)| < |S|$.

Označme $u$ některý z $M^*$-nesaturovaných vrcholů v množině $U$. Podle předpokladu takový vrchol existuje. Dále označme $Z$ množinu všech vrcholů bipartitního grafu $G$, které jsou dosažitelné z vrcholu $u$ po nějaké $M^*$-alternující cestě. Všimneme si, že vrchol $u$ je jediný nesaturovaný vrchol v množině $Z$, všechny ostatní vrcholy v $Z$ jsou saturovány, protože jinak by $M^*$ nebylo největší párování (dvě Věty 6.1.). Nyní označíme

$$S = Z \cap U, \quad T = Z \cap W.$$

Protože každá $M^*$-alternující cesta z $u$ spáruje jeden z vrcholů v $T$ s jedním vrcholem v $S \setminus \{u\}$, jistě platí

$$|T| = |S| - 1.$$




Obrázek 6.5.: *Bipartitní graf s párováním $M^*$ a modře vyznačenými vrcholy v množině $Z$.*

Z konstrukce množin $S$ a $T$ je zřejmé, že $T \subseteq N(S)$ (Obrázek 6.5.). Ukážeme, že dokonce $T = N(S)$, neboť v $N(S) \setminus T$ nemůže být žádný vrchol $x$ grafu $G$, protože vrchol $x$ by byl dosažitelný z $u$ po $M^*$-alternující cestě *liché* délky a byl by $M^*$-nesaturovaný a párování $M^*$ by nebylo největší. Celkem dostáváme

$$|N(S)| = |T| = |S| - 1 \quad \Rightarrow \quad |N(S)| < |S|.$$

Tím nepřímý důkaz končí. □

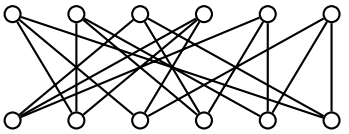
Hallova věta se hodí k snadnému důkazu, že v daném bipartitním grafu $G$ neexistuje úplné párování. Pokud najdeme množinu $S \subseteq W$, pro kterou platí $|S| > |N(S)|$, tak $G$ nemá úplné párování. Na druhou stranu, pro nalezení úplného párování je možno použít myšlenky z důkazu Věty 6.1.

**Důsledek 6.3.** *Každý pravidelný bipartitní graf s alespoň jednou hranou má úplné párování.*

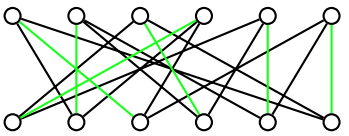
*Důkaz.* Mějme pravidelný bipartitní graf $G$ s partitami $U$ a $W$. Protože všechny hrany v $G$ spojují vždy jeden vrchol z $U$ s nějakým vrcholem ve $W$, a protože z $U$ vychází celkem $k|U|$ hran a z $W$ vychází celkem $k|W|$ hran, je $|U| = |W|$ (Cvičení 3.3.2.).

Ukážeme, že každý $k$-pravidelný bipartitní graf pro $k > 0$ splňuje Hallovu větu. Vezmeme libovolnou podmnožinu $S \subseteq U$. Z množiny $S$ vede celkem $k|S|$ hran, proto do $N(S)$ vede alespoň $m = k|S|$ hran. Protože $G$ je pravidelný, je $k|N(S)| \geq m$. Odtud je $k|S| \leq k|N(S)|$, a proto $|S| \leq |N(S)|$. Množina $S$ byla zvolena libovolně, a proto podle Hallovy věty má $G$ úplné párování. □

**Příklad 6.3.** Existuje v grafu $G$ na Obrázku 6.6. úplné párování? Pokud ano, najděte jej.



Obrázek 6.6.: *Bipartitní graf $G$.*



Obrázek 6.7.: *Úplné párování v bipartitním grafu $G$.*

Protože graf $G$ je pravidelný bipartitní graf, tak podle Důsledku 6.3. v něm úplné párování existuje. Pokud při konstrukci párování najdeme nějaké maximální párování $M$, které není úplné, můžeme s využitím Věty 6.1. najít nějakou $M$-rozšiřující cestu a najít větší párování. Po několika krocích tak úplné párování najdeme. Jedno je uvedeno například na Obrázku 6.7. ✓

## Cvičení

*6.2.1. Dokažte následující modifikaci Hallovy věty (Věty 6.2.): Nechť $G$ je bipartitní graf s partitami $U$ a $W$. Potom $G$ má úplné párování $M$ právě tehdy, když*

$$|S| \leq |N(S)| \text{ pro každou množinu } S \subseteq (U \cup W).$$

*Ukažte, že podmínku bipartitnosti nelze vynechat.*

*6.2.2. Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_m$ jsou podmnožiny (ne nutně disjunktní) množiny $S$.* Systém různých reprezentantů *množin $A_1, A_2, \ldots, A_m$ je množina $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ taková, že $a_i \in A_i$ pro $1 \leq i \leq m$, kde $a_i \neq a_j$ pro $i \neq j$. Ukažte, že množiny $A_1, A_2, \ldots, A_m$ mají systém různých reprezentantů právě tehdy, když platí, že $|\bigcup_{i \in J} A_i| \geq |J|$ pro každou množinu $J \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$.*

*6.2.3. Na šachovnici s 64 políčky je možno poskládat 32 dominových kostek (obdélníků o rozměru $1 \times 2$ pole) tak, že pokrývají celou šachovnici. Ukažte, že šachovnici, ze které vynecháme dvě diagonálně protilehlá rohová pole, nemůžeme pokrýt dominovými kostkami.*

*6.2.4. Po vynechání některých dvou polí šachovnice z předchozího Cvičení 6.2.3. je někdy možné pokrýt zbylá pole šachovnice dominovými kostkami a někdy to možné není. a) Najděte na šachovnici všechny dvojice polí, které je možno vynechat, přičemž bude možné pokrýt zbytek šachovnice dominovými kostkami. b) Ukažte, jak v úloze a) zbylá pole šachovnice pokrýt dominovými kostkami.*

*6.2.5.$^\heartsuit$ Mějme šachovnici o rozměru $n \times n$ polí pro liché $n \geq 3$. Dokažte, že není možné navštívit jezdcem každé políčko právě jednou, a vrátit se zpět na výchozí políčko.*

*6.2.6. Mějme bipartitní graf $G$ na $2n$ vrcholech, jehož každá partita má právě $n$ vrcholů. a) Dokažte, že pokud $\delta(G) \geq n/2$, pak $G$ obsahuje úplné párování. b) Platí tvrzení i pro $\delta(G) \geq n/2 - 1$?*

*6.2.7. Ukažte, že kubický bipartitní graf neobsahuje most.*

*6.2.8. Zobecněte Cvičení 6.2.7. pro libovolný $k$-pravidelný graf, kde $k \geq 2$.*

*6.2.9.$^\heartsuit$ Ukažte, že pro $r > 1$ každý $r$-pravidelný bipartitní graf obsahuje 2-faktor.*

*6.2.10. Mějme balíček hracích karet, ve kterém jsou karty $h$ různých hodnot každá v $b$ různých barvách. Karty rozložíme na stůl do $b$ řad, kde každá řada má $h$ sloupců. Ukažte, že je možno v každém sloupci vybrat jednu kartu tak, že máme karty všech $h$ hodnot.*

*6.2.11. Mějme balíček hracích karet, ve kterém jsou karty $h$ různých hodnot každá v $b$ různých barvách. Karty rozložíme na stůl do $b$ řad každé s $h$ sloupci. Ukažte, že je možno postupnou záměnou dvojic karet stejné hodnoty docílit stavu, kdy v každém sloupci jsou karty všech $b$ barev.*

## 6.3. Pokrytí v bipartitních grafech

V předchozí části jsme se věnovali párování, což je množina nezávislých hran $M$. Vrcholy grafu pak jsou nebo nejsou $M$-saturované. Nyní budeme vybírat množinu vrcholů (ne nutně nezávislých) tak, aby každá hrana byla incidentní s některým vybraným vrcholem.

**Definice** Vrcholové *pokrytí grafu* $G$ je taková podmnožina $Q$ množiny $V(G)$, že každá hrana grafu $G$ je incidentní s alespoň jedním vrcholem z $Q$. Říkáme, že hrana $e$ je *pokryta* vrcholem $u$ z $Q$, jestliže hrana $e$ je s vrcholem $u$ incidentní.

V každém grafu pokrytí hran vždy existuje, stačí vzít množinu všech vrcholů $Q = V(G)$. Otázkou je, kolik *nejméně* vrcholů může pokrytí v daném grafu obsahovat.

**Minimální a nejmenší pokrytí**

V kapitole 6.2. jsme rozlišovali maximální a největší párování. Podobně budeme nyní rozlišovat minimální a nejmenší pokrytí grafu.

**Definice** *Minimální* pokrytí grafu je takové pokrytí $Q$ grafu $G$, že pro každé pokrytí $Q$, kde $Q' \subseteq Q$, platí, že $Q' = Q$ (jinými slovy: každá vlastní podmnožina $Q' \subsetneq Q$ není pokrytím grafu $G$). Naproti tomu pokrytí $Q$ je *nejmenší* jestliže pro každé pokrytí $Q'$ grafu $G$ platí platí $|Q| \leq |Q'|$.

Pokrytí $Q$ na Obrázku 6.8. vlevo není nejmenší, ale je minimální, protože žádný vrchol nemůžeme z $Q$ vynechat, neboť po vynechání libovolného vrcholu by se nejednalo o pokrytí. Pokrytí $Q^*$ na Obrázku 6.8. vpravo je nejmenší, protože daný graf má průměr 3, a proto na jeho pokrytí jsou potřeba alespoň dva vrcholy.

Obrázek 6.8.: *Graf $G$ s minimálním pokrytím, které není nejmenší a graf $G$ s nejmenším pokrytím.*

Podobně jako $M^*$ označuje nějaké největší párování v daném grafu, tak pokrytí, které je v daném grafu nejmenší, budeme značit $Q^*$. Zdůrazněme, že párování $M^*$ ani pokrytí $Q^*$ nemusí být v grafu $G$ určeno jednoznačně, protože může existovat několik různých největších párování nebo několik nejmenších pokrytí. Symbolem $M^*$ nebo $Q^*$ chceme zdůraznit, že nějaké párování je největší, resp. nějaké pokrytí je nejmenší. Na Obrázku 6.9. jsou dvě různá největší párování (zelené a modré) a dvě různá nejmenší pokrytí v grafu $C_6$.

Obrázek 6.9.: *Dvě různá největší párování a dvě různá nejmenší pokrytí v grafu $C_6$.*

Je snadné si rozmyslet, že v každém grafu je počet vrcholů v nějakém pokrytí $Q$ alespoň tak veliký, kolik je hran v libovolném párování $M$, protože alespoň jeden z koncových vrcholů každé hrany v párování $M$ musí patřit do pokrytí $Q$. Platí tedy

$$|M| \leq |Q|.$$

V dalším textu využijeme, že zejména platí

$$|M^*| \leq |Q^*|. \tag{9}$$

Obrázek 6.10.: *Maximální párování a minimální pokrytí v grafu $C_5$.*

Na druhou stranu rovnost v obecném grafu platit nemusí, protože například v cyklu $C_5$ platí $|M^*| = 2$, ale $|Q^*| > 2$, protože každé dva vrcholy $C_5$ pokryjí nejvýše čtyři různé hrany a v grafu $C_5$ je hran pět (Obrázek 6.10.).

Pojmy pokrytí a párování v grafu spolu úzce souvisí. Následující věta ukazuje, že v bipartitních grafech dokonce nastane v nerovnosti (9) rovnost. Větu dokázal již v roce 1931 maďarský matematik Dénes Kőnig[22].

**Věta 6.4. Königova věta**
*V bipartitním grafu je počet hran největšího párování roven počtu vrcholů nejmenšího pokrytí.*

*Důkaz.* Podle nerovnosti (9) víme, že $|M^*| \leq |Q^*|$. Stačí ukázat, že v bipartitním grafu $G = (U \cup W, E)$ najdeme párování o velikosti $|Q^*|$. Množinu vrcholů nejmenšího pokrytí $Q^*$ rozdělíme na dvě části $S = Q^* \cap U$ a $T = Q^* \cap W$ podle partit bipartitního grafu $G$. Označíme $H_1$ a $H_2$ dva bipartitní podgrafy grafu $G$, kde graf $H_1$ je indukovaný podgraf grafu $G$ na vrcholech v množině $S \cup (W \setminus T)$ a graf $H_2$ je indukovaný na vrcholech v množině $T \cup (U \setminus S)$.

Protože $S \cup T = Q^*$ je pokrytí grafu $G$, tak v $G$ není žádná hrana z partity $U \setminus S$ do $W \setminus T$. Nyní pro každou podmnožinu $X \subseteq S$ je $N_{H_1}(X) \subseteq (W \setminus T)$. Pokud by platilo $|N_{H_1}(X)| < |X|$, tak bychom mohli $X$ nahradit v pokrytí $Q^*$ množinou $N_{H_1}(X)$ a dostali bychom menší pokrytí, protože $N_{H_1}(X)$ pokryje všechny hrany incidentní s vrcholy v množině $X$, které nejsou pokryty množinou $T$. To není možné, protože $Q^*$ je nejmenší pokrytí. Podle Hallovy věty (Věta 6.2.) víme, že graf $H_1$ má párování, které saturuje všechny vrcholy v množině $S$.

Podobně ukážeme, že graf $H_2$ má párování, které saturuje všechny vrcholy v množině $T$. A protože jsou grafy $H_1$ a $H_2$ disjunktní (mají různé vrcholové množiny), tak graf $G$ má párování o velikosti $|S| + |T| = |Q^*|$, což je dokazované tvrzení. □

**Otázka:** Platí analogické tvrzení k Větě 6.4., že v bipartitních grafech je počet hran maximálního párování roven počtu vrcholů minimálního pokrytí?

Zdůrazněme, že Věta 6.4. platí jen pro bipartitní grafy. Graf $G$ na Obrázku 6.11. je bipartitní, a proto podle Věty 6.4. je $|M^*| = |Q^*| = 4$. Na druhou stranu pro grafy, které nejsou bipartitní, věta neříká nic. Například graf $C_5$ jistě není bipartitní a v grafu $C_5$ platí $|M^*| < |Q^*|$ (Obrázek 6.10.). Naproti tomu kompletní graf $K_4$ není bipartitní, přesto v grafu $K_4$ platí $|M^*| = |Q^*| = 2$.

Obrázek 6.11.: *Bipartitní graf, ve kterém $|M^*| = |Q^*| = 4$.*

Všimněte si, že pokud najdeme takové párování $M$ a takové pokrytí $Q$ bipartitního grafu $G$, že $|M| = |Q|$, tak podle Věty 6.4. víme, že $M$ je současně největší párování $M^*$ a $Q$ je současně nejmenší pokrytí $Q^*$.

**Poznámka 6.1. Minimaxová podmínka**
Dvojice takových problémů, kdy vždy optimální řešení $R_1$ jednoho problému maximalizuje nějaký parametr $p_1$ (obvykle mohutnost nějaké množiny) a optimální řešení $R_2$ druhého problému minimalizuje nějaký jiný parametr $p_2$

[22] Všimněte si, že zatímco „ő“ v Kőnigově jméně se správně (maďarsky) píše s dvojitým akutním znaménkem, tak v Königově větě se „ö“ obvykle píše s přehláskou.

na stejné množině grafů, přičemž obecně platí $p_1 \leq p_2$ a dosažení optima znamená rovnost $p_1 = p_2$, tvoří tzv. *minimaxovou podmínku*. Pokud v takovém případě najdeme dvojici řešení $R_1$ a $R_2$, ve které parametry obou řešení nabývají stejné hodnoty $p_1 = p_2$, tak jsme *dokázali*, že obě řešení jsou optimální.

Minimaxové podmínky jsou cenným pomocníkem při hledání optimálních řešení. Algoritmy pro nalezení optimálního řešení problémů $R_1$ a $R_2$ mohou být komplikovaném, dokonce i $NP$-úplné, mohou však existovat jednoduché heuristické algoritmy, které ale nemusí zaručit nalezení optimálního řešení. Jen na základě výsledku heuristiky *nemůžeme poznat*, zda řešení je optimální. Pokud ale platí rovnost $p_1 = p_2$ zmíněných parametrů, tak díky minimaxové podmínce je *dokázáno*, že nalezené řešení je optimální.

**Příklad 6.4.** Například párování v bipartitním grafu na Obrázku 6.12. je největší (má tři hrany), protože nejmenší pokrytí má tři vrcholy. A naopak, pokrytí třemi vrcholy je nejmenší, protože máme párování se třemi hranami.

Obrázek 6.12.: *Největší párování $M^*$ a nejmenší pokrytí $Q^*$ grafu $G$.*

**Otázka:** Může být libovolný rozdíl mezi velikostí největšího párováním a nejmenšího pokrytí? Pokud ano, zkuste najít obecnou konstrukci takového grafu.

## Cvičení

*6.3.1.*$^{\heartsuit}$ *Mějme nějakou množinu nezávislých vrcholů $S$. Ukažte, že $\overline{S} = V(G) \setminus S$ je vrcholové pokrytí.*

*6.3.2. V libovolném grafu $G$ označme velikost největší nezávislé množiny vrcholů $\alpha(G)$ (vrcholové číslo nezávislosti) a velikost nejmenšího vrcholového pokrytí označme $\beta(G)$. Ukažte, že v každém grafu $G$ s $n$ vrcholy je součet $\alpha(G) + \beta(G) = n$.*

*6.3.3. Mějme strom $T$ s $n$ vrcholy. Označme velikost největší nezávislé množiny vrcholů $\alpha(G)$ (vrcholové číslo nezávislosti). Vyjádřete velikost největší nezávislé množiny hran $\alpha'(G)$ (hranové číslo nezávislosti) pomocí $n$ a $\alpha'(T)$.*

*6.3.4. Ukažte, že pro vrcholové číslo nezávislosti (bylo zavedeno ve Cvičení 6.3.2.) libovolného grafu $G$ s $n$ vrcholy platí $\alpha(G) \geq \frac{n}{\Delta(G)+1}$.*

*6.3.5. Určete vrcholové číslo nezávislosti cesty $P_n$ a určete co nejmenší maximální (nikoliv největší) nezávislou množinu vrcholů cesty $P_n$.*

*6.3.6. Mějme bipartitní graf $G$ s $n$ vrcholy. Ukažte, že velikost největší nezávislé množiny vrcholů $\alpha(G) = n/2$ právě tehdy, když $G$ má úplné párování.*

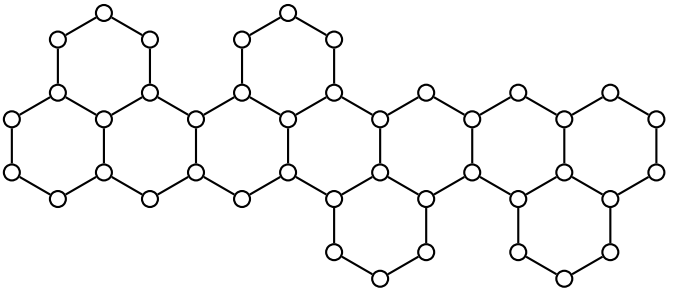
*6.3.7. Pro každé přirozené číslo $n$ najděte příklad stromu, ve kterém je počet vrcholů nejmenšího (vrcholového) pokrytí 2 a současně nejmenší* nezávislá *množina vrcholového pokrytí má $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vrcholů.*

*6.3.8. Označme velikost největší nezávislé množiny hran $\alpha'(G)$ (hranové číslo nezávislosti, neboli počet hran největšího párování grafu $G$). Ukažte, že každé maximální párování grafu $G$ má alespoň $\alpha'(G)/2$ hran.*

*6.3.9. Mějme graf $G$ na Obrázku 6.13. Najděte úplné párování grafu $G$ nebo ukažte, že graf $G$ úplné párování nemá.*

## 6.4. Úplné párování v obecných grafech

V minulé části jsme se zaměřili na párování a pokrytí v bipartitním grafu. Následující větu, která udává nutnou a dostatečnou podmínku pro existenci úplného párování v obecném grafu, dokázal Tutte v roce 1947. Každou komponentu daného grafu, která má lichý počet vrcholů, budeme nazývat *lichou komponentou*.



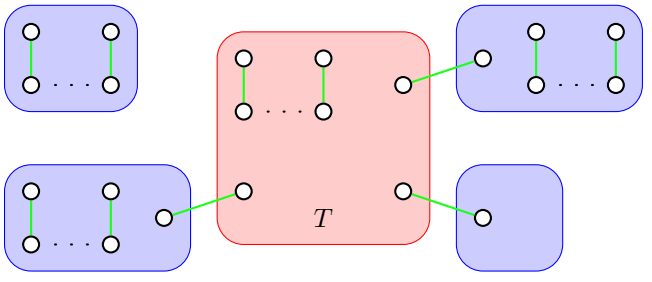
Obrázek 6.13.: *Lovaszův-PLummerův graf $G$.*

**Věta 6.5. Tutteova věta**
*Graf $G$ má úplné párování právě tehdy, když počet lichých komponent v grafu $G - S$ je menší nebo roven počtu vrcholů množiny $S$ pro každou množinu $S \subseteq V(G)$.*

*Důkaz.* Jedná se o ekvivalenci, ukážeme obě implikace.
„⇒“ Protože graf $G$ má úplné párování $M$, tak v každé liché(!) komponentě grafu $G - S$ je alespoň jeden vrchol spojen hranou z párování $M$ s nějakým vrcholem mimo tuto komponentu, tj. s *jiným* vrcholem v množině $S$. Proto je počet lichých komponent grafu $G - S$ nejvýše roven $|S|$.
„⇐“ Všimněte si, že přidáním hrany mezi dvě komponenty grafu $G - S$ se počet lichých komponent nezvětší, neboť tímto spojením komponenty sudé a liché velikosti dostaneme jednu komponentu liché velikosti a spojením dvou komponent se stejnou paritou velikostí dostaneme jednu komponentu se sudou velikostí. Proto i pro graf $G' = G + e$ a $S \subseteq V(G)$ je počet lichých komponent grafu $G' - S$ menší nebo roven počtu lichých komponent grafu $G - S$. Navíc, pokud graf $G'$ nemá úplné párování, tak ani graf $G$ nemohl mít úplné párování.

Dále postupujeme sporem. Jestliže tvrzení věty neplatí, tak existuje nějaký takový graf $G$ a množina $S \subseteq V(G)$, že $G - S$ má méně než $|S|$ komponent liché velikosti, a přitom $G$ nemá úplné párování. Mezi všemi takovými protipříklady můžeme vybrat takový *maximální* graf $G$, kdy po přidání libovolné hrany $e$ do grafu $G$ bude graf $G' = G + e$ mít úplné párování. Můžeme předpokládat, že takový maximální protipříklad existuje, neboť přidáním všech chybějících hran bychom dostali kompletní graf na sudém počtu vrcholů, o kterém víme, že má úplné párování. Nyní dojdeme ke sporu tak, že v grafu $G$ najdeme úplné párování. Množinu všech vrcholů stupně $|V(G) - 1|$ v grafu $G$ označme $T$. Rozlišíme dva případy:

1) Jestliže všechny komponenty grafu $G - T$ jsou kompletní grafy, tak v každé komponentě najdeme úplné párování, které saturuje všechny komponenty vrcholy s výjimkou jednoho vrcholu v každé liché komponentě (Obrázek 6.14.). Podle předpokladu obsahuje množina $T$ alespoň tolik vrcholů, kolik je lichých komponent grafu $G-T$, a *každý* vrchol množiny $T$ je sousední se všemi vrcholy grafu $G$. Proto můžeme saturovat všechny nesaturované vrcholy v lichých komponentách vždy nějakou hranou do vrcholu v množině $T$. Indukovaný graf na zbývajících vrcholech množiny $T$ je úplný a obsahuje sudý počet vrcholů, neboť doposud byl saturován sudý počet vrcholů grafu $G$ a z nutné podmínky pro $S = \emptyset$ víme, že celý graf $G$ má sudý počet vrcholů.




Obrázek 6.14.: *Množina $T$ a párování grafu $G$.*

Obrázek 6.15.: *Cyklus $C$ je vyznačen modře, vybrané hrany párování $M_1$ zeleně a vybrané hrany párování $M_2$ červeně.*

2) Jestliže nějaká komponenta grafu $G - T$ není kompletní graf, tak nějaká komponenta grafu $G - T$ obsahuje dva nesousední vrcholy $x$, $y$ (ve vzdálenosti 2) se společným sousedem $z \notin T$. Navíc, protože vrchol $z$ nepatří do množinu $T$, existuje v grafu $G - T$ vrchol $w$, který není sousední s vrcholem $z$ (Obrázek 6.15.).
Protože za graf $G$ jsme vybrali maximální graf bez úplného párování, tak grafy $G + xy$ i $G + zw$ mají úplná párování, která označíme $M_1$ a $M_2$. Nyní pečlivým rozborem hran v množině $M_1 \triangle M_2$ najdeme v grafu $G$ úplné párování, které neobsahuje hranu $xy$ ani hranu $zw$, a dostaneme hledaný spor.
Označme $N = M_1 \triangle M_2$. Protože hrana $xy$ patří pouze do párování $M_1$ a hrana $zw$ patří pouze do párování $M_2$, tak $xy, zw \in N$. Dále, protože každý vrchol je saturován jednou hranou párování $M_1$ a jednou hranou párování $M_2$, tak každý vrchol grafu $H = (V(G), N)$ (vybereme pouze hrany, ve kterých se párování $M_1$ a $M_2$ liší) je stupně 0 nebo 2. Komponenty grafu $H$ jsou proto jen sudé cykly (pravidelně se střídají hrany párování $M_1$ a $M_2$) nebo izolované vrcholy. Označme $C$ ten cyklus grafu $H$, který obsahuje hranu $xy$. Jestliže cyklus $C$ neobsahuje hranu $zw$, stačí v párování $M_1$ nahradit ty hrany cyklu $C$, které patří do párování $M_1$ za hrany, které patří do párování $M_2$ (Obrázek 6.15. vlevo). Dostaneme tak úplné párování grafu $G$.
Jestliže cyklus $C$ hranu $zw$ obsahuje, tak na úseku cyklu $C$, který začíná hranou $zw$ a končí vrcholem $x$ nebo $y$ (bez újmy na obecnosti předpokládejme, že se jedná o vrchol $x$) nahradíme hrany z párování $M_2$ za hrany z párování $M_1$ a přidáme hranu $zy$ (Obrázek 6.15. vpravo). Ve zbývajícím úseku cyklu $C$ ponecháme hrany párování $M_1$ s výjimkou hranu $xy$, kterou do párování nezahrneme. Opět dostaneme úplné párování grafu $G$, což je spor s výběrem grafu $G$.

Protože předpoklad existence protipříkladu tvrzení věty vedl vždy ke sporu, žádný protipříklad neexistuje a tvrzení věty platí. □

**Otázky:**

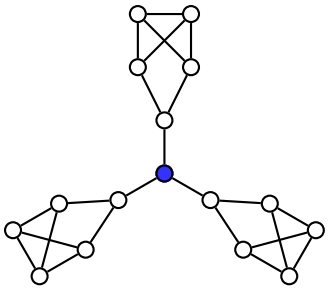
- Existuje nějaký graf $G$ a taková množina jeho vrcholů $S$, že graf $G - S$ má právě $S$ lichých komponent?
- Vysvětlete, jak z nutné podmínky Tutteovy věty plyne, že graf $G$ s úplným párováním má sudý počet vrcholů.

Například graf na Obrázku 6.16. nemá úplné párování. Odebráním vyznačeného vrcholu vzniknou tři liché komponenty, a proto podle Tutteovy věty graf $G$ nemá úplné párování. Naproti tomu například v Petersenově grafu (Obrázek 4.10.) nenajdeme takovou množinu vrcholů $S$, aby graf $G-S$ měl více než $|S|$ komponent liché velikosti, proto podle Tutteovy věty má Petersenův graf úplné párování (takové párování snadno najdete sami). Bohužel Tutteova věta se hodí spíš pro vyvrácení existence úplného párování v daném grafu, protože ověření počtu lichých komponent grafu $G - S$ pro všechny podmnožiny $G - S$ je náročné. Pro některé speciální třídy grafů platí jednodušší podmínky. Například následující tvrzení plyne přímo z Tutteovy věty, historicky však bylo dokázáno dříve, už v roce 1891 Petersenem.

**Důsledek 6.6. Druhá Petersenova věta**
*Každý kubický graf bez mostů má úplné párování (1-faktor).*

*Důkaz.* Nechť $G$ je kubický (3-pravidelný) graf bez mostů. Ukážeme že takový graf splňuje předpoklad Tutteovy věty.

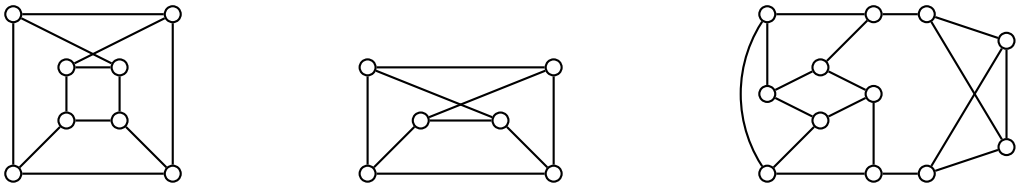
Pro libovolnou podmnožinu vrcholů $S \subseteq V(G)$ prozkoumáme počet hran mezi vrcholy v $S$ a lichými komponentami grafu $G - S$. Počet takových hran označíme $p$. Protože je $G$ kubický graf, je každý vrchol v $S$ incidentní s nejvýše třemi takovými hranami a platí $p \leq 3|S|$.



Obrázek 6.16.: *Graf $G$ s vyznačenou artikulací $v$ a třemi lichými komponentami v grafu $G - v$.*

Součet stupňů vrcholů v každé liché komponentě $L$ grafu $G - S$ je $3v(L) - m$, kde $m$ je počet hran mezi $L$ a $S$. Podle Věty 1.1. je součet stupňů všech vrcholů v komponentě $L$ sudý, a protože $v(L)$ je liché číslo, tak $m = 3v(L) - \sum_{v \in L} \deg(v)$ musí být liché číslo. Graf $G$ neobsahuje podle předpokladu most, je tedy $m$ větší než jedna, a proto $m \geq 3$. Ze všech $\ell$ lichých komponent grafu $G - S$ vychází proto alespoň $3\ell$ hran do $S$ a dostáváme, že $p \geq 3\ell$. Celkem dostáváme $3\ell \leq p \leq 3|S|$, a proto pro počet lichých komponent grafu $G - S$ platí $\ell \leq |S|$, což podle Tutteovy věty znamená, že $G$ má úplné párování. □

Všimněte si, že Druhá Petersenova věta (Věta 6.6.) dává jen postačující podmínku pro existenci úplného párování kubického grafu. Kubický graf s mostem může (například graf na Obrázku 6.2.), ale nemusí (například graf na Obrázku 6.16.) mít úplné párování. Naproti tomu kubické grafy na Obrázku 6.17. jsou hranově 2-souvislé a podle Druhé Petersenovy věty mají úplné párování (zkuste v každém grafu úplné párování najít). Stejně tak grafy na Obrázcích 1.16., 2.21., 4.2. a 4.5. mají úplné párování.



Obrázek 6.17.: *Kubické grafy bez mostů.*

Má-li daný graf $G$ úplné párování, tak hrany párování spolu s vrcholovou množinou $V(G)$ tvoří 1-faktor. Podobně, je-li nějaký faktor daného grafu 2-pravidelný, říkáme my 2-faktor, a jestliže faktor grafu je $k$-pravidelný, říkáme mu *$k$-faktor*.

Větě 6.6. se říká „Druhá“, protože byla spolu s následující větou publikována Petersenem v roce 1891. Následující známé a silné tvrzení dokážeme s využitím Věty 6.3.

**Věta 6.7. Petersenova věta**
*Každý pravidelný graf sudého stupně s alespoň jednou hranou má 2-faktor.*

*Důkaz.* Mějme $2k$-pravidelný graf $G$ s vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Každá jeho komponenta je souvislý graf. Později, v Kapitole 11.1., si ukážeme, že v souvislém grafu, ve kterém jsou všechny vrcholy sudého stupně, existuje uzavřený tah (tzv. eulerovský tah), který obsahuje všechny hrany grafu. Buď $T$ takový uzavřený tah grafu $G$, který obsahuje všechny hrany grafu $G$. Sestrojíme bipartitní graf $H = (U \cup W, E)$ tak, že $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ a $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Hrana $u_i w_j$ bude v množině $E$ právě tehdy, když vrchol $v_j$ bezprostředně následuje za vrcholem $v_i$ v tahu $T$. Protože v tahu $T$ se objeví každý vrchol přesně $k$ krát, bude bipartitní graf $H$ $k$-pravidelný.

Podle Důsledku 6.3. má graf $H$ úplné párování. Každá hrana incidentní s vrcholem $u_i \in U$ odpovídá hraně, která vychází z vrcholu $v_i \in V$ a každá hrana incidentní s vrcholem $w_i \in W$ odpovídá hraně, která vchází do vrcholu $v_i \in V$. Proto úplné párování grafu $H$ odpovídá 2-pravidelnému grafu v grafu $G$.

V každé komponentě původního grafu $G$ takto sestrojíme 2-faktor. □

Podle Petersenovy věty můžeme dokonce každý $2k$-pravidelný graf $G$ rozložit[23] na $k$ 2-faktorů, protože odebráním jednoho 2-faktoru zaručeného Větou 6.7. dostaneme graf, který opět splňuje předpoklady Petersenovy věty, a nebo dostaneme graf bez hran.

[23] Rozkladům grafů se věnujeme v kapitole 7.3.

**Odkazy:**

- Petersenův článek z roku 1891 https://projecteuclid.org/journals/acta-mathematica/volume-15/issue-none/Die-Theorie-der-regulären-graphs/10.1007/BF02392606.full

## Cvičení

*6.4.1. Bez využití důkazu Věty 6.5. dokažte speciální případ Tutteovy věty: Strom $T$ má úplné párování právě tehdy, pokud počet lichých komponent grafu $T - v$ je roven jedné pro každý vrchol $v \in V(T)$.*

*6.4.2. Na daném počtu vrcholů najděte a) graf s největším počtem hran, který nemá úplné párování, b)? souvislý graf s největším počtem hran, který nemá úplné párování. Využijte Tutteovu větu.*

*6.4.3. Jaký může být největší stupeň vrcholů a) v grafu $G$, b) ve stromu $T$, který má úplné párování?*

*6.4.4. Jaký může být největší stupeň vrcholů a) v grafu $G$ se sudým počtem vrcholů, který nemá úplné párování? b) ve stromu $T$ se sudým počtem vrcholů, který nemá úplné párování?*

*6.4.5. Využijte Tutteovu větu k nalezení charakterizace maximálních grafů (vzhledem k počtu hran) bez úplného párování.*

*6.4.6. Ukažte, že v kubickém grafu $G$ bez mostů patří každá hrana do nějakého úplného párování grafu $G$.*

*6.4.7.* Mějme $k$-pravidelný graf $G$ se sudým počtem vrcholů, který zůstane souvislý i po odstranění libovolných $k-2$ hran ($G$ je $(k-1)$-souvislý). Ukažte, že graf $G$ má úplné párování.*

*6.4.8.♡ Proč není možné zobecnit výsledek Cvičení 6.4.7. i pro grafy s lichým počtem vrcholů?*

## 6.5. Doplňková témata

### Hry a párování

Pro řadu her lze s úspěchem využít pojmu párování v grafu pro nalezení vítězné nebo alespoň neprohrávající strategie pro některého hráče. Jeden příklad takové hry jsme zmínili v Příkladu 6.1.8. Následuje příklad neprohrávající strategie druhého hráče.

#### Cykly v síti

Mějme graf $G = P_n \square P_m$ (o kartézském součinu je psáno na straně 72). Dva hráči, červený a modrý, střídavě obarvují hrany grafu $G$. Ten, kdo první sestaví z hran své barvy cyklus, vyhraje.

Na první pohled se zdá, že první hráč má výhodu. Avšak podrobnější rozbor ukazuje, že druhý hráč může *vždy* vynutit remízu. Aby hráč uzavřel cyklus hran své barvy, musí posloupnost tahů obsahovat alespoň dvě hrany, které tvoří „L“ (v tomto tvaru). Druhý hráč ke každému tahu snadno najde (a zahraje) do páru druhý tah tak, aby oba tahy dohromady tvořily „L“. Nyní si stačí uvědomit, že na zaplněném herním plánu musí být *všechna* „L“ sestavena z hran dvou barev, tak ani jeden z hráčů nemohl uzavřít cyklus.

**Otázka:** Je možno strategii použít i pro graf $C_n \square C_m$?

#### Čtverce na šachovnici

Na libovolné šachovnici o rozměru $m \times n$ polí se střídají dva hráči, červený a modrý, ve vybarvování políček šachovnice. Ten hráč, kterému se podaří vybarvit čtvereček o rozměru $2 \times 2$ políčka svojí barvou, vyhrává. Ve Cvičení 6.5.1. ukážeme, že druhý hráč má neprohrávající strategii.

#### HEX

O hře HEX jsme psali na straně 90. Je známo, že hra nemůže skončit remízou, že druhý hráč nemůže mít vítěznou strategii, a vítězná strategie pro prvního hráče byla nalezena s využitím výpočetní techniky pro hrací plány do rozměru $9 \times 9$ polí. Nevýhodu druhého hráče nemá smysl kompenzovat změnou rozměru (zkrácením) hracího plánu, neboť jednoduchá strategie založená na párování polí může zajistit vítězství druhého hráče (Cvičení 6.5.2.).

**Bridge-it**

O hře Bridge-it jsme psali na straně 90. Pro prvního hráče existují různé vítězné strategie, alespoň jedna z nich je založena na párování tahů prvního a druhého hráčen (Cvičení 6.5.3.).

## Cvičení

*6.5.1. Ukažte, že druhý hráč ve hře „Čtverce na šachovnici" nemusí nikdy prohrát.*

*6.5.2. Pokud bychom nevýhodu druhého hráče ve hře HEX kompenzovali zkrácením vzdáleností protilehlých stran druhého hráče, tak existuje vítězná strategie pro druhého hráče. Najděte ji.*

*6.5.3. Ukažte, že první hráč ve hře Bridge-it má vítěznou strategii založenou na párování.*

### Odkazy:

- http://www.math.cornell.edu/~mec/2008-2009/ChorHangLam/pairing.html
- https://en.wikipedia.org/wiki/Hex_(board_game)

### Nekonečné grafy

Na straně 44 jsme zavedli pojem grafu. Všimněte si, že definice nevylučuje možnost, aby množina vrcholů nebo množina hran byla nekonečná. Na druhou stranu pokud v grafu $G = (V, E)$ je množina $V$ konečná, tak množina hran $E$ musí být konečná (proč?).

Pojem nekonečného grafu má smysl studovat a je potřeba mít na paměti, že některá tvrzení platí jen pro konečné grafy. Zejména důkazy, jejichž argumentace je založená na porovnání mohutností dvou množin, obvykle nemůžeme použít pro nekonečně velké množiny. Například Hallova věta (Věta 6.2.) platí jen pro konečné bipartitní grafy (Cvičení 6.5.4.)

Na straně 28 jsme zmínili, že graf odpovídající hasseovskému diagramu relace uspořádání na nekonečné množině je nekonečný. Stupeň žádného vrcholu není konečný a přehledně popsat strukturu takového grafu je obtížné. Na straně 147 na konci této kapitoly uvedeme a dokážeme nějaká další tvrzení pro nekonečné grafy.

## Cvičení

*6.5.4. Najděte příklad nekonečného grafu, pro který neplatí Hallova věta (Věta 6.2.).*

*6.5.5. Jaký je průměr (neorientovaného) grafu $N = (\mathbb{N}, E)$, kde $E = \{xy : x \mid y\}$?*

### Dominující množina

Na první pohled příbuzným pojmem k pokrytí grafu je dominující množina.

**Definice Dominující množina**

*Dominující množina* vrcholů grafu $G$ je každá podmnožina $D \subseteq V(G)$, že každý vrchol grafu $G$ buď patří do $D$ nebo je sousední s nějakým vrcholem v $D$. *Dominace* grafu $G$ je velikost nejmenší dominující množiny a značí se $\gamma(G)$.

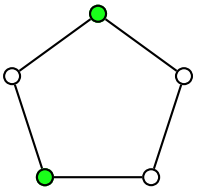
Alternativně dominující množina vrcholů je každá taková podmnožina $D \subseteq V(G)$, že $D \cup N_G(D) = V(G)$.

V každém grafu dominující množina existuje, stačí vzít celou množinu $V(G)$. Výzvou pro daný graf je najít dominaci, tj. velikost nejmenší dominující množiny. Algoritmicky se jedná o NP-úplný problém, není znám žádný rychlý algoritmus pro určení dominace obecného grafu.

**Poznámka 6.2. Dominující množina a pokrytí**

Všimněte si rozdílu mezi pokrytím a dominující množinou: pokrytí $Q$ grafu $G$ je taková množina vrcholů, aby každá *hrana* byla incidentní s alespoň jedním vrcholem v $Q$, tak dominující množina $D$ grafu $G$ je taková množina vrcholů, aby každý *vrchol* mimo $D$ byla sousední s alespoň jedním vrcholem v $D$.

Například nejmenší pokrytí cyklu $C_5$ na Obrázku 6.10. obsahuje tři vrcholy, pro dominaci cyklu $C_5$ stačí vrcholy 2 (Obrázek 6.18.).



Obrázek 6.18.: *Dominující množina cyklu $C_5$, která obsahuje dva vrcholy.*

Protože každý vrchol $v$ stupně $\deg(v)$ může dominovat nejvýše $\deg(v)$ jiných vrcholů, platí

$$\gamma(G) \geq \frac{1}{1+\Delta(G)}.$$

V grafech bez izolovaných vrcholů navíc platí $\gamma(G) \leq n/2$.

**Odkazy:**

- https://en.wikipedia.org/wiki/Dominating_set

## Cvičení

*6.5.6. Ukažte, že v grafu bez izolovaných vrcholů platí $\gamma(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor$.*

*6.5.7.$^{\heartsuit}$ Ukažte, že v grafu bez izolovaných vrcholů platí $\gamma(G) \leq |Q^*|$.*

*6.5.8.$^{\heartsuit}$ Ukažte, že rozdíl mezi velikostí nejmenšího pokrytí $|Q^*|$ grafu $G$ a jeho dominací $\gamma(G)$ může být libovolně velký.*

**William Tutte (14. května 1917 – 2. května 2002)**

William Thomas Tutte byl britský a později kanadský matematik a kryptolog. Během druhé světové války rozluštil jeden z německých kódů, což sehrálo významnou úlohu při vylodění spojeneckých vojsk v Evropě. Přispěl řadou významných výsledků v oblasti kombinatoriky a teorie grafů.

Vyvrátil například Taitovu hypotézu (viz strana 194) užitím konstrukce, které se říká Tutteův fragment (Obrázek 9.31.). Podrobně je o Tutteově protipříkladu psáno na straně 195. Důkaz Věty o čtyřech barvách (viz strana 194) využíval Tutteových výsledků.

Obrázek 6.19.: *William Tutte.*

Tutte vyslovil hypotézu, že každý snark (o snarcích je psáno na straně 212) obsahuje Petersenův graf jako minor (minor je zaveden na straně 196). To by znamenalo, že z každého snarku je možno dostat Petersenův graf kontrakcí (kontrakce hrany bude nadefinována na straně 196) a vynecháním hran. Navíc, protože Petersenův graf je kubický, každý snark by obsahoval rozdělení Petersenova grafu. Tutteova hypotéza je silnější než Problém čtyř barev a Robertson, Sanders, Seymour a Thomas ji dokázali v roce 2001. Více o důkazu Problému čtyř barev je psáno na straně 194 a o snarcích je psáno na straně 212.

Tutte se narodil v Newmarketu v Anglii. Vystudoval Trinity College na univerzitě v Cambridge. Ještě jako student spolu se třemi spolužáky jako první vyřešili problém známý jako „Squaring the square“, tj. rozdělení čtverce s celočíselnou stranou na menší celočíselné čtverce, přičemž požadujeme, aby každé dva čtverce měly jiný rozměr. Na začátku druhé světové války se na doporučení svého školitele přihlásil na *Government Code and Cypher School* a pracoval jako kryptoanalytik v *Bletchley Park*, což bylo za války centrum britských dešifrovacích aktivit. Tutteovi a jeho kolegům se na základě několika zachycených šifrovaných depeší podařilo vydedukovat strukturu německého šifrovacího stroje Lorenz SZ 40/42, který byl využíván pro šifrování významných vojenských zpráv, aniž by předtím stroj viděli. To bylo považováno za jeden z největších intelektuálních výkonů celé války.

Po válce se vrátil na studia a v roce 1948 Tutte dokončil doktorát v Cambridge a v témže roce přijal místo na univerzitě v Torontu. V roce 1962 přešel na Univerzitě ve Waterloo v Ontariu v Kanadě, kde zůstal až do konce své kariéry. Ačkoliv odešel do penze v roce 1985, zůstal aktivní jako emeritní profesor a byl jedním z hlavních zakladatelů věhlasné Katedry kombinatoriky a optimalizace na univerzitě ve Waterloo. Byl zvolen členem Královské společnosti i Kanadské královské společnosti.

**Odkazy:**

- http://en.wikipedia.org/wiki/William_Thomas_Tutte
- http://en.wikipedia.org/wiki/Squaring_the_square
- http://www.squaring.net/history_theory/brooks_smith_stone_tutte.html
- http://www.mathpuzzle.com/4Dec2001.htm

### Dénes Kőnig (21. září 1884 – 19. října 1944)

Dénes Kőnig byl maďarský matematik, který napsal a v roce 1936 vydal v nakladatelství v Lipsku první učebnici teorie grafů „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen“.

Obrázek 6.20.: *Dénes Kőnig.*

Kőnig se narodil v Budapešti. V roce 1907 nastoupil jako čerstvý doktor na „Technische Hochschule in Budapest“ (dnešní Technická Univerzita v Budapešti). Profesorem se stal v roce 1935. Mezi jeho žáky patřil také Paul Erdős[24], který již jako student prvního ročníku vyřešil jeden z Kőnigových problémů. Jako žid se obával perzekucí maďarských nacionalistů, kteří v polovině října 1944 převzali moc, a proto během antisemitských nepokojů v Budapešti raději spáchal sebevraždu.

Od roku 2008 uděluje každé dva roky SIAM Activity Group v diskrétní matematice (SIAG/DM) cenu Dénese Kőniga mladým vědcům za výjimečné výsledky v oblasti diskrétní matematiky.

Kőnigovo jméno nese Věta 6.4. o maximálním párování a minimálním pokrytí a také Königovo lemma, které se týká nekonečných grafů.

[24] O Erdősovi je psáno na straně 128.

**Lemma 6.8. Königovo lemma**

*Mějme souvislý graf $G$ s nekonečně mnoha vrcholy, ve kterém je každý vrchol konečného stupně. Pak každý vrchol grafu $G$ leží na nějaké cestě nekonečné délky.*

Cestou nekonečné délky rozumíme cestu s nekonečně mnoha vrcholy, přičemž žádný vrchol se neopakuje.

### Odkazy:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Denes_Konig
- http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=76334
- http://www.siam.org/prizes/sponsored/konig.php
- http://en.wikipedia.org/wiki/Konig's_lemma

## Cvičení

*6.5.9.* Dokažte Königovo lemma (Lemma 6.8.).*

# Kapitola 7. Hranová barvení grafů

**Harmonogram pracovních úkonů**
V minulé kapitole jsme při formulaci přiřazovacího problému každému pracovníkovi přiřadili jeden úkol. V praxi však můžeme řešit obtížnější úlohu, kdy u jednoho stroje anebo u jednoho obrobku se má vystřídat několik pracovníků. Předpokládáme, že pořadí jednotlivých činností nehraje roli, což úloha sdílených strojů dobře splňuje. Pochopitelně budeme chtít, aby každý pracovník pracoval v daném okamžiku u každého stroje sám. Takovou úlohu můžeme modelovat následujícím způsobem. Budeme mít bipartitní graf jehož jedna jeho partita odpovídá pracovníkům a druhá strojům nebo výrobkům. Hranou spojíme každou takovou dvojici vrcholů $x$ a $y$, kdy pracovník $x$ má vykonat nějakou činnost u stroje $y$. Budeme chtít, aby

- v daný časový úsek u stroje pracoval vždy jen jeden pracovník,
- nakonec byly vykonány všechny činnosti,
- soubor všech činností byl dokončen v co nejkratším čase.

Pro modelování uvedeného problému zavedeme pojem hranového barvení bipartitního grafu.

**Rozvrhy**
Podobný model můžeme použít při sestavování rozvrhů. Máme bipartitní graf, ve kterém jednu partitu tvoří studijní skupiny a druhou vyučované předměty. Stejnou barvou obarvíme všechny hrany, které odpovídají výuce ve stejnou dobu. Pochopitelně nám půjde o takové hranové barvení, ve kterém hrany jedné barvy tvoří nezávislou množinu – párování. Budeme hledat příslušné hranové barvení s co nejmenším počtem barev. Protože na každé učebně může v danou chvíli probíhat výuka jediné skupiny a jediného předmětu (s daným vyučujícím), bude obarvení hran různými barvami odpovídat rozvrhu hodin. Počet barev bude odpovídat celkové délce vyučování.

**Otázka:** Uvedený model rozvrhu předpokládá, že máme k dispozici neomezený počet učeben. Jak by bylo možné model upravit, aby bylo možno vzít v úvahu, že počet učeben je omezený?

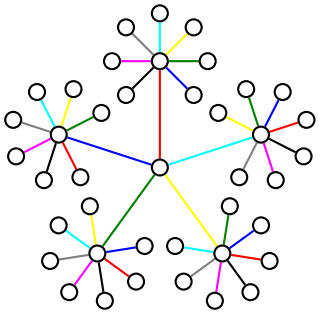
Oba zmíněné modely používají bipartitní graf. Na straně ?? uvedeme ještě jednu motivaci, kterou modelujeme hranovým barvením grafu – losování sportovních soutěží. Model popisující takovou úlohu odpovídá hranovému barvení obecného grafu.

## 7.1. Hranová barvení a chromatický index grafu

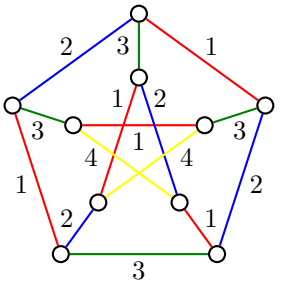
**Definice** *Hranové barvení* grafu $G$ je zobrazení $c$ hranové množiny $E(G)$ do *množiny barev* $B$. Obvykle je $B = \{1, 2, \ldots, k\}$. Je-li $|B| = k$, budeme zobrazení $c$ nazývat *hranové $k$-barvení* grafu $G$. Řekneme, že hrana $e$ je *obarvena barvou $i$*, jestliže $c(e) = i$. Číslu $i$ říkáme *barva hrany*. Hranové barvení se nazývá *dobré*, jestliže žádné dvě závislé hrany nejsou obarveny stejnou barvou.

Všimněte si, že definice hranového barvení nevyžaduje, aby zobrazení $c : E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ bylo surjektivní. Z praktických důvodů je však rozumné předpokládat, že když hovoříme o hranovém $k$-barvení $c$, tak v barvení $c$ je všech $k$ barev použito, neboť jinak bychom mohli nepoužité barvy vynechat a barvy přečíslovat tak, abychom dostali hranové $l$-barvení, kde $l < k$.

Obrázek 7.1.: *Dobré hranové* 3*-barvení cyklu* $C_5$ *a hranové* 5*-barvení kompletního grafu* $K_5$.



Obrázek 7.2.: *Dobré hranové* 8*-barvení stromu.*

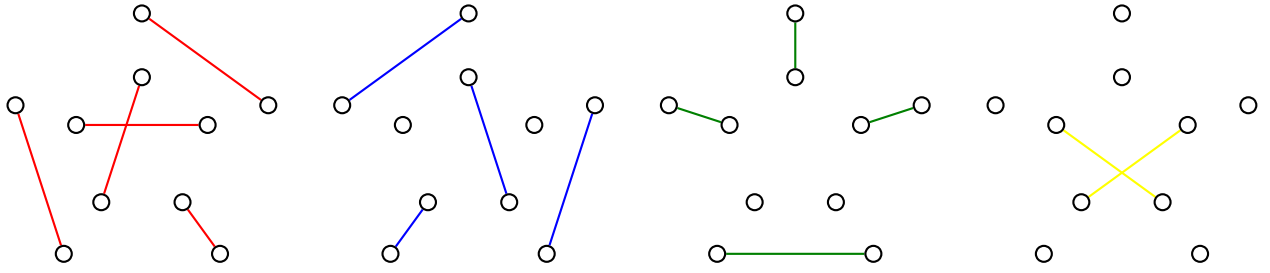



Obrázek 7.3.: *Dobré hranové* 4*-barvení Petersenova grafu.*

Podle definice dobrého hranového barvení grafu jsou všechny hrany jedné barvy nezávislé a tvoří párování. Graf dobře obarvený $k$ barvami má $k$ párování, která jsou po dvou disjunktní. Příklady dobrých hranových barvení grafů jsou na Obrázcích 7.1., 7.2. a 7.3.

**Barevné třídy**

Dobrá hranová barvení je možno definovat i pomocí rozkladů hranové množiny grafu $G$ na nezávislé podmnožiny. Rozklady byly zavedeny na straně 10. *Rozkladem hranové množiny* $E(G)$ rozumíme takový systém neprázdných podmnožin $E_1, E_2, \ldots, E_k$ množiny $E(G)$, že $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k = E(G)$ a $E_i \cap E_j = \emptyset$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, k$, kde $i \neq j$. Jestliže máme libovolný rozklad množiny $E(G)$, můžeme sestavit hranové barvení grafu $G$ tak, že všem hranám z třídy $E_i$ přiřadíme barvu $i$. Takové barvení bude dobré, jen pokud je každá třída rozkladu množinou nezávislých hran (párováním). Třídě rozkladu říkáme *barevná třída*, protože se jedná o množinu hran stejné barvy. Protože všechny barevné třídy jsou neprázdné, tak v grafu je použito všech $k$ barev. Na Obrázku 7.4. jsou všechny čtyři barevné třídy dobrého hranového barvení Petersenova grafu z Obrázku 7.3. Vrcholy jsou na obrázku uvedeny pro lepší orientaci, do barevných tříd však nepatří!



Obrázek 7.4.: *Čtyři barvené třídy dobrého hranového barvení Petersenova grafu z Obrázku 7.3.*

**Hrubý odhad počtu barev**

Každý graf s $m$ hranami lze triviálně dobře obarvit $m$ barvami a je zřejmé, že počet různých barev použitých při obarvení grafu $G$ nemůže být větší než $m$. Naproti tomu všechny hrany grafu můžeme obarvit stejnou barvou. Obsahuje-li však graf alespoň dvě závislé hrany (mají společný vrchol a tvoří cestu délky 2), takové barvení nebude dobré. Při řešení praktických úloh (například v souvislosti s motivační úlohou) se ptáme, jaký je *nejmenší* nutný počet $k$ barev, abychom našli dobré hranové $k$-barvení. Zavedeme následující pojem.

**Definice** Řekneme, že graf $G$ je *hranově $k$-obarvitelný*, jestliže existuje jeho dobré hranové barvení $k$ barvami. Nejmenší číslo $k$ takové, že graf $G$ je hranově $k$-obarvitelný, se nazývá *chromatický index* grafu $G$ a značí se $\chi'(G)$. Graf $G$ se nazývá *hranově $k$-chromatický*, jsou-li jeho hrany dobře obarveny $k$ barvami a platí $k = \chi'(G)$.

Všimněte si, že je-li daný graf hranově $k$-obarvitelný, je také hranově $l$-obarvitelný pro každé $k \leq l \leq |E(G)|$.

**Přesné omezení počtu barev**

Snadno nahlédneme, že v každém grafu $G$ musí platit $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ (viz například Obrázek 7.2.). V některých grafech, jako je například cyklus $C_5$ nebo graf $K_5$ na Obrázku 7.1., je potřeba více barev, než jaký je nejvyšší stupeň v grafu. Následující významný a překvapivý výsledek říká, že počet barev potřebný na dobré hranové barvení libovolného jednoduchého grafu $G$ je téměř jednoznačně určen nejvyšším stupněm grafu. Pokud nestačí $\Delta(G)$ barev, tak jistě bude stačit $\Delta(G) + 1$ barev. Větu dokázal Vadim G. Vizing v roce 1964.

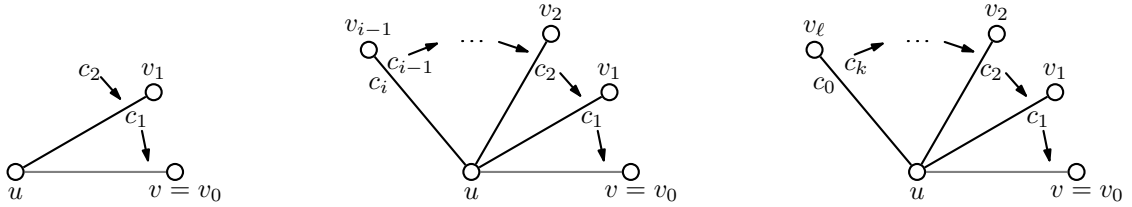
**Věta 7.1. Vizingova věta**
*Pro libovolný graf $G$ platí $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

*Důkaz.* První nerovnost platí triviálně, protože každé dvě hrany incidentní s vrcholem stupně $\Delta(G)$ musí mít různou barvu. Důkaz druhé nerovnosti bude konstruktivní, ukážeme algoritmus, jak dobré hranové $(\Delta(G) + 1)$-barvení grafu $G$ najít.

Mějme graf $G$ a nějaký jeho obarvený podgraf $G'$, který má dobré $(\Delta(G) + 1)$-barvení. Graf $G'$ může mít i prázdnou množinu hran. Je-li $G' = G$, jsme s důkazem hotovi. V opačném případě označme $e$ nějakou hranu $uv$ grafu $G$, která nepatří do $E(G')$ (není obarvena žádnou barvou). Ukážeme, jak obarvit hranu $e$ jednou z nejvýše $\Delta(G)+1$ dostupných barev tak, aby výsledné obarvení grafu $(V(G), E(G') \cup \{e\})$ bylo dobré. Opakováním tohoto postupu dostaneme hledané dobré hranové $(\Delta(G) + 1)$-barvení grafu $G$.

Všimněte si, že v každém $(\Delta(G) + 1)$-barvení existuje pro každý vrchol $x$ alespoň jedna barva, která se nevyskytuje na hranách incidentních s tímto vrcholem. Každou takovou budeme nazývat *volnou* barvou vrcholu $x$. Nyní postupně rozlišíme čtyři případy, které mohou nastat.

1) Jestliže oba koncové vrcholy $u$, $v$ hrany $e$ mají volnou barvu $c$, tak můžeme hranu $uv$ obarvit barvou $c$ a dostaneme hledané dobré hranové barvení grafu $(V(G), E(G') \cup \{e\})$. V dalším textu můžeme předpokládat, že taková neobarvená hrana $e$, $e = uv$, aby její koncové vrcholy $u$, $v$ měly společnou volnou barvu, v grafu $G'$ už není.
2) Označme $c_1$ nějakou volnou barvu vrcholu $v = v_0$. Předpokládáme, že $c_1$ není volnou barvou vrcholu $u$, a proto barvou $c_1$ je obarvena některá hrana $uv_1$ (Obrázek 7.5.).
   Dále označme $c_2$ volnou barvu vrcholu $v_1$. Jestliže $c_2$ je volná barva vrcholu $u$, tak přebarvíme hranu $uv_1$ barvou $c_2$ a hranu $uv_0$ obarvíme barvou $c_1$ (Obrázek 7.5. vlevo). Pokud $c_2$ není volná barva vrcholu $u$, tak barvou $c_2$ je obarvena některá hrana $uv_2$ a volnou barvu vrcholu $v_2$ označíme $c_3$.
   Postup opakujeme. Podle volné barvy $c_i$ vrcholu $v_{i-1}$ buď vybereme hranu $uv_i$ s touto barvou a $c_{i+1}$ označíme volnou barvu vrcholu $v_i$ nebo, pokud je $c_i$ také volnou barvou vrcholu $u$, *posuneme* barvy: přebarvíme barvou $c_i$ hranu $uv_{i-1}$ a barvou $c_{i-1}$ hranu $uv_{i-2}$, atd. Vždy barvou $c_j$ posuneme na hranu $uv_{j-1}$ pro $1 \leq j \leq i-1$ (Obrázek 7.5. uprostřed).

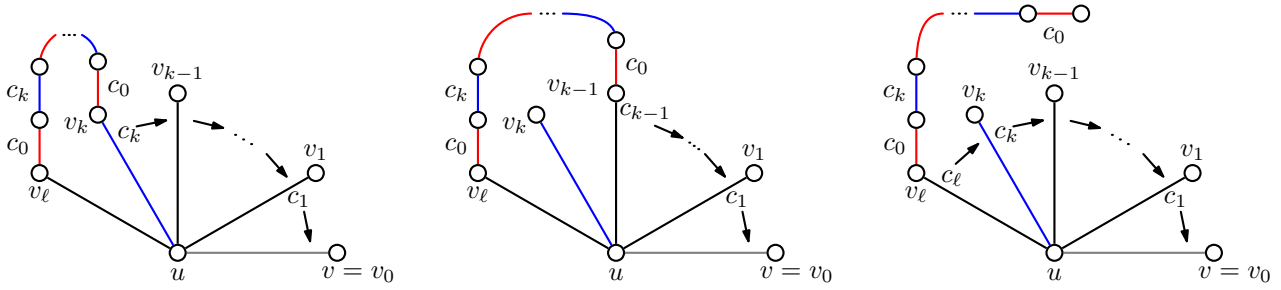



Obrázek 7.5.: *Posun barev v důkazu Vizingovy věty.*

Jestliže se takto podaří obarvit všechny hrany grafu, algoritmus končí.

3) Protože k dispozici je $\Delta(G)+1$ barev a nejvyšší stupeň vrcholu v grafu je omezen, tak nejvýše po $\Delta(G)$ krocích se některá barva zopakuje. Označme $\ell$ nejmenší takový index, že barva chybějící u vrcholu $v_\ell$ se již objevila v posloupnosti volných barev $c_1, c_2, \ldots, c_\ell$. Barvu označíme $c_k$. Místo abychom na hranu $e$ přidali novou barvu $\Delta(G)+2$, využijeme opakovaní barvy $c_k$ a přebarvíme graf $G'$ tak, aby bylo možno hranu $e$ obarvit jednou z daných $\Delta(G)+1$ barev.
Všimněte si, že barva $c_k$ je volná barva vrcholu $v_\ell$ i vrcholu $v_{k-1}$ a hrana $uv_k$ má barvu $c_k$. Je-li $c_0$ volná barva vrcholu $u$ a současně vrcholu $v_\ell$, tak můžeme posunout barvy od vrcholu $v_\ell$ a barvou $c_0$ obarvit hranu $uv_\ell$ (Obrázek 7.5. vpravo). Dále můžeme předpokládat, že barva $c_0$ *není* volná barva vrcholu $v_\ell$.
4) Označíme $P$ nějakou maximální (není možné ji prodloužit) alternující cestu s barvami $c_0$ a $c_k$, která začíná u vrcholu $v_\ell$ hranou obarvenou $c_0$. Cesta $P$ je určena jednoznačně, protože u každého vrcholu je nejvýše jedna hrana každé barvy. Neobarvené hrany nás nyní nezajímají. Podle toho, kde cesta $P$ bude končit, provedeme posun barev a vzájemně prohodíme alternující obarvení hran cesty $P$. Rozlišíme několik možností.

- Jestliže cesta $P$ prochází vrcholem $v_k$ (Obrázek 7.6. vlevo), tak poslední hrana této cesty je $v_k u$ obarvená barvou $c_k$ a vrcholem $u$ cesta $P$ končí, protože $c_0$ je volná barva vrcholu $u$. Nyní stačí posunout barvy od vrcholu $v_k$ a prohodit alternující obarvení hran cesty $P$.
- Jestliže cesta $P$ prochází vrcholem $v_{k-1}$ (Obrázek 7.6. uprostřed), tak ve vrcholu $v_{k-1}$ končí a poslední hrana této cesty je obarvená barvou $c_k$, protože $c_k$ je volná barva vrcholu $v_{k-1}$. Nyní stačí posunout barvy od vrcholu $v_{k-1}$ a prohodit alternující obarvení hran cesty $P$.
- Jestliže cesta $P$ neprochází vrcholy $v_k$ ani $v_{k-1}$, tak neprochází ani vrcholy $u$ (do $u$ může přijít jedině přes vrchol $v_k$) ani $v_\ell$ (ve vrcholu $v_\ell$ začíná). Cesta $P$ může procházet některým z vrcholů $v_j$, kde $1 \le j < k-1$ a poslední hrana může být obarvena barvou $c_0$ nebo $c_k$. Vždy však stačí posunout barvy od vrcholu $v_\ell$ a prohodit alternující obarvení hran cesty $P$ (Obrázek 7.6. vpravo).




Obrázek 7.6.: *Cesta $P$ a posun barev.*

Ve všech případech jsme dostali dobré hranové $(\Delta(G)+1)$-barvení grafu $(V(G), E(G') \cup \{e\})$ a důkaz končí.
□

Důkaz Vizingovy věty je sice komplikovaný, ale je konstruktivní. Dává návod, jak najít dobré hranové $(\Delta(G)+1)$-barvení libovolného grafu $G$. Na druhou stranu algoritmus popsaný v důkazu Věty 7.1. může najít dobré hranové $(\Delta(G)+1)$-barvení grafu, který je dobře hranově $\Delta(G)$-obarvitelný, tj. algoritmus nezaručí použití nejmenšího možného počtu barev, zaručí pouze použití nejvýše $\Delta(G)+1$ barev.

**Grafy třídy 1 a 2**

Podle Vizingovy věty rozdělujeme grafy na *grafy třídy 1*, pro které je $\chi'(G) = \Delta(G)$ a na *grafy třídy 2*, pro které je $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Toto dělení spolu s dalšími parametry pak hraje roli při řešení celé řady jiných problémů. Například pravidelné grafy třídy 1 (s alespoň jednou hranou) mají vždy úplné párování (Cvičení 7.1.1.), zatímco grafy třídy 2 úplné párování mít mohou (Petersenův graf) nebo nemusí (graf na Obrázku 6.16.).

**Definice** *Vrcholové číslo nezávislosti* udává největší počet nezávislých vrcholů v grafu $G$. Vrcholové číslo nezávislosti značíme $\alpha(G)$. Podobně *hranové číslo nezávislosti* udává největší počet nezávislých hran v grafu $G$. Hranové číslo nezávislosti značíme $\alpha'(G)$.

Všimněte si, že hranové číslo nezávislosti není nic jiného než velikost největšího párování v grafu $G$, tj. platí $\alpha'(G) = |M^*|$. Připomeňme, že nejmenší vrcholové pokrytí je definováno na straně 137. Počet vrcholů nejmenšího vrcholového pokrytí značíme $\beta(G)$, platí $\beta(G) = |Q^*|$. Analogicky zavádíme *hranové pokrytí* jako takovou množinu hran $L$ grafu $G$, že každý vrchol grafu $G$ je incidentní s alespoň jednou hranou z $L$. Počet hran nejmenšího hranového pokrytí značíme $\beta'(G)$. Je snadné si uvědomit, že každá hrana úplného párování musí být pokryta alespoň jedním svým koncovým vrcholem, proto platí $\alpha'(G) \leq \beta(G)$. Podobně, máme-li množinu $S$ nezávislých vrcholů, tak každý musý být pokryt jinou hranou v nějakém hranovém pokrytí, proto platí $\alpha(G) \leq \beta'(G)$. Více o vztazích mezi velikostmi nejmenších pokrytí a největších nezávislých množin je psáno na straně 160.

Vizingova věta neumožňuje snadno poznat, zda na dobré hranové barvení grafu je potřeba $\Delta(G)$ nebo $\Delta(G) + 1$ barev. Následující věta, která je důsledkem Vizingovy věty, dává jedno kriterium, které pomůže rozpoznat grafy, pro které $\Delta(G)$ barev nestačí.

**Důsledek 7.2.** *Jestliže pro počet hran grafu $G$ platí $|E(G)| > \Delta(G)\alpha'(G)$, potom $\chi'(G) = \Delta(G)+1$.*

*Důkaz.* Postupujeme nepřímo. Mějme libovolný graf $G$ a nechť $\chi'(G) = \Delta(G)$. Mějme nějaké dobré $\Delta(G)$-barvení grafu $G$. Protože každá barevná třída (množina hran stejné barvy) tvoří párování a obsahuje nejvýše $|M^*| = \alpha'(G)$, dostaneme pro počet hran v grafu $|E(G)| \leq \Delta(G)\alpha'(G)$. To je negace předpokladu věty a důkaz končí. □

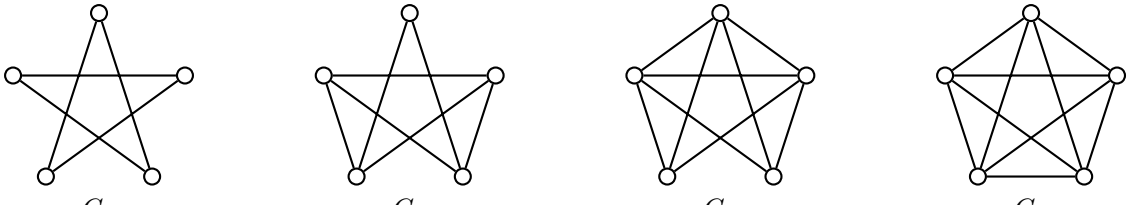
**Otázka:** Kde se v důkazu Důsledku 7.2. použila Vizingova věta (Věta 7.1.)?

## Cvičení

*7.1.1.*$^{\heartsuit}$ *Ukažte, že každý pravidelný graf třídy 1 s alespoň jednou hranou má úplné párování.*

*7.1.2. Najděte a) příklad grafu, b)*$^*$ *nekonečně mnoho grafů, c)*$^?$ *všechny grafy, které jsou třídy 1, avšak přidáním* libovolné *hrany se stanou třídy 2.*

*7.1.3. Určete chromatický index grafů na Obrázku 7.7.*




*Obrázek 7.7.: Grafy $G_1$, $G_2$, $G_3$ a $G_4$ na pěti vrcholech.*

*7.1.4. Ukažte, že v každém pravidelném grafu $G$ s lichým počtem vrcholů a alespoň jednou hranou je $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.*

*7.1.5. Najděte příklad pravidelného grafu $G$, který nesplňuje předpoklad Důsledku 7.2. a přitom $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.*

*7.1.6. Nalezněte algoritmus hranového $(\Delta(G) + 1)$-barvení libovolného grafu $G$.*

*7.1.7. Dokažte nebo vyvraťte: $\chi'(G \cup H) \leq \chi'(G) + \chi'(H)$.*

*7.1.8. Najděte dobré hranové barvení grafu $Q_n$ (hyperkrychle řádu $n$) a dokažte, že $\chi'(Q_n) = \Delta(Q_n)$.*

*7.1.9. Ukažte, že v libovolném grafu $G$ platí pro vrcholové číslo nezávislosti $\alpha(G) \geq |V(G)|/(\Delta(G)+ + 1)$.*

*7.1.10. Ukažte, že Petersenův graf je třídy 2.*

*7.1.11. Popište všechny grafy $G$, pro které platí a) vrcholové číslo nezávislosti $\alpha(G) = 1$, b) hranové číslo nezávislosti $\alpha'(G) = 1$, c) velikost nejmenšího vrcholového pokrytí $\beta(G) = 1$, d) velikost nejmenšího hranového pokrytí $\beta'(G) = 1$.*

## 7.2. Hranová barvení některých speciálních tříd grafů

Rozhodnout, zda daný graf $G$ je třídy 1 nebo třídy 2 není jednoduché. Obvykle to znamená najít dobré hranové $\Delta(G)$-barvení grafu $G$ nebo ukázat, že $\Delta(G)$ barev nestačí. Při určování chromatického indexu daného grafu $G$ třídy 1 stačí najít dobrá $\Delta(G)$-barvení grafu $G$. Při určování chromatického indexu nějakého grafu $G$ třídy 2 můžeme naopak s výhodou využít Důsledek 7.2. Všimněte si, že podle algoritmu z důkazu Věty 7.1. obecně nemůžeme rozhodnout, zda daný graf je třídy 1 nebo 2, neboť algoritmus je navržený tak, aby hledal dobré hranové $(\Delta(G)+1)$-barvení grafu i v případě, kdy daný graf je třídy 1. V této kapitole se budeme věnovat chromatickému indexu několika obecných i speciálních tříd grafů.

**Chromatický index bipartitních grafů**

Následující větu dokázal Kőnig již v roce 1916. Říká, že všechny bipartitní grafy (a speciálně i stromy) jsou třídy 1. Důkaz věty ponecháme jako dvojici Cvičení 7.2.2. a 7.2.3.

**Věta 7.3.** *Pro každý bipartitní graf $G$ platí $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

**Hranová barvení cyklů**

Chromatický index cyklů $C_n$ určíme snadno. Pro sudé $n$ na dobré hranové barvení stačí pravidelně se střídající dvě barvy. Protože $\Delta(C_n) = 2$, tak podle Vizingovy věty víme, že chromatický index nemůže být menší a tak $\chi'(C_n) = \Delta(C_n) = 2$.

Pro liché $n$ podle Cvičení 7.1.4. víme, že liché cykly jsou třídy 2, protože $\chi'(C_n) = \Delta(C_n)+1 = 3$. Všimněte si, že vztah pro chromatický index můžeme shrnout

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} \Delta(G) + 1 & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \Delta(G) & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Přehlednější je zápis s explicitně uvedenými hodnotami chromatického indexu.

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{pro } n \text{ liché,} \\ 2 & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$$

**Otázky:**

- Platí tvrzení, že všechny grafy, které obsahují lichý cyklus, jsou třídy 2?
- Mějme graf $G$ s $n$ vrcholy. Platí $\chi'(G) + \chi'(\overline{G}) = \Delta(K_n) + 1$?

**Hranová barvení kompletních grafů**

Ve Cvičení 7.2.5. ukážeme, že pro hranová barvení kompletních grafů platí (podobně jako v předchozím odstavci)

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} \Delta(G)+1 & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \Delta(G) & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Můžeme také psát

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n & \text{pro } n \text{ liché,} \\ n-1 & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

**Hranová barvení kol**

Graf kolo $W_{n+1}$ byl zaveden na straně 74. Ukážeme, že $\chi(W_{n+1}) = \Delta(W_{n+1}) = n$ pro všechny přípustné hodnoty $n \geq 3$. Stačí ověřit, že hranové barvení $c : E(W_{n+1}) \to \{1, 2, \ldots, n\}$ definované předpisem

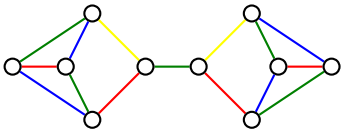
$$c(uv) = \begin{cases} i & \text{pro } u = v_0 \text{ a } v = v_i \text{ kde } i = 1, 2, \ldots, n, \\ i-1 & \text{pro } u = v_i \text{ a } v = v_{i+1} \text{ kde } i = 2, 3, \ldots, n-1, \\ n-1 & \text{pro } u = v_n \text{ a } v = v_1, \\ n & \text{pro } u = v_1 \text{ a } v = v_2. \end{cases}$$

je dobré hranové $\Delta(G)$-barvení kola $W_{n+1}$ s centrálním vrcholem $v_0$ a vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ na obvodu, protože podle Vizingovy věty (Věta 7.1.) víme, že chromatický index nemůže být menší. Všechny hrany incidentní s centrálním vrcholem jsou podle definice barvení $c$ různých barev a každý obvodový vrchol stupně 3 je incidentní s hranami tří různých barev. Vrchol $v_1$ je incidentní s hranami barev 1, $n-1$ a $n$. Vrchol $v_n$ je incidentní s hranami barev $n-2$, $n-1$ a $n$. Zbývající vrcholy $v_i$ pro $i = 2, 3, \ldots, n-1$ jsou obarveny barvami $i-2$, $i-1$ a $i$. Každé kolo $W_{n+1}$ je proto třídy 1.

**Hranová barvení planárních grafů**

Planárním grafům je Věnována Kapitola 9. Vizing v roce 1965 ukázal, že planární grafy s nejvyšším stupněm vrcholů 8 a více jsou třídy 1. Současně vyslovil hypotézu, že všechny jednoduché planární grafy (planární grafy budou zavedeny v 9. kapitole) s nejvyšším stupněm 6 nebo 7 jsou třídy 1. Sanders a Zhao v roce 2001 ukázali, že všechny jednoduché (bez násobných hran) planární grafy s nejvyšším stupněm 7 jsou třídy 1. Pro planární grafy s nejvyšším stupněm 6 zůstává hypotéza zatím nerozřešena.

Na druhou stranu existují planární grafy s nejvyšším stupněm 2 až 5, které jsou třídy 2. Triviálním příkladem jsou liché cykly. Jeden netriviální příklad je graf $G$ na Obrázku 7.8. (je izomorfní s grafem na Obrázku 6.2.). Ukážeme, že graf $G$ je třídy 2. Pro spor předpokládejme, že $G$ je třídy 1. Graf $G$ je pravidelný (kubický), a proto by každá barevná třída musela být úplným párováním. Podle Cvičení 6.1.9. musí každé úplné párování kubického grafu obsahovat most. To znamená, že $G$ obsahuje nejvýše jedno úplné párování, což je hledaný spor. Nalezení dalších netriviálních příkladů je ponecháno jako Cvičení 7.2.7.



Obrázek 7.8.: *Planární graf, který je třídy 2.*

## Odkazy:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Edge_coloring
- https://en.wikipedia.org/wiki/Vizing%27s_conjecture

## Cvičení

*7.2.1. Dokažte, že $\chi'(K_{n,m}) = \Delta(K_{n,m})$.*

*7.2.2. Ukažte, že každý bipartitní graf $G$ má $\Delta(G)$-pravidelný bipartitní nadgraf. Pomocí tohoto tvrzení a Důsledku 6.3. dokažte Větu 7.3.*

*7.2.3. Nalezněte algoritmus hranového $\Delta(G)$-barvení bipartitního grafu $G$.*

*7.2.4. Ukažte, že v bipartitním grafu $G$ vždy existuje hranové $\delta(G)$-barvení (ne nutně dobré) takové, že každý vrchol je incidentní s hranami všech $\delta(G)$ barev.*

*7.2.5. Dokažte, že $\chi'(K_{2n-1}) = \chi'(K_{2n}) = 2n - 1$.*

*7.2.6. Najděte chybu v následujícím důkazu Věty 7.3.:*
*Nejprve ukážeme, že každý bipartitní graf $G = (U \cup W, E)$ je podgrafem nějakého $\Delta(G)$-pravidelného bipartitního grafu. Pokud nejsou partity $U$ a $W$ stejné velikosti, přidáme do menší partity tolik vrcholů, aby byly obě partity stejné velikosti. Dále, protože součet stupňů vrcholů v každé partitě je stejný, najdeme ke každému vrcholu $u \in U$ stupně menšího než $\Delta(G)$ vrchol $w \in W$ stupně menšího než $\Delta(G)$. Jestliže $uw \notin E$, tak spojíme $u$ a $w$ hranou. Pokud však $uw \in E$, tak najdeme nějaké další dva jiné vrcholu $u' \in U$ a $w' \in W$, které jsou sousední, ale $w'$ není sousední s $u$ a $u'$ není sousední s $w$. Takové vrcholy jistě existují, protože $\deg(u) < \Delta(G)$ a $\deg(v) < \Delta(G)$. Nejprve odebereme hranu $u'w'$ a potom přidáme hrany $uw'$ a $u'w$. Tím se zvýší stupeň vrcholů $u$ a $w$ a stupeň vrcholů $u'$ a $w'$ se nezmění.*

*Je-li výsledný graf pravidelný, důkaz končí, jinak opakujeme uvedený postupu dokud výsledný nadgraf nebude pravidelný.*

*7.2.7. Najděte a) alespoň tři planární grafy s nejvyšším stupněm větším než 2, které jsou třídy 2, b) nekonečnou třídu planárních grafů s nejvyšším stupněm věším než 2, které jsou třídy 2.*

*7.2.8.* Ukažte, že všechny planární kubické bez mostů jsou třídy 1.*

*7.2.9. Najděte příklad grafu $G$ třídy 1, ve kterém nejsou při žádném jeho dobrém $\Delta(G)$-barvení obarveny hrany nějakého úplného párování stejnou barvou. Tj. žádná jeho barevná třída nemůže být úplným párováním, aniž by se použilo více než $\Delta(G)$ barev. Pokud takový graf neexistuje, dokažte to.*

*7.2.10. Mějme strom $T$ s $n$ vrcholy a vrcholovým číslem nezávislosti $\alpha(T)$. Najděte vztah pro hranové číslo nezávislosti $\alpha'(T)$.*

## 7.3. Rozklady grafů

V předchozí podkapitole jsme studovali rozklad hranové množiny kompletního grafu na systém podmnožin nezávislých hran. Jedná se o speciální případ obecnějšího postupu.

**Definice** *Rozklad grafu $G$* je takový systém podgrafů $G_1, G_2, \ldots, G_k$, kde každé dva různé podgrafy jsou hranově disjunktní a sjednocením všech podgrafů dostaneme právě graf $G$. Jestliže navíc jsou všechny podgrafy izomorfní $G_1 \simeq G_2 \simeq \ldots \simeq G_k \simeq H$, tak hovoříme o $H$-rozkladu. Pokud je navíc každý podgraf faktorem grafu $G$, tak hovoříme o $H$-faktorizaci grafu $G$.

Obrázek 7.9.: *Rozklad grafu $K_6$ na podgrafy $C_3, C_3, K_{3,3}$ a $C_7$-faktorizace grafu $K_7$.*

Na Obrázku 7.9. vlevo máme rozklad grafu $K_6$ na dva podgrafy $C_3$ (červené a modré hrany) a jeden faktor $K_{3,3}$ (se zelenými hranami). Vpravo je příklad $C_7$-faktorizace grafu $K_7$. Všimněte si, že do každého rozkladu daného grafu $G$ můžeme přidat libovolný počet triviálních podgrafů a dostaneme opět rozklad grafu $G$. Proto budeme dále předpokládat, že všechny podgrafy jsou netriviální.

**Některé vybrané rozklady grafů**

V předchozích kapitolách jsme narazili na několik úloh, jejichž řešení můžeme zformulovat jako rozklad nějakého grafu. V kapitole 6.4. jsme uvedli, že opakovaným užitím konstrukce z důkazu Druhé Petersenovy věty (Věta 6.6.) můžeme pravidelný graf sudého stupně rozložit na 2-pravidelné faktory. Každý z těchto faktorů je sestaven z jednoho nebo více cyklů, a proto každý pravidelný graf sudého stupně je možno rozložit na cykly. Jiný způsob konstrukce rozkladu pravidelného grafu sudého stupně na cykly zmíníme v kapitole 11.1.

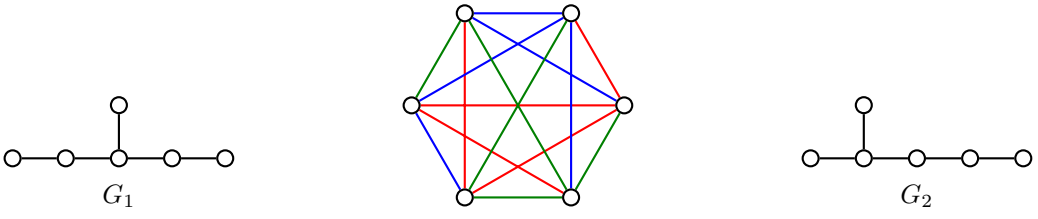
Věta 7.3. říká, že pro každý $k$-pravidelný bipartitní graf $G$ existuje dobré hranové $k$-barvení. Je zřejmé, že podgraf indukovaný hranami každé barevné třídy je 1-pravidelný faktor grafu $G$. Proto podle Věty 7.3. existuje rozklad pravidelného bipartitního grafu $G$ na 1-pravidelné faktory. Opakovaným využitím výsledku Cvičení 7.1.1. lze ukázat, že dokonce každý pravidelný graf třídy 1 lze rozložit na 1-pravidelné faktory.

Na straně 57 jsme zavedli pojem kombinatorického designu. Ukázali jsme, jak konstrukce speciálního designu, tzv. Steinerovského systému trojic ($(v, b, 3, r, 1)$-designu), odpovídá konstrukci rozkladu kompletního grafu $K_v$ na trojúhelníky $K_3$ (za splnění nutné podmínky $v \equiv 1, 3 \pmod 6$). Obecně se dá ukázat, že za splnění určitých nutných podmínek odpovídá konstrukce $(v, b, k, r, 1)$-design rozkladu kompletního grafu $K_v$ na kompletní podgrafy $K_k$.

**Nutné podmínky existence rozkladu grafů**

Snadno nahlédneme, že ne každý rozklad grafu na zvolené podgrafy může existovat. Některé nutné podmínky si snadno rozmyslíme, například počet hran rozkládaného grafu musí být roven součtu hran v jednotlivých podgrafech. Ve Cvičení 1.5.2. jsme ukázali, že rozklad grafu $K_{6v+5}$ na trojúhelníky $K_3$ neexistuje, protože počet hran grafu $K_{6v+5}$ je $(3v + 2)(6v + 5)$ a $3 \nmid (3v + 2)(6v + 5)$. Pro rozklady pravidelného grafu $G$ na pravidelné podgrafy $H$ musí navíc stupeň grafu $G$ být násobkem stupně grafu $H$. Například kompletní graf $K_{2n}$ jistě není možno rozložit na cykly, neboť stupeň každého vrcholu grafu $K_{2n}$ je liché číslo a stupeň každého vrcholu v rozkládajícím podgrafu je sudý.

Všechny zmíněné nutné podmínky jsou jednoduché, bohužel nejsou postačující. Pro obecný graf $G$ a jeho podgraf $H$ nejsou známy žádné nutné a postačující podmínky, jejichž splnění by zajistilo, že existenci $H$-rozkladu grafu $G$. Takové podmínky nejsou známy ani v nejjednodušším případě, kdy $G = K_n$. Existence $H$-faktorizace obvykle velmi závisí na struktuře daného grafu. Například kompletní graf $K_4$ jistě není možné rozložit na dvě kopie grafu $K_{1,3}$ (proč?). Ještě zajímavější je, že kompletní graf $K_6$ je možno faktorizovat na tři kopie grafu $G_1$ na Obrázku 7.10. vlevo, rozklad je uveden uprostřed. Ačkoliv graf $G_2$ (na obrázku vpravo) má stejnou stupňovou posloupnost, tak se dá ukázat, že $G_2$-faktorizace grafu $K_6$ neexistuje.




Obrázek 7.10.: *Graf $G_1$, $G_1$-faktorizace grafu $K_6$ a graf $G_2$, který kompletní graf $K_6$ nerozkládá.*

**Postačující podmínky existence rozkladu grafů**

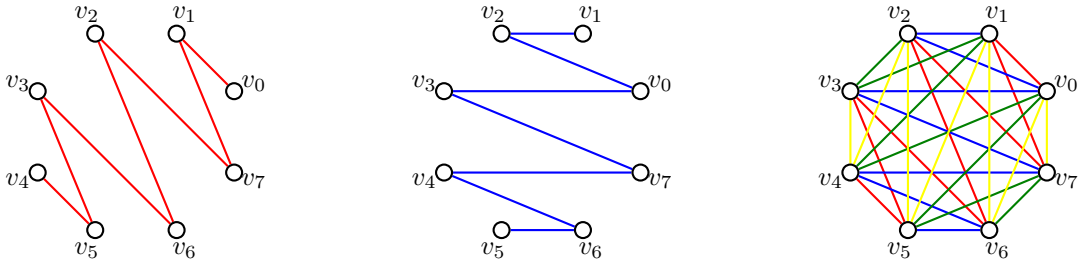
Postačující podmínky existence rozkladů nebo faktorizací se v obecném případě jsou obvykle konstruktivní. Popíšeme, jak nějaký konkrétní rozklad sestrojit. Takové konstrukce, zejména $H$-rozkladů, jsou známy především pro některé pravidelné grafy.

Pro velmi speciální grafy jsou známy i některé existenční podmínky, například existence 1-faktorizace bipartitních grafů z Hallovy věty (Věta 6.2.). Následující příklad ukazuje, jak může popis konstrukce rozkladu vypadat.

**Příklad 7.1.** Ukažte, že pro každé přirozené číslo $n$ existuje $P_{2n}$-faktorizace kompletního grafu $K_{2n}$.
Vrcholy kompletního grafu označme $v_0, v_1, \ldots, v_{2n-1}$. Sestavíme cestu $v_0v_1v_{2n-1}v_2v_{2n-2}\ldots v_{n+1}v_n$ (Obrázek 7.11.). Přičtením čísla 1 počítáno v modulární aritmetice s modulem $2n$ dostaneme jinou hranově disjunktní cestu $P_{2n}$. Obecně se dá ukázat, že cesty

$$v_iv_{1+i}v_{2n-1+i}v_{2+i}v_{2n-2+i}\ldots v_{j+i}v_{2n-j+i}\ldots v_{n+1+i}v_{n+i}$$

pro $i = 0, 1, \ldots, n-1$ jsou navzájem hranově disjunktní a tvoří rozklad grafu $K_{2n}$. Pro $n = 8$ je tvrzení zřejmé z Obrázku 7.11. ✓




Obrázek 7.11.: *Dvě hranově disjunktní cesty $P_8$ a $P_8$-faktorizace grafu $K_8$.*

V další části postup z Příkladu 7.1. zobecníme. Ukážeme, jak využít ohodnocení grafu $H$ pro nalezení $H$-rozkladu grafu $G = K_n$.

**Ohodnocení a rozklady grafů**

Každý graf lze triviálně rozdělit na podgrafy $P_2$. Každý souvislý graf se sudým počtem hran lze rozdělit na cesty $P_3$ (Cvičení 7.3.11.). Vzniká přirozená otázka, kdy lze graf rozdělit na izomorfní stromy. Nutnou podmínku existence takového rozkladu je, aby počet hran stromu $T$ dělil počet hran rozkládaného grafu $G$ Avšak tato nutná podmínka obecně nemusí být postačující (připomeňme Obrázek 7.10.).

Graham a Häggkvist vyslovili hypotézu, že každý $2m$-pravidelný graf lze rozložit na kopie libovolného stromu $T$ s $m$ hranami. Tato hypotéza není dokázána dokonce ani pro nejpřirozenější případ, kdy $G = K_{2m+1}$. Následující hypotézu publikoval Ringel již v roce 1964.

**Hypotéza 7.4.** *Nechť $T$ je libovolný pevně zvolený strom s $m$ hranami. Kompletní graf $K_{2m+1}$ lze rozložit na $2m+1$ kopií stromu $T$.*

Ve stejném roce 1964 publikovali Ringel a Kotzig silnější hypotézu, která je stále otevřená přestože během let získala velkou popularitu a o její řešení se pokoušela řada matematiků. Abychom mohli hypotézu vyslovit, nejprve zavedeme jedno speciální ohodnocení grafu.

**Definice Graciózní ohodnocení**

*Graciózní ohodnocení* grafu $G$ s $m$ hranami je takové ohodnocení $f$ vrcholů grafu $G$, pro které platí, že $f : V(G) \to \{0, 1, \ldots, m\}$ je injektivní zobrazení a platí $\{|f(u) - f(v)| : uv \in E(G)\} = \{1, 2, \ldots, m\}$. Graf, pro který existuje graciózní ohodnocení, se nazývá *graciózní graf*.

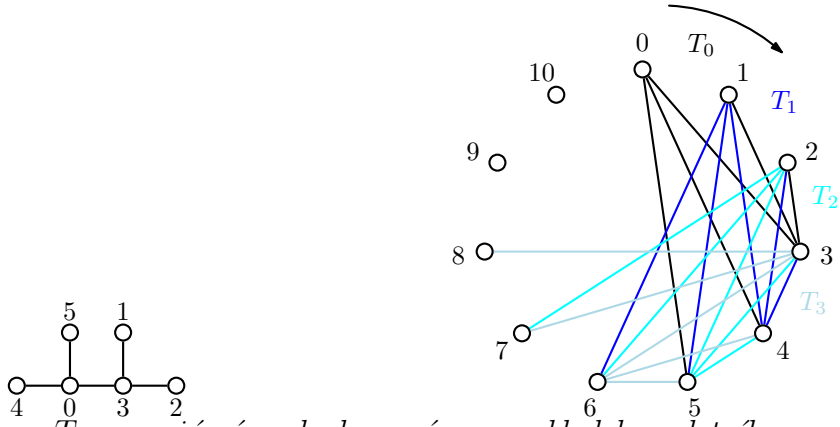
Jinými slovy, graciózní ohodnocení grafu $G$ je takové ohodnocení vrcholů grafu $G$ navzájem různými čísly od 0 po $|E(G)|$, že pro každou hranu je rozdíl ohodnocení koncových vrcholů hrany jiné číslo z množiny $1, 2, \ldots, |E(G)|$. Ringelova a Kotzigova říká, že každý strom je graciózní.

**Hypotéza 7.5. Hypotéza graciózních stromů**

*Každý strom má gracióznı́ ohodnocenı́.*

Význam gracióznı́ho ohodnocenı́ pěkně demonstruje následujı́cı́ přı́klad.

**Přı́klad 7.2.** Ukážeme, jak gracióznı́ ohodnocenı́ stromu $T$ na Obrázku 7.12. umožnı́ sestavit $T$-rozklad grafu $K_{11}$.




Obrázek 7.12.: *Strom $T$ s gracióznı́m ohodnocenı́m a rozklad kompletnı́ho grafu $K_{11}$ na 11 kopiı́ stromu $T$.*

Nejprve najdeme gracióznı́ ohodnocenı́ stromu $T$. Sice žádná věta nezaručuje, že takové ohodnocenı́ existuje, avšak například v roce 2003 ověřil Michael Horton hrubou silou pravdivost hypotézy pro všechny stromy s méně než 30 vrcholy. Gracióznı́ ohodnocenı́ stromu $T$ je na Obrázku 7.12. vlevo. Všimněte si, že jsme pro strom s 5 hranami použili čı́sla $0, 1, \ldots, 5$ a rozdı́ly hodnot koncových vrcholů všech pěti hran jsou právě čı́sla $1, 2, \ldots, 5$.

Dále na Obrázku 7.12. vpravo je ukázáno, jak gracióznı́ ohodnocenı́ umožnı́ rozložit kompletnı́ graf $K_{11}$ na 11 kopiı́ stromu $T$. Na obrázku jsou naznačeny prvnı́ čtyři kopie, dalšı́ch 7 kopiı́ získáme dalšı́m „pootočenı́“ nakreslenı́ stromu $T$. Vzhledem k tomu, že každá hrana má jiný rozdı́l hodnot koncových vrcholů, tak žádná hrana kompletnı́ho grafu nebude patřit do dvou různých kopiı́ stromu $T$. Naopak, protože kompletnı́ graf $K_{11}$ má $\binom{11}{2} = 55$ hran a každá z 11 kopiı́ stromu $T$ má 5 hran, tak každá hrana kompletnı́ho grafu $K_{11}$ bude patřit do jedné kopie stromu $T$ a bude se proto jednat o $T$-rozklad grafu $K_{11}$. ✓

Pozorovánı́ z Přı́kladu 7.2. je možno zobecnit. A. Rosa, Kanadský matematik Slovenského původu, už v roce 1967 dokázal následujı́cı́ větu, kterou uvedeme bez důkazu.

**Věta 7.6.** *Jestliže strom $T$ s $m$ hranami má gracióznı́ ohodnocenı́, tak existuje rozklad grafu $K_{2m+1}$ na $2m+1$ kopiı́ stromu $T$.*

Nenı́ těžké uvidět, že analogická věta platı́ nejen pro stromy, ale pro jakékoliv grafy s gracióznı́m ohodnocenı́m. Na druhou stranu pro rozklady grafů je mnohem vhodnějšı́m nástrojem tzv. $\rho$-ohodnocenı́, které zavedl Rosa také v roce 1967.

**Definice $\rho$-ohodnocenı́**

Mějme graf $G$ s $m$ hranami a s injektivnı́m ohodnocenı́m vrcholů $f : V(G) \to \{0, 1, \ldots, 2m\}$. *Délkou* hrany $xy$, kde $xy \in E(G)$, nazveme čı́slo $\ell(x, y) = \min\{|f(x) - f(y)|,\ 2m + 1 - |f(x) - f(y)|\}$.

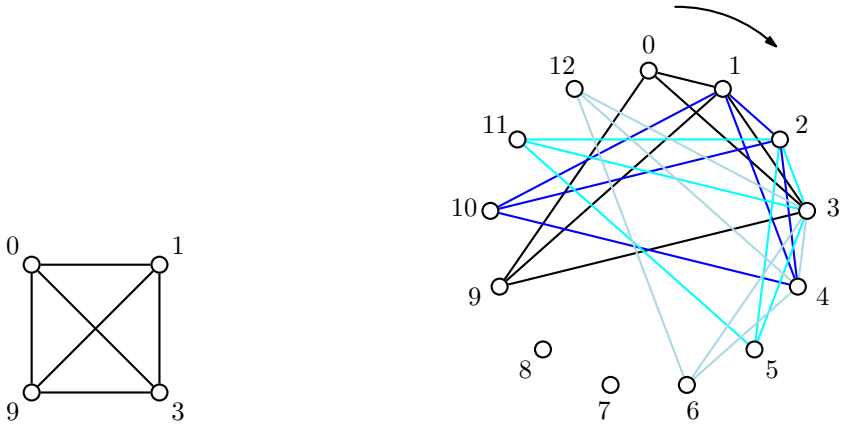
Řekneme, že ohodnocenı́ $f$ je *$\rho$-ohodnocenı́* grafu $G$, jestliže množina délek všech jeho hran $\{|f(u) - f(v)| : uv \in E(G)\}$ je právě množina $\{1, 2, \ldots, m\}$.

Všimněte si, že každé gracióznı́ ohodnocenı́ grafu je současně $\rho$-ohodnocenı́. Například ohodnocenı́ stromu $T$ na Obrázku 7.12. vlevo je gracióznı́ a současně se jedná o $\rho$-ohodnocenı́ stromu $T$. Opačná implikace však neplatı́, ne každé $\rho$-ohodnocenı́ je gracióznı́. Například ohodnocenı́ na Obrázku 7.13. je $\rho$-ohodnocenı́ grafu $K_4$, které nenı́ gracióznı́. Bez důkazu uvedeme i následujı́cı́ větu.

**Věta 7.7.** *Graf $G$ s $m$ hranami má $\rho$-ohodnocenı́ právě tehdy, když existuje cyklický rozklad grafu $K_{2m+1}$ na $2m+1$ kopiı́ grafu $G$.*

Podobně jako graciózní ohodnocení umožní rozklad kompletního grafu na kopie stromů tak $\rho$-ohodnocení grafu $G$ umožní rozklad příslušného kompletního grafu na kopie grafu $G$. A pokud požadujeme, aby rozklad byl cyklický (tj. aby ohodnocení každé další kopie odpovídalo zvýšení hodnot vrcholů o jedničku modulo $2m+1$), tak je to právě $\rho$-ohodnocení, které takový rozklad umožní. Příklad cyklického $\rho$-ohodnocení grafu $K_4$ a příslušný cyklický rozklad grafu $K_{13}$ ukážeme v následujícím příkladu.

**Příklad 7.3.** Ukážeme, jak $\rho$-ohodnocení grafu $K_4$ na Obrázku 7.13. umožní sestavit cyklický $K_4$-rozklad kompletního grafu $K_{13}$.



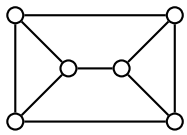

Obrázek 7.13.: *Graf $K_4$ s $\rho$-ohodnocením a cyklický $K_4$-rozklad grafu $K_{13}$.*

Nejprve najdeme $\rho$-ohodnocení grafu $K_4$, je na Obrázku 7.13. vlevo. Všimněte si, že jsme pro ohodnocení grafu s 6 hranami použili některá navzájem různá čísla z množiny $0, 1, \ldots, 12$ a rozdíly hodnot koncových vrcholů všech šesti hran jsou právě čísla $1, 2, \ldots, 6$.

Dále na Obrázku 7.13. vpravo je ukázáno, jak $\rho$-ohodnocení umožní cyklicky rozložit kompletní graf $K_{13}$ na 13 kopií grafu $K_4$. Na obrázku jsou naznačeny první čtyři kopie, dalších 9 kopií získáme „pootočením“ nakreslení grafu $K_4$. Vzhledem k tomu, že každá hrana má jiný rozdíl hodnot koncových vrcholů, tak žádná hrana kompletního grafu nebude patřit do dvou různých kopií podgrafu $K_4$. Naopak, protože kompletní graf $K_{13}$ má $\binom{13}{2} = 13 \cdot 6$ hran a každá z 13 kopií grafu $K_4$ má 6 hran, tak každá hrana kompletního grafu $K_{13}$ bude patřit do právě jedné kopie grafu $K_4$ a bude se proto jednat o $K_4$-rozklad grafu $K_{13}$. Z obrázku je zřejmé, že uvedený rozklad je cyklický. ✓

## Cvičení

*7.3.1.♡ Rozložte graf $G$ na Obrázku 7.14. na tři cesty $P_4$. Pokud to není možné, pečlivě zdůvodněte.*



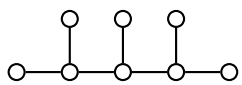
*Obrázek 7.14.: Graf $G$.*

*7.3.2.♡ Které kompletní bipartitní grafy lze rozložit na dva izomorfní podgrafy? Najděte a popište takový rozklad.*

*7.3.3. Rozložte Petersenův graf na čtyři cesty libovolné délky. Pokud to není možné, pečlivě zdůvodněte.*

*7.3.4. Rozložte hyperkrychli $Q_3$ a) na kopie grafu $K_{1,3}$, b) na kopie grafu $P_3$, b) na kopie grafu $P_4$, c) na kopie grafu $P_5$, d) na kopie grafu $P_6$. Pokud to není možné, pečlivě zdůvodněte.*

*7.3.5. Ukažte, že neexistuje $H$-rozklad kompletního grafu $K_8$, kde $H$ je graf na Obrázku 7.15.*



*Obrázek 7.15.: Graf $H$, který nefaktorizuje kompletní graf $K_8$.*

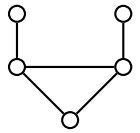
*7.3.6.* Ukažte, že každý kubický graf bez mostů je možno rozložit na kopie grafu $P_4$. (Nápověda: využijte Větu 6.6.)*

*7.3.7. Ukažte, že pokud je možno kubický graf $G$ rozložit na cesty $P_4$, tak graf $G$ má úplné párování.*

*7.3.8. Ukažte, že kubický graf má 1-faktor právě tehdy když jej lze rozložit na cesty $P_4$.*

*7.3.9. Rozložte Petersenův graf na tři izomorfní podgrafy a) s průměrem 3, b) s průměrem 4.*

*7.3.10. Které z následujících grafů tvoří $H$-rozklad grafu $K_6$? a) $C_3$, b) $K_{1,3}$, c) motýlek (dvě nezávislé hrany, jejichž čtyři koncové vrcholy jsou spojeny s pátým vrcholem, (Obrázek 2.17.), d) drak (graf $K_4$ bez jedné hrany, Obrázek 2.17.), e) býk (Obrázek 7.16.).*



Obrázek 7.16.: *Graf „býk“.*

*7.3.11.* Dokažte nebo vyvraťte: cesta $P_3$ rozkládá netriviální souvislý graf $G$ právě tehdy, když $G$ má sudý počet hran.*

*7.3.12. Najděte graciózní ohodnocení cesty $P_n$.*

*7.3.13. Ukažte, že $d$-pravidelný graf $G$ lze rozložit na hvězdy $K_{1,d}$ právě tehdy, když $G$ je bipartitní graf.*

*7.3.14. Hvězdou rozumíme bipartitní graf $K_{1,n}$ pro libovolné přirozené číslo $n$. Lichým grafem rozumíme každý graf, který má všechny vrcholy lichého stupně. Ukažte, že každý netriviální strom je možno a)$^\heartsuit$ rozložit na liché hvězdy, b) rozložit na hvězdy tak, aby každý nelistový vrchol byl centrem nejvýš jedné hvězdy, c) rozložit na liché hvězdy tak, aby každý nelistový vrchol byl centrem nejvýš jedné hvězdy.*

*7.3.15.* Lichým grafem rozumíme každý graf, který má všechny vrcholy lichého stupně. Ukažte, že každý les je možno rozložit na nejvýše dva liché podgrafy.*

## 7.4. Doplňková témata

### Nezávislé množiny a pokrytí

V daném grafu může existovat více největších nezávislých množin vrcholů, například v cyklu $C_7$ existuje sedm takových tříprvkových množin. Vrcholové číslo nezávislosti je však určeno jednoznačně, platí $\alpha(C_7) = 3$.

Podobně v nějakém grafu může existovat celá řada největších nezávislých množin hran, nejmenších vrcholových či hranových pokrytích. Hranové číslo nezávislosti $\alpha'(G)$, vrcholové číslo nezávislosti $\alpha(G)$, počet vrcholů nejmenšího vrcholového pokrytí $\beta(G)$ a počet hran nejmenšího hranového pokrytí $\beta'(G)$ nějakého grafu $G$ jsou čísla, která je možno pro každý graf $G$ jednoznačně určit.

**Věta 7.8.** *Jestliže $S \subseteq V(G)$ je nezávislá množina vrcholů grafu $G$, tak $V(G) \setminus S$ je vrcholové pokrytí grafu $G$. Navíc platí $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$.*

*Důkaz.* Jestliže $S$ je největší nezávislá množina vrcholů grafu $G$, tak každá hrana grafu $G$ je incidentní s alespoň jedním $S' = V(G) \setminus S$, protože kdyby některá hrana nebyla pokryta, musela by spojovat dva vrcholy $S$, což by

odporovalo definici nezávislé množiny. Na druhou stranu je-li $S'$ vrcholové pokrytí grafu, tak podle definice je každá hrana incidentní s některým vrcholem v $S'$ a nemůže spojovat dva vrcholy v množině $S$. Proto jsou vrcholy v $S$ nezávislé.

Jestliže $S$ je největší nezávislá množina vrcholů grafu $G$, tak její komplement $S'$ musí být nejmenší množina, která je vrcholovým pokrytím grafu $G$, a tak platí $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$. □

**Věta 7.9.** *Pokud graf $G$ neobsahuje izolované vrcholy tak $\alpha'(G) + \beta'(G) = |V(G)|$.*

*Důkaz.* Dokážeme dvě nerovnosti $\beta'(G) \leq |V(G)| - \alpha'(G)$ a $\beta'(G) \geq |V(G)| - \alpha'(G)$.

Nejprve označme $M$ nějaké největší párování daného grafu $G$. Podle definice platí $\alpha'(G) = |M|$. Pokrytí $L$ (ne nutně minimální) můžeme sestavit tak, že k hranám z množiny $M$ přidáme jednu hranu incidentní s každým $M$-nesaturovaným vrcholem. Taková hrana vždy existuje, protože graf $G$ neobsahuje izolované vrcholy. Každá hrana z $L$ tak pokryje nějaký z $|V(G)|$ vrcholů grafu $G$, přičemž hrany z $M$ pokryjí vždy dva vrcholy. Tak bude potřeba právě $|L| = |V(G)| - |M|$ hran a platí $\beta'(G) \leq |L| = |V(G)| - |M| = |V(G)| - \alpha'(G)$.

Nyní mějme nějaké *nejmenší* pokrytí $L$ grafu $G$. Jestliže $uv$ je nějaká hrana grafu $G$ a oba její koncové vrcholy jsou pokryty nějakou hranou z $L$, tak $uv \notin L$, neboť $L \setminus \{uv\}$ by bylo menší pokrytí grafu $G$. Proto podgraf $G_L$ tvořený všemi vrcholy grafu $G$ a hranami $L$ má v každé komponentě nejvýše jeden vrchol stupně většího než jedna. Každá komponenta $G_L$ je proto hvězdou (graf $K_{1,t}$ pro nějaké $t \in \mathbb{N}$). Každá z $h$ hvězd je stromem, který má podle Věty 3.3. o jednu hranu méně než vrcholů. Proto graf $G_L$ má celkem $|V(G)| - h$ hran a platí $|L| = |V(G)| - h$. Nyní z každé hvězdy vybereme libovolnou hranu a dostaneme nezávislou množinu hran (párování) $M$. Množina $M$ může ale nemusí být největším párováním. Platí proto $\alpha'(G) \geq |M| = |V(G)| - |L| = |V(G)| - \beta'(G)$. Odtud ihned vyplývá, že $\beta'(G) \leq |V(G)| - \alpha'(G)$. □

Pro bipartitní grafy bez izolovaných vrcholů dostaneme jakousi analogii Věty 6.4., která říká, že největší nezávislá množina vrcholů daného grafu má stejný počet prvků, jako nejmenší počet hran nutný pro úplné pokrytí tohoto grafu.

**Důsledek 7.10.** *Pro bipartitní graf $G$ bez izolovaných vrcholů platí $\alpha(G) = \beta'(G)$.*

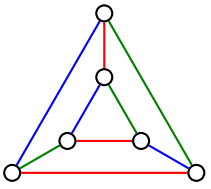
*Důkaz.* Podle Vět 7.8. a 7.9. platí $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)| = \alpha'(G) + \beta'(G)$. Podle Věty 6.4. platí, že $\alpha'(G) = \beta(G)$. Odečtením druhé rovnosti od první ihned dostáváme, že $\alpha(G) = \beta'(G)$. □

## Cvičení

*7.4.1. Pro graf $G$ na Obrázku 6.2. určete $\alpha(G)$, $\alpha'(G)$, $\beta(G)$ a $\beta'(G)$.*

### Perfektní 1-faktorizace

Mějme $r$-pravidelný graf $G$. Perfektní 1-faktorizace grafu $G$ je takový rozklad grafu $G$ na 1-pravidelné podgrafy $H_1, H_2, \ldots, H_r$, že sjednocení každých dvou podgrafů dává hamiltonovský cyklus grafu $G$ (o hamiltonovských cyklech je psáno v podkapitole 11.2.). Hrany každého faktoru tvoří úplné párování grafu $G$. Perfektní 1-faktorizace je možno pospat i jako hranová barvení $r$-pravidelných grafů $r$ barvami, přičemž hrany každých dvou barev indukují hamiltonovský cyklus. Například perfektní 1-faktorizace trojbokého hranolu $C_3 \square K_2$ je na Obrázku 7.17. Každé dvě barvy indukují hamiltonovský cyklus.



Obrázek 7.17.: *Perfektní 1-faktorizace grafu $C_3 \times K_2$ reprezentovaná barvením hran.*

V roce 1964, vyslovil Anton Kotzig hypotézu, že kompletní graf $K_{2n}$, kde $n \geq 2$ má perfektní 1-faktorizaci. Tato hypotéza zůstává otevřená, třebaže řady dílčích výsledků bylo dosaženo. Například jez známo, že kompletní grafy $K_{2p}$, kde $p$ je prvočíslo, takovou perfektní 1-faktorizaci umožňují. Podobně kompletní grafy $K_{p+1}$, kde $p$ je liché prvočíslo, mají perfektní 1-faktorizaci. Jsou známy i další perfektní 1-faktorizace pro konkrétní hodnoty, avšak v obecnosti zůstává Kotzigova hypotéza nerozřešená.

## Cvičení

*7.4.2. Ukažte, že trojboký hranol $C_3 \square K_2$ má perfektní jednoznačně určenou perfektní 1-faktorizaci (až na pořadí faktorů).*

*7.4.3. Ukažte, že hranol $C_n \square K_2$ nemá perfektní 1-faktorizaci pro žádné $n > 3$.*

### Vadim G. Vizing (25. března 1937 – 23. srpna 2017)

Vadim Georgievič Vizing se narodil v Kijevě. Protože jeho matka byla napůl Němka, byli s rodinou přinuceni odstěhovat se v roce 1947 na Sibiř. V roce 1959 začal studovat na Tomské státní univerzitě. Doktorát začal studovat na Steklovově institutu matematiky v Moskvě. Studia však nedokončil a vrátil se do Novosibirsku, kde v letech 1962–1969 pracoval na Ruské akademii věd a kde v roce 1966 získal i doktorát. V roce 1974 se přestěhoval do Oděsy. Od roku 1976 se dvacet let věnoval problémům rozvrhování, avšak od roku 1995 publikuje opět také články o teorii grafů.

Na straně 144 jsme zavedli dominující množina vrcholů jako takovou podmnožina $D$ množiny vrcholů grafu $G$, že každý vrchol, který nepatří do $D$, je sousední s některým vrcholem v $D$. Dominace $\gamma(G)$ grafu $G$ je mohutnost nejmenší dominující množiny $D$ grafu $G$. Například v kompletním grafu $K_n$ má nejmenší dominující množina jediný vrchol, zatímco nejmenší pokrytí obsahuje alespoň $\lfloor n/2 \rfloor$ vrcholů, neboť každou hranu největšího párování musí pokrýt jiný vrchol.

V roce 1968 Vizing formuloval hypotézu (dnes se jí říká Vizingova hypotéza), která říká, že počet vrcholů dominující množiny kartézského součinu grafů je větší nebo roven součinu počtu dominujících vrcholů jednotlivých grafů. Symbolicky: pro každé dva grafy $G$, $H$ platí $\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$.

Pro některé grafy může nastat rovnost, pro jiné nemusí. Například pro kartézský součin $C_4 \square C_4$ platí $\gamma(C_4 \square C_4) \geq \gamma(C_4)\gamma(C_4)$. Avšak pro kartézský součin dvou hvězd $K_{1,n}$ může být dominace grafu libovolně velká, ačkoliv každá z hvězd má dominaci rovnu 1. Platí

$$\gamma(K_{1,n} \square K_{1,n}) = n + 1 > 1 = \gamma(K_{1,n})\gamma(K_{1,n}).$$

O dominaci grafů bylo publikováno více než 300 článků.

**Odkazy:**

- http://en.wikipedia.org/wiki/Vadim_G._Vizing
- http://www.mathnet.ru/rus/person26464
- http://en.wikipedia.org/wiki/Vizing%27s_conjecture

## Cvičení

*7.4.4. Ukažte, že pro $C_4 \square C_4$ platí $\gamma(C_4 \square C_4) \geq \gamma(C_4)\gamma(C_4)$.*

*7.4.5. Ukažte, že dominující množina součinu hvězd $K_{1,n} \square K_{1,n}$ (pro $n \geq 1$) obsahuje více než 1 vrchol (ve Vizingově hypotéze nastává ostrá nerovnost).*

# Kapitola 8. Vrcholová barvení grafů

V minulé kapitole jsme barvili hrany grafu, v této kapitole budeme barvit vrcholy grafu. Nejprve ukážeme několik pěkných praktických motivací.

**Skladovací problém**
Ve skladu je uloženo mnoho druhů potravin. Podle předpisů řada druhů potravin nemůže být skladována společně, musí být skladovány v oddělených prostorách. Například ovocné saláty nesmí být skladovány společně s čerstvými syrovými vejci nebo krájené salámy nesmí být skladovány společně se syrovým masem. Jaký je nejmenší počet oddělených místností, který ve skladu potřebujeme? Ukážeme, že řešení problému můžeme řešit užitím grafového modelu, ve kterém vrcholy budou odpovídat jednotlivým skladovaným komoditám a hrany budou spojovat vždy ty dva vrcholy, jestliže odpovídající komodity nemohou být skladovány společně.

**Plánování zkouškových termínů**
Při plánování zkouškových termínů není vhodné, aby se kryly termíny zkoušek dvou kurzů, které mají mnoho společných studentů. Navíc na vysokých školách v některých zemích je jen jediný pokus na vykonání závěrečné zkoušky a zkoušku je možno vykonat jen v jednom pevně stanoveném termínu. V takovém případě je nutné, aby žádné dva kurzy se společným studentem neměly závěrečnou zkoušku ve stejnou dobu.

Sestavíme graf, ve kterém vrcholy odpovídají jednotlivým kurzům a hranou spojíme každé dva kurzy s alespoň jedním společným studentem. Takové obarvení vrcholů grafu, ve kterém žádné dva sousední vrcholy nemají společnou barvu, odpovídá možnému rozvrhu závěrečných zkoušek, přičemž různé barvy odpovídají různým dnům i časům zkoušek. Je sice možné každý vrchol obarvit jinou barvou (v daný čas bude probíhat vždy jen jedna zkouška), to ale není ekonomické. Pochopitelně se budeme snažit minimalizovat počet různých barev vrcholů grafu.

Další úloze, která odpovídá vrcholovému barvení nějakého grafu, se budeme věnovat v kapitole 9.4.

## 8.1. Vrcholové barvení a chromatické číslo grafu

**Definice** *Vrcholové barvení* grafu $G$ je zobrazení $c$ vrcholové množiny $V(G)$ do *množiny barev* $B$. Obvykle je $B = \{1, 2, \ldots, k\}$. Je-li $|B| = k$, budeme zobrazení $c$ nazývat *vrcholové $k$-barvení* (nebo jen *$k$-barvení*) grafu $G$. Řekneme, že vrchol $v$ je *obarven barvou $i$* jestliže $c(v) = i$. Číslu $i$ říkáme *barva vrcholu*. Vrcholové barvení se nazývá *dobré*, jestliže žádné dva sousední vrcholy nejsou obarveny stejnou barvou.

Podobně jako u hranových $k$-barvení opět z praktických důvodů předpokládáme, že když pracujeme s vrcholovým barvením grafu, tak je všech $k$ barev v grafu použito, jinak bychom mohli nepoužité barvy vynechat a zbývající barvy přeznačit.

Uvědomte si, že numerická hodnota vybrané barvy nehraje roli. Při popisu barvení konkrétních grafů proto upřednostňujeme pojmenování barev. Naproti tomu při popisu barvení, kdy není ještě znám počet potřebných barev nebo při implementaci barev v počítači, používáme přirozená čísla.

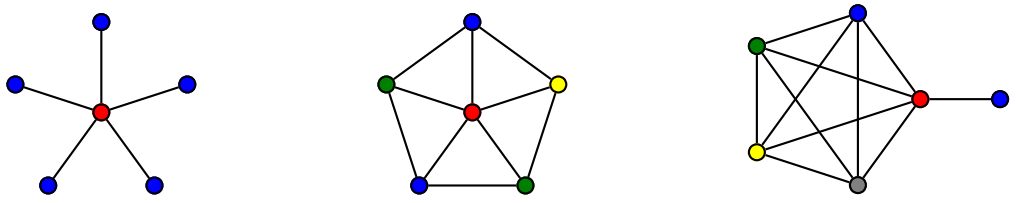
**Barevné třídy**
Podobně jako u hranového barvení grafu má smysl zavést vrcholové barvení grafu také pomocí rozkladu vrcholové množiny grafu $G$ na nezávislé podmnožiny. Pro některé problémy muže být taková formulace vhodnější. *Rozkladem* vrcholové množiny $V(G)$ rozumíme takový systém neprázdných podmnožin $V_1, V_2, \ldots, V_k$ množiny $V(G)$, že $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k = V(G)$ a $V_i \cap V_j = \emptyset$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, k$, $i \neq j$. Libovolný rozklad množiny $V(G)$ je současně vrcholovým barvením grafu $G$. Třídě rozkladu říkáme *barevná třída*, protože se jedná o množinu vrcholů stejné barvy. Protože všechny barevné

třídy jsou neprázdné, je v grafu použito všech $k$ barev. Jsou-li navíc v každé množině $V_i$ každé dva vrcholy nezávislé, jedná se o dobré barvení grafu $G$.

**Definice** Řekneme, že graf $G$ je *vrcholově $k$-obarvitelný* (nebo jen *$k$-obarvitelný*), jestliže existuje jeho dobré vrcholové barvení $k$ barvami. Nejmenší číslo $k$ takové, že graf $G$ je vrcholově $k$-obarvitelný, se nazývá *chromatické číslo* grafu $G$ a značí se $\chi(G)$. Graf $G$ se nazývá *vrcholově $k$-chromatický*, jsou-li jeho vrcholy dobře obarveny $k$ barvami a platí $k = \chi(G)$.

Definice, podobně jako definice hranové $k$-obarvitelnosti v předchozí kapitole, je zformulována tak, že vrcholově $k$-obarvitelný graf, je také vrcholově $l$-obarvitelný pro každé $k \leq l \leq |V(G)|$.

Všimněte si, že na rozdíl od hranového barvení grafu vysoký stupeň $\Delta(G)$ vrcholů v grafu nevynutí vysoký počet barev dobrého vrcholového barvení. Ani malý stupeň $\delta(G)$ nezaručí malý počet barev dobrého vrcholového barvení. Například pro grafy na Obrázku 8.1. platí $\chi(K_{1,5}) = 2$, přičemž $\delta(K_{1,5}) = 1$ a $\Delta(K_{1,5}) = 5$, dále $\chi(W_{1+5}) = 4$, přičemž $\delta(W_{1+5}) = 3$ a $\Delta(W_{1+5}) = 5$ a konečně $\chi(L_{5,1}) = 5$, přičemž $\delta(L_{5,1}) = 1$ a $\Delta(L_{5,1}) = 5$.



Obrázek 8.1.: *Dobré vrcholové barvení hvězdy $K_{1,5}$, kola $W_{1+5}$ a lízátka $L_{5,1}$.*

**Otázky:**

- Najdete příklad grafu $G$, pro který je $\chi(G) < \delta(G)$?
- Najdete příklad grafu $G$, pro který je $\chi(G) > \Delta(G)$?

Následující věta říká, že pro dobrá barvení kompletních bipartitních grafů a sudých cyklů stačí dvě barvy.

**Věta 8.1.** *Je-li $G \simeq K_{m,n}$ nebo $G \simeq C_{2n}$, potom $\chi(G) = 2$.*

*Důkaz.* Protože kompletní bipartitní graf obsahuje alespoň jednu dvojici sousedních vrcholů (proč?), tak na jeho dobré vrcholové barvení potřebujeme alespoň dvě barvy. Označme $U$ a $W$ partity kompletního bipartitního grafu $K_{m,n}$. Obarvíme-li všechny vrcholu $U$ barvou 1 a všechny vrcholy $W$ barvou 2, dostaneme dobré vrcholové barvení grafu $K_{m,n}$, neboť žádné dva sousední vrcholy nejsou obarveny stejnou barvou. Proto $\chi(K_{m,n}) = 2$.

Podobně, na dobré barvení sudého cyklu $C_{2n}$ s vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$ jsou jistě potřeba alespoň dvě barvy, neboť cyklus obsahuje alespoň dva sousední vrcholy. Dvě barvy stačí, neboť obarvíme-li všechny vrcholy s lichým indexem $i = 1, 3, \ldots, 2n-1$ barvou 1 a vrcholy se sudým indexem $i = 2, 4, \ldots, 2n$ obarvíme barvou 2, dostaneme dobré vrcholové barvení cyklu $C_{2n}$, protože každý vrchol se sudým indexem je sousední jen s vrcholy s lichým indexem a naopak. □

Ve Cvičení 8.1.4. ukážeme, že nejen kompletní bipartitní grafy, ale všechny bipartitní grafy jsou vrcholově 2-obarvitelné a bipartitní grafy s alespoň jednou hranou jsou dokonce 2-chromatické. Také pro kompletní grafy a liché cykly umíme chromatické číslo určit snadno.

**Věta 8.2.** *Je-li $G \simeq K_n$ nebo $G \simeq C_{2n+1}$, potom $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.*

*Důkaz.* Nejprve ukážeme, že $\chi(K_n) = n = \Delta(G) + 1$. Každé dva vrcholy kompletního grafu musí mít jinou barvu, neboť každé dva vrcholy jsou spojeny hranou, a proto nemohou být obarveny stejně. Proto $\chi(K_n) = n = \Delta(G) + 1$.

Na dobré barvení lichého cyklu $C_{2n+1}$ s vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_{2n+1}$ jsou jistě potřeba alespoň dvě barvy, neboť cyklus obsahuje alespoň jednu hranu. Ukážeme, že dvě barvy nestačí na dobré barvení a tři barvy stačí. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že vrchol $v_1$ je obarven barvou 1, a proto vrchol $v_2$ musí být obarven jinou barvou, řekněme barvou 2. Vrcholy s lichým indexem $i = 1, 3, \ldots, 2n-1$ pak budou obarveny barvou 1 a vrcholy

se sudým indexem $i = 2, 4, \ldots, 2n$ barvou 2. Avšak vrchol $v_{2n+1}$ nemůže být obarven barvou 1, protože je sousední s vrcholem $v_1$ a nemůže být obarven ani barvou 2, protože je sousední s $v_{2n}$. Dostáváme, že na obarvení lichého cyklu je třeba nejméně tři barvy a $\chi(C_{2n+1}) = 3 = \Delta(C_{2n+1}) + 1$. □

**Otázky:**

- Najdete příklad grafu $G$ různého od $C_{2n+1}$ a $K_n$ tak, aby $\chi(G) = \Delta(G) + 1$?
- Najdete příklad bipartitního grafu na jehož dobré vrcholové barvení stačí jediná barva?
- Platí rovnost $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = |V(G)|$ pro každý graf $G$?

**Dolní odhady chromatického čísla**

V kapitole 7.1. jsme na straně 152 zavedli vrcholové číslo nezávislosti $\alpha(G)$. Následující lemma je analogií Důsledku 7.2.

**Lemma 8.3.** *Pro každý graf $G$ platí $|V(G)| \leq \chi(G)\alpha(G)$.*

*Důkaz.* Protože každá barevná třída grafu $G$ tvoří v dobrém vrcholovém barvení množinu nezávislých vrcholů, tak $G$ obsahuje od každé z $\chi(G)$ barev nejvýše $\alpha(G)$ vrcholů. □

Všimněte si, že Věta 8.2. plyne také z Lemmatu 8.3. Protože $\alpha(K_n) = 1$, tak $\chi(K_n) \geq n$ a více než $n$ barev nemůžeme použít. Podobně $\alpha(C_{2n+1}) = \lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor = n$, a proto $\chi(C_{2n+1}) \geq \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} > 2$.

Z příkladů na Obrázku 8.1. je zřejmé, že obsahuje-li graf $G$ podgraf $K_c$, tak na libovolné jeho dobré obarvení je potřeba alespoň $c$ barev. Následující definice zavádí číslo $c$ formálně.

**Definice** *Klikové číslo* grafu $G$ značíme $c(G)$. Jedná se o počet vrcholů největšího kompletního grafu (kliky), který je podgrafem $G$.

Například grafy na Obrázku 8.1. mají kliková čísla $c(K_{1,5}) = 2$, $c(W_{1+5}) = 3$ a $c(L_{5,1}) = 5$. Následující lemma plyne ihned z definice klikového čísla a Věty 8.2.

**Lemma 8.4.** *Pro libovolný graf $G$ platí $\chi(G) \geq c(G)$.*

Všimněte si, že ani klikové číslo nedává přesný odhad chromatického čísla. Graf $W_{1+5}$ má klikové číslo 3 (proč?), a přitom $\chi(W_{1+5}) = 4$. Tvrzení Lemmatu 8.4. je speciálním případem obecnějšího tvrzení: je-li $H$ podgrafem grafu $G$, tak $\chi(H) \leq \chi(G)$ (Cvičení 8.1.11.).

**Horní odhady chromatického čísla**

Dobré vrcholové $k$-barvení grafu $G$ se nazývá *optimální*, jestliže $k = \chi(G)$. Snadno ukážeme, že na dobré vrcholové barvení libovolného grafu stačí vždy nejvýše $\Delta(G) + 1$ barev. Takové obarvení nemusí být optimální.

**Lemma 8.5. Heuristický algoritmus barvení**
*Pro libovolný graf $G$ platí $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

*Důkaz.* Důkaz je konstruktivní, popíšeme algoritmus dobrého vrcholového $(\Delta(G)+1)$-barvení libovolného grafu $G$. Na začátku máme graf $G$ a libovolný jeho vrchol obarvíme některou z $\Delta(G) + 1$ barev. Protože každý vrchol je sousední s nejvýše $\Delta(G)$ vrcholy, tak každý neobarvený vrchol $v$ je sousední s vrcholy nejvýše $\Delta(G)$ různých barev. Vždy najdeme alespoň jednu barvu, která se na vrcholech v okolí vrcholu $v$ nevyskytuje a tu můžeme použít na obarvení vrcholu $v$. Pokračujeme obarvováním dalšího vrcholu. Po $|V(G)|$ krocích máme graf $G$ dobře vrcholově $(\Delta(G) + 1)$-obarvený a dokazované tvrzení platí. □

Pro některé grafy (například pro liché cykly a kompletní grafy) dostaneme tímto jednoduchým hladovým algoritmem optimální vrcholové barvení. V obecném případě však uvedený algoritmus nemusí dát barvení s nejmenším možným počtem barev. Budeme-li nejprve obarvovat vrcholy malých stupňů, tak se může stát, že při obarvení vrcholů s vysokým stupněm budeme pak muset vybírat z omezeného počtu barev a bude použito mnohem více barev, než $\chi(G)$. Je proto žádoucí obarvovat nejprve vrcholy vysokých stupňů. Toto pozorování můžeme shrnout do následujícího lemmatu.

**Lemma 8.6. Vylepšený heuristický algoritmus barvení**
*Pro libovolný graf $G$ s $n$ vrcholy s nerostoucí stupňovou posloupností $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ platí*

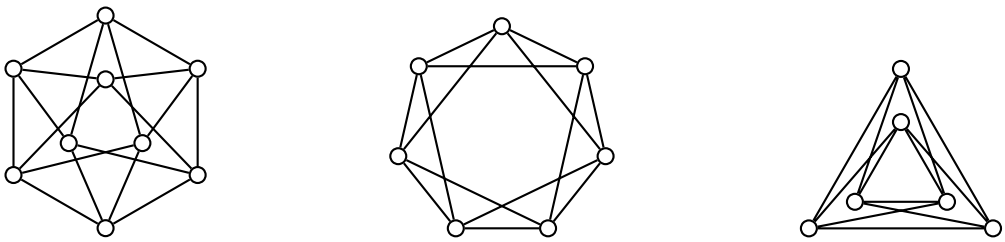
$$\chi(G) \leq 1 + \max_{i=1,2,\ldots,n} \{\min\{d_i, i-1\}\}.$$

*Důkaz.* Důkaz je analogický jako důkaz Lemmatu 8.5. s tím, že vrcholy obarvujeme v pořadí podle jejich stupně $d_i$. Vrchol stupně $d_i$ označíme $v_i$. Nejprve obarvíme vrchol $v_1$ stupně $d_1$ barvou 1. V obecném kroku obarvíme vrchol $v_i$, který je sousední s nejvýše $\min\{d_i, i-1\}$ již obarvenými vrcholy a stačí proto vybrat některou nepoužitou barvu mezi barvami $1, 2, \ldots, 1 + \min\{d_i, i-1\}$. Tak můžeme obarvit libovolný vrchol, a proto stačí nejvýše $1 + \max_{i=1,2,\ldots,n} \{\min\{d_i, i-1\}\}$ barev. □

Algoritmus popsaný v důkazu Lemmatu 8.6. najde dobré vrcholové barvení s nejmenším počtem barev všech grafů na Obrázku 8.1. Bohužel v obecném případě nemusí najít dobré vrcholové barvení, které je optimální vzhledem k počtu použitých barev (Cvičení 8.1.9.). V další podkapitole horní odhad chromatického čísla ještě zpřesníme.

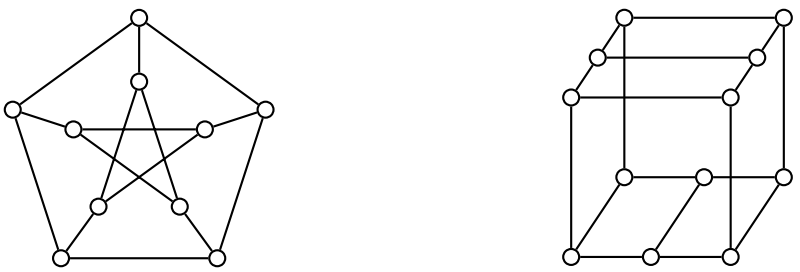
## Cvičení

*8.1.1. Určete chromatické číslo grafů na Obrázku 8.2.*



*Obrázek 8.2.: Grafy $G$, $H$ a $R$.*

*8.1.2. Určete chromatické číslo a najděte příslušné dobré vrcholové barvení následujících grafů a) Petersenův graf (Obrázek 8.3. vlevo), b) graf $B$ na Obrázku 8.3. vpravo), c) Grötzschův graf (Obrázek 9.18.).*



*Obrázek 8.3.: Petersenův graf a graf $B$.*

*8.1.3.♡ Jaké je chromatické číslo cyklu $C_n$?*

*8.1.4. Určete chromatické číslo bipartitního (ne nutně kompletního) grafu $G$.*

*8.1.5.♡ Určete chromatické číslo grafu $P_n$.*

*8.1.6.♡ Jaké je chromatické číslo stromu $T_n$?*

*8.1.7. Určete $\chi(W_{n+1})$.*

*8.1.8. Určete chromatické číslo grafu $Q_n$ (hyperkrychle řádu $n$).*

*8.1.9. Najděte příklad grafu, pro který algoritmus popsaný v důkazu Lemmatu 8.6. nenajde dobré vrcholové barvení s nejmenším počtem barev. Pro jednoznačnost předpokládejme, že při obarvování vrcholu vždy vybereme „nejmenší“ nepoužitou barvu.*

*8.1.10. Najděte příklad grafu $G$ a jeho vrcholu $v$ tak, aby platilo $\chi(G-v) < \chi(G)$ a $\chi(\overline{G}-v) < \chi(\overline{G})$.*

*8.1.11. Ukažte, že je-li $H$ podgrafem grafu $G$, tak $\chi(H) \leq \chi(G)$. Platí, že je-li $H$ vlastním podgrafem grafu $G$, tak $\chi(H) < \chi(G)$?*

*8.1.12.$^{\heartsuit}$ . Ukažte, že přidáním jedné hrany do stromu s alespoň třemi vrcholy se chromatické číslo zvýší nejvýše o 1.*

*8.1.13. Najděte silnější verzi tvrzení Cvičení 8.1.12.: ukažte, že přidáním jedné hrany do libovolného nekompletního grafu s alespoň třemi vrcholy se chromatické číslo zvýší nejvýše o 1.*

*8.1.14. Ukažte, že pokud $\overline{G}$ je bipartitní graf, tak platí $\chi(G) = c(G)$.*

*8.1.15. Ukažte, že pro každý graf $G$ existuje takové seřazení jeho vrcholů do posloupnosti, že hladový algoritmus popsaný v Lemmatu 8.5. dá dobré vrcholové $\chi(G)$-barvení.*

*8.1.16. Dokažte nebo vyvraťte: pro každý graf $G$ platí $\chi(G) \leq n(G) - \alpha(G) + 1$.*

## 8.2. Brooksova věta

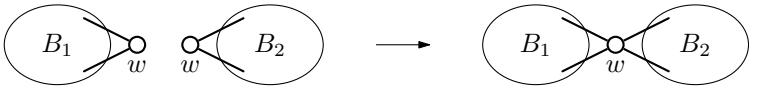
V této kapitole ukážeme další silný výsledek teorie grafů. Následující věta, kterou dokázal Brooks v roce 1941, ukazuje, že mezi souvislými grafy jsou to právě jen liché cykly a kompletní grafy (Věta 8.2.), které mají chromatické číslo vyšší než nejvyšší stupeň vrcholů v grafu.

**Věta 8.7. Brooksova věta**
*Mějme souvislý graf $G$ s $\Delta(G) \geq 3$, který je různý od kompletního grafu. Potom platí $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

*Důkaz.* Uvedeme důkaz, který našel Lovász v roce 1975 a který je jednodušší než původní Brooksův důkaz. Označme $k = \Delta(G)$ v libovolném souvislém grafu $G$ s $n$ vrcholy. Podle předpokladu platí $k \geq 3$.

Předpokládejme nejprve, že $G$ obsahuje nějaký vrchol stupně menšího než $k$. Označíme jej $v_n$. Nyní prohledáním grafu $G$ (do šířky nebo do hloubky) označíme postupně všechny vrcholy grafu $G$ s indexy v *sestupném* pořadí. Každý vrchol $v_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, má tak alespoň jednoho souseda s indexem vyšším než $i$, a tudíž má nejvýše $k-1$ sousedů s indexem menším než $i$. Algoritmus dobrého vrcholového barvení popsaný v důkazu Lemmatu 8.5. obarví vrcholy grafu $G$ v pořadí $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nejvýše $k$ barvami.

Dále předpokládejme, že $G$ je $k$-pravidelný. Pokud $G$ obsahuje artikulaci $w$, tak v každém bloku grafu $G$ (komponenta $G - w$ spolu s vrcholem $w$ a příslušnými hranami) je vrchol $w$ stupně menšího než $k$ a podle výše uvedeného postupu můžeme každý blok dobře obarvit $k$ barvami. Případnou permutací barev výsledného obarvení v jednotlivých blocích můžeme zařídit, aby $w$ měl v každém bloku stejnou barvu, a tak dostaneme dobré obarvení grafu $G$ $k$ barvami (Obrázek 8.4.).



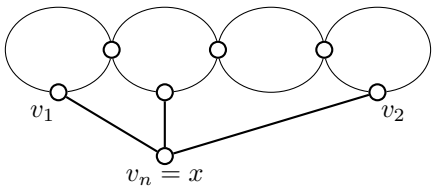

Obrázek 8.4.: *Barvení grafu $G$ získáme z vrcholového barvení bloků.*

V dalším můžeme předpokládat, že $G$ je $k$-pravidelný a vrcholově 2-souvislý graf. Aby bylo možno použít hladový algoritmus vrcholového barvení z důkazu Lemmatu 8.6., stačí zaručit, že alespoň dva vrcholy sousední s $v_n$ budou obarveny stejnou barvou. Jestliže nějaké dva vrcholy $v_1$ a $v_2$ sousední s $v_n$ nejsou spojeny hranou, můžeme je obarvit stejnou barvou, a potom zbývající vrcholy grafu $G - \{v_1, v_2\}$ opět uspořádáme prohledáváním od vrcholu $v_n$. Stačí ukázat, že v každém $k$-pravidelném 2-souvislém grafu $G$, který není kompletní, najdeme takovou trojici vrcholů $v_1, v_2, v_n$.

Označme $x$ libovolný vrchol grafu $G$. Je-li vrcholová souvislost $\kappa(G - x) \geq 2$, označíme $v_1 = x$ a $v_2$ bude libovolný vrchol, který je ve vzdálenosti 2 od vrcholu $v_1$ (takový existuje, protože $G$ je 2-souvislý a pravidelný, ale není kompletní). Konečně za $v_n$ zvolíme nějakého společného souseda vrcholů $v_1$ a $v_2$. Tak máme zajištěno, že graf $G - \{v_1, v_2\}$ bude souvislý a prohledáváním z vrcholu $v_n$ objevíme a označíme všechny vrcholy.

Je-li vrcholová souvislost $\kappa(G-x)=1$, označíme $v_n=x$. Graf $G-x$ obsahuje alespoň jednu artikulaci a alespoň dva bloky. Vrchol $x$ má v grafu $G$ alespoň jednoho souseda v každém koncovém bloku grafu $G-x$ (jinak by $G$ nebyl 2-souvislý, proč?). Označíme dva z nich $v_1$ a $v_2$ (podle Cvičení 5.2.5. víme, že koncové bloky existují v každém grafu alespoň dva). Tyto vrcholy jistě nejsou sousední, neboť každý leží v jiném bloku a žádný není artikulací grafu $G-x$, jinak by musel být i artikulací grafu $G$. Uvědomíme si, že $G-\{v_1,v_2\}$ je souvislý, protože žádný blok grafu $G-x$ neobsahuje artikulaci (každý blok je 2-souvislý podgraf) a také vrchol $x$ je stupně alespoň 3 (proč?), a je proto sousední s nějakým dalším vrcholem grafu $G-\{v_1,v_2\}$ (Obrázek 8.5.).

Nyní je zřejmé, že vždy je možno obarvit všechny vrcholy grafu $G$ pomocí nejvýše $k$ barev užitím algoritmu z Lemmatu 8.6. □




Obrázek 8.5.: *Výběr trojice vrcholů $v_1, v_2, v_n$.*

Všimněte si, že z Brooksovy věty (a z Vět 8.1. a 8.2.) ihned plyne i Lemma 8.5. Brooksovu větu bychom mohli také přeformulovat tak, že je-li $G$ takový graf, že $3 \le c(G) \le \Delta(G)$, tak $\chi(G) \le \Delta(G)$.

Existuje celá řada zpřesňujících odhadů pro některé speciální třídy grafů, některá zmíníme v následující podkapitole. Existuje i celá řada zobecnění pojmu vrcholového barvení, jejich rozbor však překračuje poslání tohoto textu.

**Otázky:**

- Najdete příklad souvislého grafu $G$ různého od $C_{2n+1}$ a $K_n$ tak, aby $\chi(G)=\Delta(G)+1$?
- Podle Věty 8.2. víme, že horní odhad $\chi(G) \le \Delta(G)$ neplatí pro liché cykly a kompletní grafy. Jak se toto omezení projevilo v důkazu Brooksovy věty (Věty 8.7.)?

## Cvičení

*8.2.1. Máme dána přirozená čísla $n$ a $r$, kde $n > r \ge 3$. Najděte příklad grafu $G$ s $n$ vrcholy, jehož chromatické číslo je $\chi(G)=\Delta(G)=r$.*

*8.2.2. Najděte příklad grafu, který neobsahuje trojúhelník a přitom na jeho obarvení jsou potřeba alespoň čtyři barvy.*

*8.2.3. Pro každou dvojici přirozených čísel $k$ a $l$, kde $2 \le k \le l+1$, najděte příklad grafu $G$ tak, aby $\chi(G)=k$ a $\Delta(G)=l$.*

*8.2.4. Ukažte, že vrcholově $k$-chromatický graf má alespoň $\binom{k}{2}$ hran.*

*8.2.5. Mějme graf $G$. Jeho bloky označme $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Ukažte, že chromatické číslo grafu $G$ je rovno nejvyššímu chromatickému číslo jeho bloků, tj. $\chi(G)=\max_{i=1,2,\ldots k}\{\chi(B_i)\}$.*

*8.2.6. Mějme graf $G$, jehož každá hrana se vyskytuje v nejvýše jednom cyklu. Využijte tento fakt k důkazu, že $\chi(G) \le 3$.*

*8.2.7.* Každý netriviální strom $T$ je bipartitní, a proto $\chi(T)=2$. Ukažte, že pro každé přirozené číslo $k$ existuje takový strom $T_k$ s nejvyšším stupněm $k$ a takové seřazení jeho vrcholů $\pi = v_1, v_2, \ldots, v_n$, že algoritmus popsaný v Lemmatu 8.5., který bude obarvovat vrcholy v pořadí $\pi$, použije $k+1$ barev.*

*8.2.8. Dokažte nebo vyvraťte, zda následující algoritmus obarví každý graf $G$ pomocí právě $\chi(G)$ barev. V grafu $G$ najdeme největší nezávislou množinu vrcholů $B_1$. Vrcholy v $B_1$ obarvíme barvou 1 a odebereme je z grafu. Celý postup opakujeme: v grafu $G-\left(\cup_{j=1}^{i-1} B_j\right)$ najdeme největší nezávislou množinu vrcholů $B_i$ a vrcholy v $B_i$ obarvíme barvou $i$. Dostaneme dobré $\chi(G)$-barvení grafu $G$.*

*8.2.9. Dokažte nebo vyvraťte: každý $k$-chromatický graf $G$ má nějaké dobré $k$-barvení, ve kterém alespoň jedna barevná třída obsahuje $\alpha(G)$ vrcholů.*

*8.2.10. Mějme $k$-chromatický graf a nějaké jeho dobré vrcholové $k$-barvení. Ukažte, že v každé barevné třídě existuje alespoň jeden vrchol, který je sousední s vrcholy všech $k-1$ zbývajících barev.*

*8.2.11. Mějme $k$-pravidelný graf $G$ s $n$ vrcholy obarvený $k$ barvami tak, že každý vrchol je sousední s vrcholy všech $k$ barev (to znamená s jedním vrcholem každé barvy). Uvedené barvení nemusí být dobré! Ukažte, že a) pravidelnost $k$ (a tedy i počet barev $k$) dělí $n$, b) každou barvou je obarvený stejný počet vrcholů. c) Dále ukažte, že pokud graf $G$ je obarven $k$ barvami, ale není pravidelný, tvrzení nemusí platit.*

*8.2.12.**V předmětu Algebra jsme popsali následující hru.*

*Mějme šachovnici o rozměru $r \times s$ políček, označme $n = rs$. Řádky i sloupce jsou značeny například čísly a písmeny. Na každém políčku šachovnice leží jedna mince, celkem na šachovnici leží $n$ mincí. Mince jsou náhodně otočené, některé hlavou vzhůru, některé hlavou dolů. Jedno políčko šachovnice je výjimečné, například že se pod ním skrývá poklad.*

*Dva kamarádi Adam a Bedřich mohou si předem mohou domluvit vhodnou strategii, aby uspěli v následující hře. Nejprve šachovnici a mince uvidí Adam. Adam se dozví, které políčko je výjimečné, a pak musí zvolit jedinou minci, kterou (někdo) otočí naopak, než mince leží. Adam odejde a už nijak nesmí napovídat Bedřichovi.*

*Nyní Bedřich poprvé uvidí šachovnici a na ní položené mince. Pokud pozná, které políčko šachovnice je výjimečné, oba ve hře uspěli. Jakmile si kamarádi domluví strategii, tak veškerá komunikace mezi Adamem a Bedřichem probíhá pouze volbou otočené mince, které mince jsou otočeny hlavou vzhůru. Bedřich nepozná, která mince byla otočena, například podle toho, že bude na políčku posunuta, nebo že bude teplejší a podobně.*

*S využitím výsledku Cvičení 8.2.11. ukažte, že pokud počet políček $n$ není mocnina dvojky, žádná strategie nemůže existovat.*

## 8.3. Další meze chromatického čísla

Připomeňme, že hlavním problémem vrcholového barvení je určení chromatického čísla a nalezení nějakého optimálního vrcholového barvení. Určení přesné hodnoty chromatického čísla je náročné, někdy se spokojíme jen s přibližnou hodnotou. V literatuře můžeme najít celou řadu horních odhadů chromatického čísla. Zmíníme a dokážeme jen některé z nich. Pro jisté třídy grafů mohou dát lepší odhad než Brooksova věta (Věta 8.7.) nebo Lemmata 8.5. a 8.6.

**Definice** Graf $G$ se nazývá *barevně $k$-kritický* (nebo jen *$k$-kritický*), jestliže $\chi(G) = k$ a pro každý jeho vlastní podgraf $H$ platí $\chi(H) < \chi(G)$.

**Otázky:**

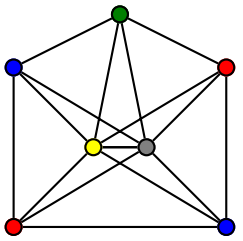
- Kolik existuje barevně 1-kritických grafů?
- Kolik existuje souvislých barevně 2-kritických grafů?
- Kolik existuje nesouvislých barevně 2-kritických grafů?

Ukážeme, že barevně $k$-kritické grafy nemohou mít žádný vrchol stupně výrazně menšího než $k$.

**Lemma 8.8.** *Je-li $G$ barevně $k$-kritický graf, tak $\delta(G) \geq k-1$.*

*Důkaz.* Označme $x$ libovolný vrchol grafu $G$. Protože $G$ je barevně $k$-kritický graf, tak $\chi(G) = k$ a jistě platí $\chi(G-x) \leq k-1$. Dále postupujeme sporem. Předpokládejme, že $\deg_G(x) < k-1$. Potom $|N_G(x)| < k-1$ a nepoužitou barvu mezi nejvýše $k-2$ barvami sousedů vrcholu $x$ použijeme na obarvení vrcholu $x$. Dostaneme tak dobré $(k-1)$-barvení grafu $G$, což je spor s předpokladem, že $\chi(G) = k$. □

Příkladem barevně $k$-kritického grafu je kompletní graf $K_n$ pro $n > 1$, protože $\chi(K_n) = n$ a odebráním libovolného vrcholy nebo libovolné hrany dostaneme graf, na jehož dobré vrcholové barvení stačí méně než $n$ barev. Další příklad barevně 5-kritického grafu $G$ je na Obrázku 8.6. Pečlivě



Obrázek 8.6.: *Barevně 5-kritický graf.*

si rozmyslete, že vynecháním libovolného vrcholu nebo libovolné hrany dostaneme 4-chromatický graf. Potom i chromatické číslo *každého* vlastního podgrafu $H$ grafu $G$ bude menší než $\chi(G)$ (proč?).

Odebíráním vrcholů a hran grafu můžeme chromatické číslo jen zmenšit, proto každý vrcholově $k$-chromatický graf má nějaký $k$-kritický podgraf i $k$-kritický faktor. Následující věta říká, že chromatické číslo grafu můžeme omezit i největší hodnotou nejmenšího stupně podgrafů daného grafu.

**Věta 8.9.** *Pro každý graf $G$ platí $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) : H \text{ je podgraf grafu } G\}$.*

*Důkaz.* Označme $k = \chi(G)$ a označme $H'$ nějaký $k$-kritický podgraf grafu $G$. Platí $\chi(G) - 1 = \chi(H') - 1$, což je podle Lemmatu 8.8. menší než $\delta(H')$ a to je menší, než $\max\{\delta(H) : H \text{ je podgraf grafu } G\}$. □

Mohlo by se zdát, že odhad ve Větě 8.9. je lepší než v Brooksově větě, neboť maximální stupeň je nahrazen minimálním stupněm. V obecnosti je použití tohoto odhadu omezené, neboť probrání všech podgrafů je obvykle náročné, protože různých podgrafů může existovat příliš mnoho. Je potřeba mít na paměti, že je-li $H$ podgraf grafu $G$, tak může nastat případ, kdy $\delta(H) > \delta(G)$. Například na Obrázku 8.1. je kompletní graf $H = K_5$ podgrafem lízátka $G = L_{5,1}$ a přitom $\delta(H) = 4 > 1 = \delta(G)$. Použití „triviálního“ odhadu $\chi(G) \leq 1 + \delta(G)$ je proto chybné! Pro pravidelné grafy dává odhad ve Větě 8.9. shodnou mez jako Brooksova věta.

Další horní odhad chromatického čísla ukazuje, že pro grafy na velkém počtu vrcholů závisí chromatické číslo v podstatě jen na počtu hran $m$. Odhad uvedeme bez důkazu.

**Věta 8.10.** *Nechť graf $G$ má $n$ vrcholů a $m$ hran. Potom $\chi(G) \leq 1 + \sqrt{2m(n-1)/n}$.*

Když říkáme „pro velké grafy“, rozumíme tím grafy s velkým počtem vrcholů. Horní odhad pak můžeme zjednodušit. Přestože pro každou pevnou hodnotu $n$ platí $(n-1)/n < 1$, tak $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$. Pro velké grafy stačí psát $\chi(G) \leq 1 + \sqrt{2m(n-1)/n} < 1 + \sqrt{2m}$, neboť číselně vychází (celočíselný!) zjednodušený odhad pro většinu grafů stejně.

Následující odhad je sice velmi jednoduchý, obecně však není příliš dobrý.

**Věta 8.11.** *Délku nejdelší cesty v libovolném grafu $G$ označme $m(G)$. Platí $\chi(G) \leq 1 + m(G)$.*

*Důkaz.* Označíme $V_0$ největší nezávislou množinu vrcholů grafu $G$. Dále označíme $V_1$ největší nezávislou množinu vrcholů grafu $G - V_0$. Podobně označíme $V_j$ největší nezávislou množinu vrcholů grafu

$$G - \bigcup_{i=0}^{j-1} V_i.$$

Po konečném počtu kroků dostaneme rozklad

$$V(G) = \bigcup_{i=0}^{k} V_i$$

pro nějaké přirozené číslo $k$. Vrcholy v každé z množin $V_j$ můžeme obarvit stejnou barvou, neboť jsou nezávislé. Graf $G$ proto můžeme dobře obarvit $k+1$ barvami.

Zbývá ukázat, že $k + 1 \leq 1 + m(G)$. Nejprve v grafu $G$ najdeme cestu $v_0, v_1, \ldots, v_k$ délky $k$ takovou, že $v_i \in V_i$. Označme $v_k$ libovolný vrchol v množině $V_k$. Vrchol $v_k$ je jistě sousední s některým vrcholem v množině $V_{k-1}$. Pokud by nebyl sousední s žádným vrcholem z $V_{k-1}$, byla by $V_{k-1} \cup \{v_k\}$ nezávislá množina. Označíme $v_{k-1}$ libovolný z vrcholů v množině $N(v_k) \cap V_{k-1}$. Dále najdeme vrchol $v_{k-2} \in V_{k-2}$, který je sousední s vrcholem

$v_{k-1}$. Podobně postupujeme až v množině $V_0$ nejdeme vrchol sousední s vrcholem $v_1$. Vrcholy $v_0, v_1, \ldots, v_k$ tvoří cestu v $G$, protože každá z hran $v_{i-1}v_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$ patří do $E(G)$. Našli jsme cestu délky $k$ v grafu $G$, a proto je jistě $k \leq m(G)$ a také $k+1 \leq 1+m(G)$. Víme již, že v grafu $G$ existuje dobré vrcholové barvení $k+1$ barvami, a proto

$$\chi(G) \leq k+1 \leq 1+m(G).$$

Tím je tvrzení věty dokázáno. □

**Otázka:** Jak se v důkazu Věty 8.11. využívá předpoklad, že množina $V_i$ je *největší* nezávislá množina?

**Souvislost s multipartitními grafy**

V kapitole 1. jsme na straně 47 zavedli pojem bipartitního grafu, ve kterém byla vrcholová množina rozložena na dvě nezávislé množiny. Tuto definici můžeme zobecnit.

**Definice Multipartitní graf**

*Kompletní $r$-partitní* graf $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ je graf, jehož vrcholová množina $V$ se skládá z $r$ navzájem disjunktních neprázdných podmnožin $V_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, kde $r \geq 1$, $|V_i| = n_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, r$, a hranová množina $E$ obsahuje právě ty hrany, jejichž koncové vrcholy leží v různých množinách $V_i$ a $V_j$, kde $i \neq j$. Každý podgraf $(V, E')$, kde $E' \subseteq E$, úplného $r$-partitního grafu se nazývá *$r$-partitní graf*, případně *multipartitní graf*.

Multipartitní grafy úzce souvisí s chromatickým číslem grafu. Na $r$-partitní grafy je možno pohlížet, jako na grafy dobře obarvené $r$ barvami. Všimněte si, že obecně v nerovnosti $\chi(G) \leq r$, kde $G$ je nějaký $r$-partitní graf, nemusí nastat rovnost. Například každý strom $T_n$ je současně multipartitní graf s $n$ partitami a přitom $\chi(T_n)$ není větší než 2, neboť $T_n$ je současně bipartitní. Naproti tomu pro kompletní multipartitní grafy platí $\chi(K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}) = r$ (proč?).

## Cvičení

*8.3.1. Popište všechny barevně 3-kritické grafy.*

*8.3.2. Ukažte, že barevně $k$-kritický graf a) je souvislý, b) neobsahuje artikulaci.*

*8.3.3. Dokažte Větu 8.11. indukcí.*

*8.3.4. Pro libovolné přirozené číslo $n \geq 3$ najděte příklad grafu s $n$ vrcholy, pro který je a)$^\heartsuit$ $\chi(G) < 1+m(G)$, b) $\chi(G) = 1+m(G)$, kde $m(G)$ je délku nejdelší cesty v grafu $G$.*

*8.3.5. Ukažte, že jestliže libovolné dva liché cykly grafu $G$ mají společný vrchol, potom $\chi(G) \leq 5$.*

*8.3.6. Najděte alespoň čtyři nekonečné třídy barevně $k$-kritických grafů pro nějakou hodnotu $k$.*

*8.3.7. Najděte nekonečnou třídu barevně $k$-kritických grafů pro každé přirozené číslo $k > 1$.*

*8.3.8. Mějme graf $G$ s maximálním stupněm 3. Dokažte, že jeho vrcholy lze obarvit dvěma barvami (ne nutně dobrým barvením) tak, že nevznikne jednobarevná cesta se třemi vrcholy.*

*8.3.9. Dokažte nebo vyvraťte: $\chi(G \cup H) \leq \chi(G) + \chi(H)$.*

*8.3.10. Existují takové dva bipartitní grafy $G$ a $H$, že $\chi(G \cup H) > \chi(G) + \chi(H)$?*

*8.3.11. Dokažte nebo vyvraťte: mějme dva souvislé grafy $G$ a $H$, potom $\chi(G \cup H) \leq \chi(G) + \chi(H)$.*

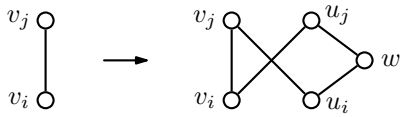
## 8.4. Doplňková témata

### Mycielskián

Mycielskián grafu $G$ je graf (někdy označovaný jako $\mu(G)$), který vznikne konstrukcí z grafu $G$ vhodným přidáním vrcholů a hran. Pomocí Mycielskiánu lze zkonstruovat graf bez trojúhelníků s libovolně vysokým chromatickým číslem.

**Konstrukce**

Mějme libovolný graf na $n$ vrcholech $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Mycielskián grafu $G$ je graf $\mu(G)$, který vznikne z grafu $G$ přidáním dalších vrcholů $u_1, u_2, \ldots, u_n$ a vrcholu $w$ a přidáním všech hran $u_i w$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a za každou hranu $v_i v_j$ grafu $G$ přidáme ještě hrany $v_i u_j$ a $v_j u_i$ (Obrázek 8.7.).




Obrázek 8.7.: *Mycielského konstrukce.*

Všimněte si, že původní graf $G$ je podgrafem grafu $\mu(G)$ a platí $|V(\mu(G))| = 2|V(G)| + 1$ a $|E(\mu(G))| = 3|E(G)| + |V(G)|$ hran (Cvičení 8.4.2.). Grötzschův graf na Obrázku 9.18. je Mycielskiánem cyklu $C_5$. Na Obrázku 8.8. je Mycielskián cyklu grafu $C_7$.

Obrázek 8.8.: *Graf $C_7$ a jeho Mycielskián $\mu(C_7)$.*

Klíčovým tvrzením je následující věta. Ukazuje, jak opakováním konstrukce Mycielskiánu sestrojit graf s libovolně velkým chromatickým číslem.

**Věta 8.12.** *Mycielskián každého $k$-chromatického grafu bez trojúhelníků je $(k+1)$-chromatický graf bez trojúhelníků.*

*Důkaz.* Mějme graf $G$ bez trojúhelníků s dobrým vrcholovým $k$-barvením $f$. Sestrojíme jeho Mycielskián $\mu(G)$. Vrcholy grafu $G$ označíme $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a dále vrcholy přidané v konstrukci Mycielskiánu $\mu(G)$ označíme $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ a $w$.

Nejprve ukážeme, že graf $\mu(G)$ neobsahuje trojúhelníky. Protože $N_{\mu(G)}(w) = U$ a vrcholy v množině $U$ jsou v grafu $\mu(G)$ nezávislé, tak vrchol $w$ nemůže ležet v žádném trojúhelníku grafu $\mu(G)$. Současně pro každý případný trojúhelník obsahující vrchol $u_i$ musí platit $N_{\mu(G)}(u_i) \subseteq V(G)$ a současně podle konstrukce grafu $\mu(G)$ je $N_{\mu(G)}(u_i) = N_{\mu(G)}(v_i)$. To však znamená, že bychom našli trojúhelník i v grafu $G$ (indukovaném podgrafu na vrcholech $v_1, v_2, \ldots, v_n$), což podle předpokladu není možné.

Zbývá ukázat, že graf $\mu(G)$ je $(k+1)$-chromatický. Je zřejmé (Obrázky 8.7. a 8.8.), že $\chi(\mu(G)) \leq k+1$, neboť obarvíme-li vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ stejně jako v grafu $G$, pro vrcholy $u_1, u_2, \ldots, u_n$ položíme $f(u_i) = f(v_i)$ a vrchol $w$ obarvíme barvou $k+1$, dostaneme dobré $(k+1)$-barvení grafu $\mu(G)$.

Dále nepřímo ukážeme, že $\chi(\mu(G)) = k+1$. Vskutku, kdyby na nějaké dobré vrcholové barvení $g$ grafu $\mu(G)$ stačilo $k$ barev, tak bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $g(w) = k$. Nyní barva $k$ jistě není barva žádného vrcholu v $U$ a ukážeme, jak případně přebarvit vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak, abychom pro ně nepoužili barvu $k$. Označme $X$ množinu všech vrcholů v $V(G)$, které jsou obarveny barvou $k$. Přebarvíme každý vrchol $v_i \in X$ tak, aby $g'(v_i) = g(u_i)$, a pro $v_j \in V(G) \setminus X$ ponecháme obarvení $g'(v_j) = g(v_j)$. Ukážeme, že $g'$ je dobré $(k-1)$-barvení grafu $G$. Množina $X$ obsahuje nezávislé vrcholy (v barvení $g$ jsou obarveny stejnou barvou), a proto stačí ověřit, že $g'(v_i) \neq g'(v_j)$, kde $v_i \in X$ a $v_j \in V(G) \setminus X$. Z konstrukce Mycielskiánu $\mu(G)$ však víme, že každá hrana $v_i v_j$ grafu $G$ odpovídá nějaké hraně $v_i u_j$ grafu $\mu(G)$ a jelikož vrcholy $v_i$ a $u_j$ mají různou barvu v barvení $g$, tak i vrcholy $v_i$ a $v_j$ mají různou barvu v barvení $g'$. Dostali jsme tak dobré $(k-1)$-barvení $g'$ grafu $G$ a graf $G$ není $k$-chromatický. Tím je (nepřímý) důkaz ukončen. □

## Odkazy:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Mycielskian

# Cvičení

*8.4.1. Ukažte, že pro libovolné přirozené číslo $k$ najdeme takový graf $G$, že $\chi(G) \geq c(G) + k$.*

*8.4.2. Ukažte, že pro libovolný graf $G$ platí a) $G$ je podgrafem grafu $\mu(G)$, b) $|V(\mu(G))| = 2|V(G)|+1$ a $|E(\mu(G))| = 3|E(G)| + |V(G)|$.*

### Chromatický polynom

V roce 1912 George David Birkhoff zavedl chromatický polynom jako možný nástroj, pro důkaz Věty o čtyřech barvách (Věta 9.13.).

**Definice** *Chromatický polynom* grafu $G$ je polynom v proměnné $k$, jehož hodnota vyjadřuje, kolik různých dobrých $k$-barvení má daný graf $G$, jestliže rozlišujeme vrcholy. Chromatický polynom grafu $G$ značíme $P(G; k)$.

Obecně je možno zavést „chromatickou funkci“. Ukazuje se však, že funkce $f(k)$, jejíž funkční hodnoty odpovídají počtu dobrých obarvení pomocí *nejvýše* $k$ barev, bude vždy polynom. Například kompletní graf $K_3$ má

- 0 dobrých obarvení jednou barvou,
- 0 dobrých obarvení dvěma barvami,
- 6 dobrých obarvení třemi barvami, proto $P(K_3; 3) = 6$.

a proto chromatický polynom grafu $K_3$ prochází body o souřadnicích $[1, 0]$, $[2, 0]$, $[3, 6]$. Snadno ověříme, že chromatický polynom grafu $K_3$ je

$$P(K_3; k) = k(k-1)(k-2).$$

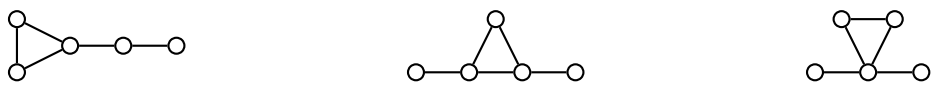
Chromatický polynom je zobecněních chromatického čísla, neboť pro každý graf $G$ je $\chi(G)$ rovno nejmenšímu přirozenému číslu, pro které má polynom $P(G; , k)$ nenulovou hodnotu. Z chromatického polynomu je navíc možno získat informaci o počtu dobrých obarvení daným počtem barev.

Pro každý graf lze chromatický polynom najít, avšak obecný postup je poměrně komplikovaný. Dva možné přístupy konstrukce chromatického polynomu, přímá konstrukce a rekurzivní postup, jsou diskutovány například v knize [W].

Zajímavé je, že různé grafy mohou mít stejný chromatický polynom. Například grafy na Obrázku 8.9. mají stejný chromatický polynom

$$P(G_1; k) = P(G_2; k) = P(G_3; , k) = k(k-1)^3(k-2).$$

To znamená, že chromatický polynom není možno použít při rozhodování, zda dané dva grafy jsou izomorfní. Pokud však dva grafy mají různé chromatické polynomy, lze tento argument využít k důkazu, že dva grafy izomorfní nejsou.



Obrázek 8.9.: *Grafy $G_1$, $G_2$ a $G_3$ se stejným chromatickým polynomem.*

Bez důkazu uvedeme větu, která říká, že stupeň chromatického polynomu daného grafu $G$ je vždy roven počtu vrcholů grafu $G$.

**Věta 8.13. Stupeň chromatického polynomu**
*Mějme graf $G$ s $n$ vrcholy. Chromatický polynom $P(G; k)$ je stupně $n$, vedoucí koeficient polynomu je roven 1 a absolutní člen je roven 0.*

### Odkazy:

- https://en.wikipedia.org/wiki/Chromatic_polynomial
- http://mathworld.wolfram.com/ChromaticPolynomial.html

## Cvičení

*8.4.3.♡ Určete chromatický polynom doplňku kompletního grafu $\overline{K}_n$.*

*8.4.4. Určete chromatický polynom cesty $P_3$.*

*8.4.5. Určete chromatický polynom kompletního grafu $K_n$.*

*8.4.6. Určete chromatický polynom stromu s $n$ vrcholy.*

*8.4.7.♡ Mějme graf $G$ s komponentami $L_1, L_2, \ldots, L_m$. Ukažte, že chromatický polynom grafu $G$ je součinem chromatických polynom jeho komponent.*

### Náhodné grafy

Studium náhodných grafů iniciovali nezávisle na sobě Paul Erdős s Alfrédem Rényim a Edgar Gilbert. Náhodný graf obvykle chápeme jako graf s pevně zvolenou množinou $n$ vrcholů, do kterého jsou přidávány hrany s pravděpodobností dle nějaké distribuční funkce.

Existuje několik různých přístupů. Můžeme například každou z $\binom{n}{2}$ hran grafu postupně přidávat se stejnou pravděpodobností $p$. Pochopitelně existuje $2^{\binom{n}{2}}$ různých takových postupů, řada z nich dává navzájem izomorfní grafy. Dostaneme tak model náhodného grafu označovaný jako $G(n,p)$.

Jinou možností je například do grafu s $n$ vrcholy přidat pevně zvolený počet $m$ hran, $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$, přičemž každý takový graf považujeme za stejně pravděpodobný. Dostaneme tak model náhodného grafu označovaný jako $G(n,m)$.

V dalším textu budeme pracovat s prvním modelem $G(n,p)$. Příslušný konečný pravděpodobnostní prostor $\mathcal{G}_n$ bude mít $2^{\binom{n}{2}}$ různých prvků a každý bude mít stejnou pravděpodobnost $2^{-\binom{n}{2}}$, pravděpodobnostní prostor $\mathcal{G}_n$ je proto uniformní. Připomínáme, že různé prvky tohoto pravděpodobnostního prostoru mohou být izomorfní grafy.

Pro náhodné grafy má smysl studovat řady vybraných vlastností. Ukážeme, že náhodný graf téměř jistě není biparitní.

**Lemma 8.14.** *Náhodný graf $G(n,p)$ téměř jistě není bipartitní.*

*Důkaz.* Vrcholovou množinu bipartitního grafu lze rozložit na dvě disjunktní podmnožiny $U$ a $W$ tak, že každá hrana grafu má oba koncové vrcholy v různých množinách. Pro každou množinu $U$ označíme $B_U$ jev, že všechny hrany daného grafu mají jeden koncový vrchol v $U$ a druhý ve $W = V \setminus U$. Dále označíme-li $k = |U|$, tak existuje právě $k(n-k)$ dvojic vrcholů, které mají oba koncové vrcholy v různých množinách. Proto mezi všemi $2^{\binom{n}{2}}$ náhodnými grafy existuje právě $2^{k(n-k)}$ grafů, které nemají v rámci množiny $U$ ani $W$ žádnou hranu. Platí $P(B_U) = 2^{k(n-k)-\binom{n}{2}}$. Maximální hodnota $P(B_U)$ nastane pro $k = n/2$, a proto můžeme psát $P(B_U) \leq 2^{\frac{n}{2}(n-\frac{n}{2})-\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n^2}{4}-\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{-\frac{n(n-2)}{4}}$. Jevy $B_U$ obecně nejsou pro různé množiny $U$ disjunktní, ale určitě můžeme psát

$$P(B) \leq \sum_{U \subseteq V} P(B_U) \leq 2^n \cdot 2^{-\frac{n(n-2)}{4}} = 2^{\frac{-n(n-6)}{4}}.$$

To znamená, že pro rostoucí $n$ hodnota $P(B)$ klesá a pro $n \to \infty$ je $P(B) \to 0$. Náhodný graf proto téměř jistě není bipartitní. □

Podobně lze ukázat, že náhodný graf je téměř jistě souvislý (Cvičení 8.4.10.).

Důkazy týkající se náhodných grafů zpravidla vyžadují vhodný pohled, šikovně zvolený odhad nebo jinou vtipnou úvahu. Hotový důkaz je snadné pochopit, avšak nebývá snadné jej objevit.

### Odkazy:

- https://en.wikipedia.org/wiki/Random_graph

## Cvičení

*8.4.8.♡ Ukažte, že pro chromatické číslo náhodného grafu $G(n,p)$ platí $\chi(G(n,p)) \geq 3$.*

*8.4.9. Ukažte, že skoro každý náhodný graf $G(n,p)$ obsahuje trojúhelník.*

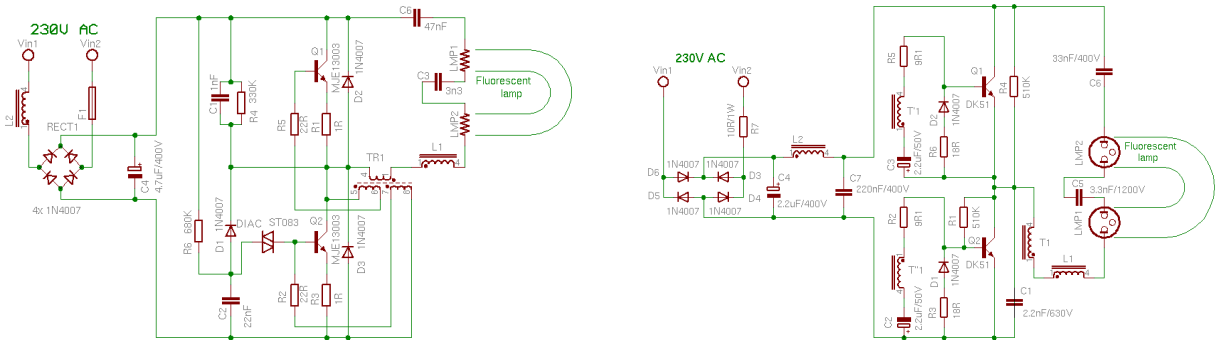
*8.4.10. Ukažte, že skoro každý náhodný graf $G(n,p)$ je souvislý.*

# Kapitola 9. Planární grafy

V této kapitole se budeme věnovat nejen struktuře grafu, ale i různým nakreslením daného grafu. Ukážeme, že takové nakreslení, ve kterém se hrany zbytečně „nekříží“ je nejen přehlednější, ale je navíc motivováno praktickými aplikacemi.

**Návrh tištěných spojů**

Přirozeným požadavkem při navrhování tištěných spojů je, aby v návrhu bylo co nejméně nevodivých křížení. Taková místa křížení je třeba „přemostit“ drátem a nebo je potřeba použít vícevrstevný tištěný spoj. Schéma na Obrázku 9.1. vpravo obsahuje jediné křížení, kterému je navíc možné se vyhnout[25]. Schéma vlevo obsahuje celou řadu nevodivých křížení a na první pohled rozhodně není zřejmé, zda je možno schéma překreslit bez křížení hran. Ukážeme si, jak využít nástrojů teorie grafů při návrhu a rozboru tištěných spojů. Pěkné využití Věty o čtyřech barvách, jednoho z nejznámějších výsledků teorie grafů, pro hledání výrobních vad procesorů je podrobně popsáno na straně 186.




Obrázek 9.1.: *Dvě různá schémata tištěných spojů úsporných zářivek.*

**Otázka:** Je možno nakreslit schémata na Obrázku 9.1. tak, aby se vodiče nekřížily?

**Plyn, elektřina, voda**

Na konci ulice jsou připraveny společné přípojky k základním inženýrským sítím: elektřině, vodě a plynu. Naším úkolem je naplánovat výkopové práce pro podzemní zapojení tří domů v ulici tak, aby každý dům byl zapojen ke všem třem přípojkám, žádný výkop nesmí být společný pro více vedení a dokonce výkopy žádných dvou sítí by se neměly křížit. Jak navrhnout trasy jednotlivých výkopů? Ukážeme, že tomuto požadavku nelze vyhovět.

**Tři domy a tři studny**

Z rekreační matematiky je známa analogická úloha, která také souvisí s kreslením grafu do roviny:

Podle pověsti žily v Temném hvozdu tři čarodějnice. Každá bydlela ve své vlastní sluji a každá potřebovala k provozování své živnosti vodu z každé ze tří studánek: s živou vodou, s mrtvou vodou a s pitnou vodou. Jenomže cestou ke studánkám se čarodějnice nesmí potkat, ani zkřížit vyšlapanou cestičku jiné čarodějnice. Ptáme se, jak mohla vypadat mapa lesa se slujemi, studnami a cestičkami? Ukážeme, že taková mapa neexistuje (nelze ji nakreslit na čtvrtku papíru).

## 9.1. Rovinné a planární grafy

V dalším textu budeme pracovat s pojmem křivky v rovině, v některé literatuře se jí říká *oblouk*. Vystačíme s intuitivní definicí křivky. O něco korektněji můžeme říci, že máme-li nějaké spojité zobrazení $\gamma : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}^2$, tak *křivka* je podmnožina roviny $\mathbb{R}^2$ ve tvaru

$$k = \gamma(\langle 0,1\rangle) = \{\gamma(t) : t \in \langle 0,1\rangle\}\,.$$

[25] V usměrňovači s Graetzovým zapojením se obvykle přívody diod zakreslují tak, že se vodiče kříží v nevodivém spojení. Tomuto křížení se při samotné realizaci tištěného spoje snadno vyhneme vhodným umístěním kontaktu zdroje napětí.

Koncovým bodům $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$ křivky $k$ budeme říkat *výchozí* a *koncový* bod. Precizní vybudování není tak jednoduché, jak by se na první pohled mohlo zdát. Pečlivé vybudování pojmu křivky a dalších příbuzných pojmů spadá do matematické disciplíny topologie. Všimněte si, že uvedená definice pěkně popisuje proces kreslení křivky. Budeme-li proměnnou $t$ chápat jako čas v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, tak $\gamma(t)$ popisuje pohyb hrotu tužky podél křivky mezi výchozím bodem $\gamma(0)$ a koncovým bodem $\gamma(1)$. Například, je-li zobrazení $\gamma$ injektivní, tak křivka nikde neprotíná sama sebe.

Připomeňme[26], že graf můžeme chápat nejen algebraicky jako uspořádanou dvojici množiny vrcholů a množiny hran (některých dvouprvkových podmnožin množiny vrcholů), ale také jako diagramy (nakreslení grafu v rovině), kde vrcholy grafu odpovídají různým bodům v rovině a každá hrana $uv$ odpovídá nějaké křivce mezi body, které odpovídají vrcholům $u$ a $v$. Nyní můžeme vyslovit následující definici.

**Definice** Graf je *rovinný*, jestliže máme dáno jeho nakreslení do roviny takové, že žádné dvě křivky, které odpovídají hranám, nemají společné body kromě koncových bodů (vrcholů). Dále graf je *planární*, jestliže existuje jeho rovinné nakreslení (tj. jestliže je možné jej zakreslit do roviny tak, aby žádné dvě hrany neměly jiné společné body, než koncové.

Všimněte si, že rovinnost je vlastnost nakreslení grafu, zatímco planarita je vlastnost grafu. Každý graf, který má rovinné zakreslení, je současně planární. Avšak i planární graf můžeme zakreslit tak, že nakreslení není rovinné (Obrázek 9.2.).

Obrázek 9.2.: *Graf $K_5 - e$ jako rovinný graf i jako planární graf.*

V další podkapitole ukážeme, že graf $K_5$ není planární. Pro důkaz tohoto (a některých jiných) tvrzení užijeme dva zcela odlišné přístupy. V kapitole 9.2. se zaměříme na přístup s využitím pojmů z topologie a v kapitole 9.3. se budeme věnovat témuž s využitím algebraického přístupu. Protože $K_5$ bez jedné hrany je planární graf (Obrázek 9.2. vlevo), tak $K_5$ je nejmenší graf, který není planární (Cvičení 9.1.4.).

Obrázek 9.3.: *Graf $K_5$ a nakreslení grafu $K_5$ s jediným křížením hran.*

**Otázky:**

- Najdete menší graf než $K_5$, který není rovinný?
- Najdete menší graf než $K_5$, který není planární?

## Cvičení

*9.1.1. Dokažte nebo vyvraťte: Pro každé přirozené číslo $n$ existuje a) 4-pravidelný planární graf, b) 5-pravidelný planární graf, které mají alespoň $n$ vrcholů. Existují takové souvislé grafy?*

[26] O zadávání grafů jsme psali v kapitole 1.1. na straně 47.

*9.1.2.*$^{\heartsuit}$ *Ukažte, že graf $K_{3,3} - e$ je planární.*

*9.1.3. Dokažte, že každý podgraf planárního grafu je planární.*

*9.1.4. Víme, že grafy $K_5$ a $K_{3,3}$ nejsou planární. Ukažte, že $K_5$ je nejmenší neplanární graf co do počtu vrcholů a $K_{3,3}$ je nejmenší neplanární graf co do počtu hran.*

*9.1.5. Triangulací roviny rozumíme každý rovinný 2-souvislý graf (tj. máme nakreslení grafu), jehož každá oblast je ohraničena třemi hranami (cyklem $C_3$). Najděte triangulaci roviny pro libovolný počet $v$ vrcholů, kde $v \geq 3$.*

*9.1.6. Jsou každé dvě triangulace roviny se stejným počtem vrcholů izomorfní? Výsledek dokažte.*

*9.1.7. Najděte příklad rovinného grafu s dvanácti vrcholy, který má průměr 3.*

## 9.2. Topologický přístup

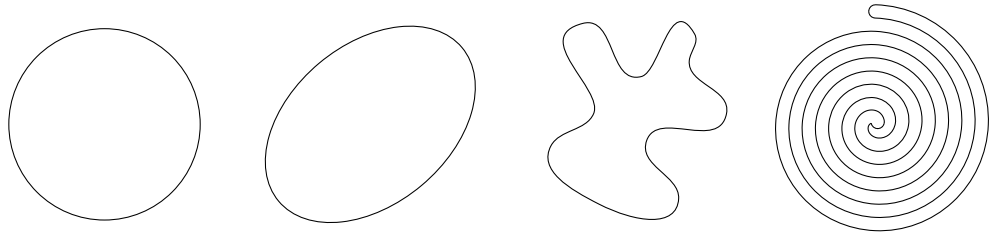
Zavedeme několik pojmů z topologie, které souvisí s kreslením grafů do roviny. Není naším cílem zavést všechny pojmy podrobně, některé pojme považujeme za klasické a známé, například *okolí bodu* v rovině nebo *protínání* či *průsečík* křivek.

**Definice Jordanovská křivka**

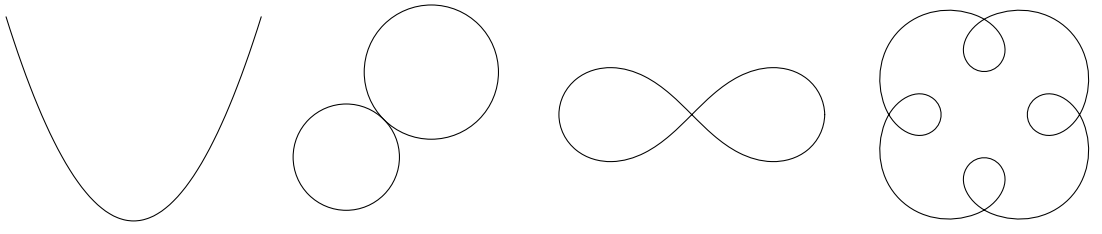
*Uzavřená jordanovská křivka* nebo stručně *jordanovská křivka* je taková křivka v rovině, která má totožný výchozí a koncový bod (vrchol) a jinak neprotíná sama sebe.

Chápeme-li křivku v rovině jako spojité zobrazení $\gamma : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}^2$, tak jordanovská křivka je na intervalu $(0, 1)$ injektivní a současně platí $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Kružnice, elipsa a další křivky na Obrázku 9.4. jsou jordanovské křivky. Přímka ani parabola nejsou jordanovské křivky, protože nejsou uzavřené. Lemniskáta[27] či „osmička“ z dvojice dotýkajících se kružnic (Obrázek 9.5.) také nejsou jordanovské křivky, neboť protínají samy sebe.



Obrázek 9.4.: *Jordanovské křivky.*



Obrázek 9.5.: *Křivky, které* nejsou *jordanovské.*

[27] O lemniskátě je psáno na straně 198.

**Oblasti roviny**

Každá jordanovská křivka dělí rovinu na dvě části, vnitřní a vnější, které má smysl odlišit. Tento pojem si zavedeme formálně.

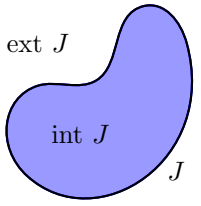
**Definice Oblast roviny**

*Otevřená množina* je taková podmnožina $A \subseteq \mathbb{R}^2$, že pro každý bod $p \in A$ platí, že existuje takové jeho okolí $\mathcal{O}$, že $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{A}$. *Oblast roviny* je taková otevřená množina $B$ roviny $\mathbb{R}^2$, že pro každé dva body $p, q \in B$ najdeme křivku $k \subset B$ s koncovými body $p, q$.

Všimněte si, že u křivek na Obrázku 9.4. je na rozdíl od křivek na Obrázku 9.5. zřejmé, co je vnitřní a co vnější část, ačkoliv v některých případech to nemusí být vidět na první pohled (Obrázek 9.4. vpravo). V následující definici tuto vlastnost popíšeme formálně (Obrázek 9.6.).

**Definice Interiér a exteriér jordanovské křivky**

Uzavřená jordanovská křivka $J$ rozděluje rovinu na dvě oblasti. Tyto otevřené množiny nazýváme *interiér* $J$ (*vnitřek* $J$) a *exteriér* $J$ (*vnějšek* $J$) a značíme je $\operatorname{int} J$, resp. $\operatorname{ext} J$. Uzávěrem uvedených množin budeme rozumět příslušnou oblast včetně hraniční křivky $J$. Uzávěr interiéru značíme $\operatorname{Int} J$ a uzávěr exteriéru $\operatorname{Ext} J$.




Obrázek 9.6.: *Interiér a exteriér jordanovské křivky $J$.*

Všimněte si, že zatímco $\operatorname{int} J$ jordanovské křivky $J$ je na Obrázku 9.6. vyznačen modrou a $\operatorname{ext} J$ bílou barvou, tak $\operatorname{Int} J$ a $\operatorname{Ext} J$ obsahují navíc černě nakreslenou křivku $J$.

**Otázky:**

- Popište $\operatorname{int} J \cap \operatorname{ext} J$.
- Popište $\operatorname{Int} J \cap \operatorname{Ext} J$.

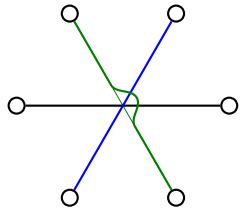
**Věta 9.1. Věta o jordanovských křivkách**

*Nechť $J$ je nějaké jordanovská křivka v rovině a nechť $p$, $q$ jsou nějaké body takové, že $p \in \operatorname{int} J$ a $q \in \operatorname{ext} J$. Potom každá křivka s koncovými body $p$, $q$ protíná křivku $J$ v alespoň jednom bodě.*

Jistě není těžké věřit platnosti tvrzení Věty 9.1. Důkaz vynecháme, neboť není jednoduchý a vyžaduje vybudování dalších pojmů a pečlivé zdůvodnění, které je možno najít v učebnicích topologie.

Můžeme předpokládat, že v libovolném nakreslení mají každé dvě hrany nejvýše jedno křížení. Případný větší počet křížení v nakreslení snadno odstraníme postupem naznačeným na Obrázku 9.7. vlevo. Na libovolně malém okolí průsečíků můžeme „přepojit“ křivky hran tak, aby se počet křížení snížil. Podobně nahlédneme, že dvě závislé hrany (mají společný koncový vrchol) se nemusí kříži vůbec. Na Obrázku 9.7. vpravo je ukázáno, jak je možno takové křížení eliminovat.

Obrázek 9.7.: *Převod více křížení na nejvýše jedno.*



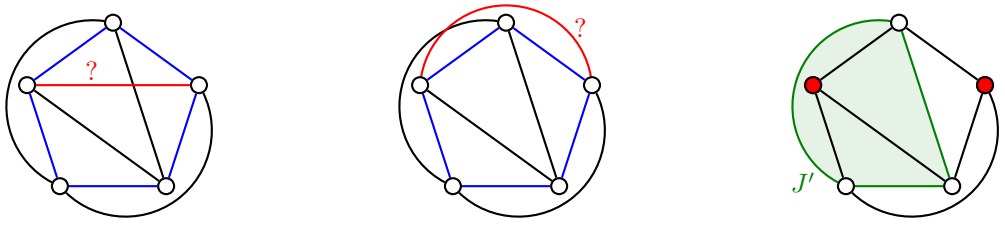
Obrázek 9.8.: *Odstranění křížení více než dvou hran.*

Navíc předpokládáme, že v žádném bodě se nekříží více než dvě hrany. Případný větší počet křížících se hran v nakreslení eliminujeme postupem naznačeným na Obrázku 9.8. Avšak v grafu na Obrázku 9.9. není možné zabránit křížení všech hran současně.

S využitím právě zavedených pojmů ukážeme, že graf $K_5$ nelze v rovině zakreslit tak, aby se žádné dvě hrany nekřížily.

**Věta 9.2.** *Graf $K_5$ není planární.*

*Důkaz.* Graf $K_5$ jistě obsahuje cyklus $C_5$, který obsahuje všechny vrcholy (na Obrázku 9.9. vlevo a uprostřed je vyznačen modře). Uzavřenou jordanovskou křivku tohoto cyklu $C_5$ označíme $J$. Ze zbývajících pěti hran můžeme bez protínání nakreslit vždy nejvýše dvě v $\mathrm{int}\, J$ a nejvýše dvě v $\mathrm{ext}\, J$, protože mezi pěti vrcholy cyklu najdeme nejvýše tři vrcholy tak, aby mezi nimi byly dvě nesousední dvojice vrcholů. Bez újmy na obecnosti dostaneme graf na Obrázku 9.9. vpravo, ve kterém najdeme jordanovskou křivku $J'$ (na obrázku je vyznačena zeleně). Abychom nakreslili zbývající hranu, musíme spojit oba červené vrcholy, z nichž jeden leží v interiéru křivky $J'$ a druhý v exteriéru $J'$. To podle Věty 9.1. není možné. Proto zbývající hrana (vlevo a uprostřed je vyznačena červeně) protne vždy alespoň jednu ze stávajících „úhlopříčných“ hran, případně nějaké hrany cyklu $C_4$ (křivky $J$). □




Obrázek 9.9.: *Neplanárnost grafu $K_5$.*

Analogicky se ukáže následující věta. Důkaz je ponechán jako Cvičení 9.2.1.

**Věta 9.3.** *Graf $K_{3,3}$ není planární.*

**Příklad 9.1. Elektřina, voda a plyn**

Nyní snadno zdůvodníme, že motivační úloha ze strany 175 nemá řešení. Pokud by řešení existovalo, tak plán výkopových prací by odpovídal rovinnému nakreslení grafu $K_{3,3}$, což by byl spor s Větou 9.3.

**Příklad 9.2. Tři domy a tři studny**

Nyní snadno také zdůvodníme, že ani druhá motivační úloha ze strany 175 nemá řešení. Pokud by řešení existovalo, tak mapa Temného hvozdu by odpovídala rovinnému nakreslení grafu $K_{3,3}$, což podle Věty 9.3. není možné.

**Otázka:** Existuje řešení úlohy „Elektřina, voda, plyn“ nebo „Tři domy a tři studny“ pokud se neomezíme na grafy v rovině?

**Rozdělení grafu**

Snadno nahlédneme, že nahradíme-li v grafu $G$ nějakou hranu cestou nebo naopak indukovaný podgraf izomorfní s cestou délky alespoň 2 nahradíme jedinou hranou, tak nový graf $G'$ dopadne vzhledem k planárnosti stejně. Následující definice umožní popsat tuto vlastnost formálně.

**Definice Rozdělení grafu**

Mějme dán graf $G$ s hranou $uv$ a vrchol $x$, který do grafu $G$ nepatří. Řekneme, že graf $G'$ vznikne z grafu $G$ *rozdělením hrany* $uv$, jestliže na hranu $uv$ přidáme nový vrchol $x$, přesněji $V(G') = V(G) \cup \{x\}$ a $E(G') = E(G) \setminus \{uv\} \cup \{ux, xv\}$. Dále řekneme, že graf $G'$ je *rozdělením grafu* $G$, jestliže $G'$ vznikne z grafu $G$ jednou nebo postupně několika operacemi rozdělení hrany.

V literatuře se rozdělení grafu někdy říká *subdivize* grafu. Všimněte si, jak souvisí rozdělení grafu a jeho nakreslení. Nahradíme-li některé hrany cestami, jejichž vnitřní vrcholy jsou stupně 2, tak na rovinnost výsledného nakreslení to nemá vliv. Máme-li planární graf, tak rozdělení tohoto grafu je opět planární graf a naopak (Cvičení 9.2.2.). Pěkným přirovnáním je, že nové vrcholy navlékáme na hrany jako korálky (Obrázek 9.10.).

Obrázek 9.10.: *Graf $G$ s vyznačenou hranou $uv$ a jeho rozdělení $G'$ s přidaným vrcholem $x$.*

Neplanárních grafů existuje nekonečně mnoho. Podle následující věty, kterou dokázal polský matematik Kazimierz Kuratowski v roce 1930, platí překvapivě jednoduché tvrzení: každý neplanární graf musí obsahovat alespoň jeden ze dvou podgrafů ($K_5$ nebo $K_{3,3}$) nebo jejich rozdělení, které neplanaritu způsobí.

**Věta 9.4. Kuratowského věta**
*Graf $G$ je planární právě tehdy, když neobsahuje jako podgraf žádné rozdělení grafu $K_5$ ani $K_{3,3}$.*

*Důkaz.* Jedná se o tvrzení ve tvaru ekvivalence, je nutno ukázat obě implikace.
„⇒“ Důkaz první implikace je zřejmý. Postupujeme nepřímo. Jestliže graf $G$ obsahuje jako podgraf rozdělení grafu $K_5$ nebo $K_{3,3}$, tak toto rozdělení není planární a po přidání zbývajících vrcholů a hran grafu $G$ výsledný graf zůstane neplanární.
„⇒“ Naproti tomu důkaz druhé implikace je komplikovaný, a proto jej vynecháme. □

## Cvičení

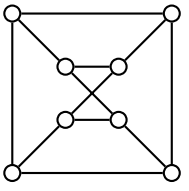
*9.2.1. Dokažte Větu 9.3. podobným způsobem jako byla dokázána Věta 9.2.*

*9.2.2. Dokažte, že každé rozdělení neplanárního grafu je neplanární.*

*9.2.3. Určete všechny planární úplné tripartitní grafy.*

*9.2.4. Určete všechny planární úplné $r$-partitní grafy pro $r > 3$.*

*9.2.5. Je graf $G$ na Obrázku 9.11. planární?*



*Obrázek 9.11.: Graf $G$.*

*9.2.6. Je Möbiův žebřík planární graf?*

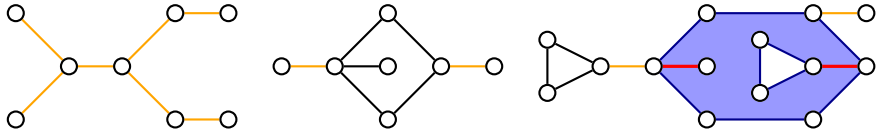
*9.2.7. Ukažte, že Petersenův graf (Obrázek 4.10.) není planární.*

*9.2.8.* Ukažte, že každý 3-souvislý graf s alespoň šesti vrcholy, který obsahuje rozdělení grafu $K_5$, obsahuje také rozdělení grafu $K_{3,3}$.*

*9.2.9.♡ Mějme graf $G$, který vznikne z grafu $K_4$ jedním rozdělením jedné hrany. Ukažte, že graf $G$ je třídy 2 vzhledem k Vizingově větě (Věta 7.1.).*

## 9.3. Algebraický přístup a Eulerův vzorec

Mějme nějaké rovinné nakreslení grafu $G$. *Oblastí grafu $G$* budeme rozumět takovou oblast roviny, která je ohraničena křivkou cyklu tak, že žádná hrana ani vrchol grafu neleží v interiéru křivky. Za oblast grafu budeme někdy považovat také část roviny, která je ohraničena uzavřeným sledem, případně několika sledy (přičemž žádná hrana ani vrchol neleží v interiéru příslušné křivky). Například rovinná nakreslení stromů mají jedinou oblast, jejíž hranice evidentně není cyklem. Podobně hranice modré oblasti na Obrázku 9.12. *není* jordanovskou křivkou. Červeně jsou vyznačeny hrany, které se na hranici vyskytují dvakrát a hranice proto je uzavřeným sledem. Žlutě jsou vyznačeny hrany, které se vyskytují dvakrát na hranici vnější oblasti. Všimněte si, že v grafu se třemi komponentami (Obrázek 9.12.) je hranice vnější oblasti tvořena třemi uzavřenými sledy.



Obrázek 9.12.: *Hranice vnější oblasti grafu ani hranice modré oblasti nejsou cyklem v grafu.*

Označme $o(G)$ počet oblastí grafu $G$ v nějakém jeho rovinném nakreslení. Všimněte si, že oblast grafu a počet oblastí grafu definujeme pouze pro *rovinné* grafy. Pokud máme takové nakreslení grafu, ve kterém se nějaké hrany kříží, nemá pojem oblasti smysl a nemůžeme proto ani určit počet oblastí. Následující věta patří k nejstarším výsledkům teorie grafů.

**Věta 9.5. Eulerův vzorec**
*Pro libovolný souvislý rovinný graf $G$ platí $v(G) - h(G) + o(G) = 2$.*

*Důkaz.* Postupujeme indukcí vzhledem k počtu oblastí.
*Základ indukce:* Souvislý graf s jedinou oblastí neobsahuje žádný cyklus, který by odděloval dvě oblasti, proto je takový graf stromem. Podle Věty 3.3. má strom s $v(G)$ vrcholy právě $v(G) - 1$ hran, a proto

$$v(G) - h(G) + o(G) = v(G) - (v(G) - 1) + 1 = 2.$$

*Indukční krok:* Mějme souvislý rovinný graf $G$ s alespoň dvěma oblastmi. Předpokládejme, že pro každý souvislý rovinný graf s méně než $o(G)$ oblastmi Eulerův vzorec platí. Zvolme libovolnou hranu $e$ grafu $G$, která odděluje dvě oblasti (taková hrana podle předpokladu existuje). Odebráním hrany $e$ z grafu $G$ dostaneme souvislý (proč?) graf $G' = G - e$, který má o jednu oblast méně, neboť odstraněním hrany $e$ se obě oddělené oblasti spojí v jedinou oblast. Podle indukčního předpokladu pro graf $G'$ Eulerův vzorec platí, proto

$$2 = v(G') - h(G') + o(G') = v(G) - (h(G) - 1) + o(G) - 1 = v(G) - h(G) + o(G),$$

což je dokazované tvrzení. □

Eulerův vzorec je velmi silným tvrzením, které se týká planárních grafů. Ukážeme, že řadu tvrzení můžeme získat jako důsledky Věty 9.5. Jedním z nich je pozorování, které říká, že pro planární (nejen rovinné!) grafy můžeme určit počet oblastí rovinného nakreslení, aniž takové nakreslení známe!

**Důsledek 9.6.** *Všechna rovinná nakreslení souvislého planárního grafu mají v rovině stejný počet oblastí.*

*Důkaz.* Každé nakreslení planárního grafu $G$ má stejný počet vrcholů $v(G)$ a stejný počet hran $h(G)$. Podle Věty 9.5. má každé nakreslení $2 - v(G) + h(G)$ oblastí a počet oblastí je proto vždy stejný. □

**Otázky:**

- Proč nemá smysl definovat počet oblastí pro grafy, které nejsou rovinné dokonce ani když jsou planární?
- Proč je součástí tvrzení Důsledku 9.6. „v rovině“?

**Důsledek 9.7.** *Pro každý planární graf $G$ s více než dvěma vrcholy platí $h(G) \leq 3v(G) - 6$.*

*Důkaz.* Můžeme předpokládat, že graf $G$ je souvislý. Pro nesouvislé grafy plyne platnost tvrzení z platnosti nerovnosti pro každou komponentu. Pro grafy s jedinou oblastí a alespoň třemi vrcholy tvrzení platí s využitím Věty 3.3. (proč?).

Předpokládejme, že graf má alespoň dvě oblasti. Hranice každé oblasti je v jednoduchém grafu tvořena alespoň třemi hranami. Proto sečteme-li všechny hrany, které leží na hranici nějaké oblasti a oddělují dvě oblasti, dostaneme číslo alespoň $3o(G)$. Každá hrana, která leží na hranici, je v tomto součtu započítána dvakrát – alespoň[28] jednou za každou oblast, které odděluje. Proto v každém takovém grafu platí $h(G) \geq \frac{3}{2}o(G)$, tj. $o(G) \leq \frac{2}{3}h(G)$.

Z Eulerova vzorce (Věta 9.5.) pak plyne

$$2 = v(G) - h(G) + o(G) \leq v(G) - h(G) + \frac{2}{3}h(G).$$

Odtud je

$$2 \leq v(G) - \frac{1}{3}h(G).$$

Vynásobením číslem 3 a úpravou dostaneme dokazované tvrzení

$$h(G) \leq 3v(G) - 6.$$

□

Důsledek 9.7. je možno chápat jako pozorování, že „v planárním grafu není mnoho hran.“ Zatímco v kompletním grafu roste počet hran s druhou mocninou počtu vrcholů, tak v planárním grafu je počet hran menší než trojnásobek počtu vrcholů.

**Otázky:**

- Všimněte si, že ani v jednoduchém grafu nemusí hrany na hranici oblasti tvořit cyklus. Jak je to možné? Zdůvodněte na příkladu.
- Jaký je počet oblastí stromu? Jak vypadá hranice?
- Jak se v důkazu Důsledku 9.7. použilo, že tvrzení platí pro grafy s více než dvěma vrcholy?

**Důsledek 9.8.** *Pro každý planární graf $G$ platí $\delta(G) \leq 5$.*

*Důkaz.* Tvrzení dokážeme přímo. Pro grafy s jedním nebo dvěma vrcholy tvrzení jistě platí. Pro grafy s větším počtem vrcholů dostaneme dle Věty 1.1.

$$2h(G) = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq v(G)\delta(G)$$

a užitím Důsledku 9.7. můžeme psát

$$\begin{aligned} 2h(G) &\leq 6v(G) - 12 \\ v(G)\delta(G) &\leq 6v(G) - 12 \\ \delta(G) &\leq 6 - \frac{12}{v(G)} \\ \delta(G) &< 6. \end{aligned}$$

[28] Dobře si rozmyslete, proč říkáme „alespoň jednou“. Ověřte své pozorování na Obrázku 9.12.

Protože nejmenší stupeň grafu $\delta(G)$ je jistě celé číslo, dostáváme dokazované tvrzení $\delta(G) \leq 5$. □

**Důsledek 9.9.** *Pro každý planární graf $G$ bez trojúhelníků a s alespoň třemi vrcholy platí $h(G) \leq 2v(G) - 4$.*

Důkaz je ponechán jako Cvičení 9.3.4. Podobně důkaz následujícího tvrzení je Cvičení 9.3.5.

**Důsledek 9.10.** *Pro každý planární graf $G$ bez trojúhelníků platí $\delta(G) \leq 3$.*

Následující důsledek jsme již dokázali ve Větách 9.2. a 9.3. S využitím Důsledků 9.7. a 9.9. (tj. s využitím Eulerova vzorce) lze najít jiný elegantní důkaz (Cvičení 9.3.6. a 9.3.7.).

**Důsledek 9.11.** *Grafy $K_5$ a $K_{3,3}$ nejsou planární.*

Eulerův vzorec můžeme snadno zobecnit i pro nesouvislé grafy. V rovinném grafu s více komponentami samozřejmě platí Eulerův vzorec pro každou komponentu. Důkaz je ponechán jako Cvičení 9.3.2. Při počítání oblastí v nesouvislém grafu nesmíme zapomenout, že jednotlivé komponenty sdílí jednu společnou „vnější“ oblast.

**Věta 9.12. Eulerův vzorec pro nesouvislé grafy**
*Pro libovolný rovinný graf $G$ s $\omega(G)$ komponentami platí $v(G) - h(G) + o(G) = 1 + \omega(G)$.*

**Otázka:** Které z vět a důsledků v této podkapitole platí i pro multigrafy (grafy s násobnými hranami)?

## Cvičení

*9.3.1. Dokažte Eulerův vzorec indukcí vzhledem k počtu hran.*

*9.3.2. Dokažte Eulerův vzorec pro nesouvislé grafy třemi různými způsoby.*

*9.3.3. Najděte příklad grafu $G$, ve kterém každá oblast je ohraničena hranami nejvýše dvou komponent, přičemž a) $G$ má alespoň tři komponenty, b) $G$ má právě $k$ komponent, pro každé $k \geq 2$.*

*9.3.4. Dokažte Důsledek 9.9., tj. že pro každý planární graf $G$ bez trojúhelníků a s alespoň třemi vrcholy platí $h(G) \leq 2v(G) - 4$.*

*9.3.5. Dokažte Důsledek 9.10., tj. že pro každý planární graf $G$ bez trojúhelníků platí $\delta(G) \leq 3$.*

*9.3.6. Nalezněte důkaz neplanárnosti grafu $K_5$ užitím důsledků Eulerova vzorce.*

*9.3.7. Nalezněte důkaz neplanárnosti grafu $K_{3,3}$ užitím důsledků Eulerova vzorce.*

*9.3.8. Obvod grafu $G$ je délka nejkratšího cyklu v grafu $G$. Ukažte, že čím je obvod $g$ planárního grafu $G$ s daným počtem vrcholů větší, tím méně může mít graf $G$ hran.*

*9.3.9. S využitím Eulerova vzorce (Věta 9.5.) dokažte, že Petersenův graf na Obrázku 4.10. není planární, víte-li že obvod Peteresenova grafu je 5.*

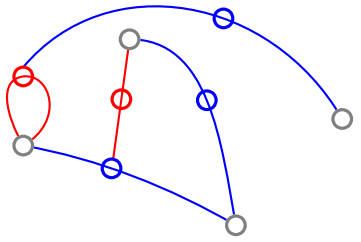
*9.3.10. Dokažte, že planární graf $G$ s více než třemi vrcholy a $\delta(G) \geq 3$ má alespoň čtyři vrcholy stupně 5 nebo menšího.*

*9.3.11. Nechť $G$ má alespoň 11 vrcholů. a) Dokažte, že buď $G$ nebo jeho komplement $\overline{G}$ je neplanární. b) Najdete příklad grafu $G'$, který má 8 vrcholů a $G'$ i $\overline{G'}$ jsou planární? c)** Najdete příklad grafu $G'$, který má 10 vrcholů a $G'$ i $\overline{G'}$ jsou planární?*

*9.3.12. Najdete příklad grafu a dvou jeho nakreslení (a) do roviny b) a na jinou plochu) tak, aby se hrany neprotínaly a obě nakreslení měla jiný počet oblastí? Vysvětlete!*

*9.3.13. Najděte příklad planárního grafu, pro který neplatí vztah z Důsledku 9.7., tj. pro který platí $h(G) > 3v(G) - 6$.*

*9.3.14. Hra „šprouti“ (z anglického „sprouts“, „výhonky“). Na papíře je nakresleno $n$ puntíků. Hra je zajímavá už pro malá $n$, třeba 5. Hráči se střídají, kdo nemůže udělat další tah, prohrál. V každém tahu spojí hráč křivkou dva puntíky tak, aby nezkřížil žádnou jinou křivku a na křivku*

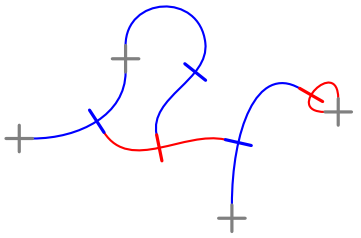


*Obrázek 9.13.: Rozehraná hra se čtyřmi výchozími puntíky, kdy je na tahu červený hráč.*

*nakreslí nový puntík. Puntík se smí použít jako konec nové křivky jen pokud z něj vedou nejvýše dvě další křivky. Ukažte, že pro $n$ počátečních puntíků má hra nejvýše $3n - 1$ tahů. Na Obrázku 9.13. jsou pro přehlednost tahy obou hráčů odlišeny barevně.*

*9.3.15.* Ukažte, že hra šprouti (Cvičení 9.3.14.) pro $n$ počátečních puntíků má vždy alespoň $2n$ tahů.*

*9.3.16.* Hra „podvodní šprouti". („Brussels sprouts") Místo puntíků budeme kreslit křížky. Nové křivky se připojují pouze k ramenům křížků. Nový křížek vytvoříme vždy přeškrtnutím křivky nakreslené v daném tahu. Ukažte, že hra má vždy právě $5n-2$ tahů. Na Obrázku 9.14. jsou pro přehlednost tahy obou hráčů odlišeny barevně.*



*Obrázek 9.14.: Rozehraná hra se čtyřmi výchozími křížky, kdy je na tahu červený hráč.*

*9.3.17.**Hrana se, v nějakém pevně zvoleném nakreslení, nazývá* sudá, *jestliže protíná jiné hrany grafu v sudém počtu průsečíků (ne koncových bodů). Ukažte, že pokud existuje takové nakreslení grafu $G$, ve kterém je každá hrana sudá, tak je $G$ planární.*

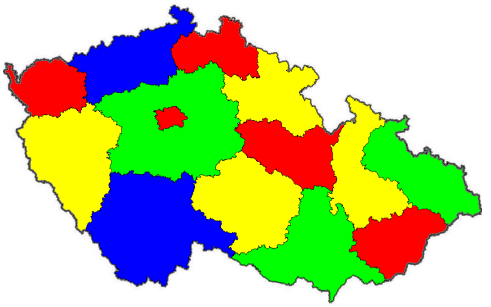
*9.3.18.**Označme $S$ množinu všech bodů s celočíselnými souřadnicemi v rovině. Mějme libovolný $n$-úhelník, jehož vrcholy patří do množiny $S$ ($n$-úhelník může být i nekonvexní). Označme $u$ počet všech bodů z $S$, které leží uvnitř $n$-úhelníka a $h$ počet všech bodů z $S$, které leží na hranici $n$-úhelníka.*
*a) Předpokládejme, že každý trojúhelník, jehož žádný vnitřní bod a kromě vrcholů ani žádný bod na hranici nepatří do $S$ má obsah $\frac{1}{2}$. Ukažte, že obsah $n$-úhelníka je $u + \frac{h}{2} - 1$.*
*b) Uměli byste ukázat, že každý trojúhelník, jehož žádný vnitřní bod a kromě vrcholů ani žádný bod na hranici nepatří do $S$ má obsah $\frac{1}{2}$?*

*9.3.19. Ukažte, že pokud má rovinný graf obvod alespoň 6, tak obsahuje vrchol stupně 2. Platí tvrzení i pro nerovinné grafy?*

*9.3.20. Kolik nejvíce oblastí může mít rovinný graf s $v$ vrcholy? Najděte příklad takového grafu pro každé přirozené $v$.*

## 9.4. Duální grafy a barvení planárních grafů

V předchozích kapitolách jsme se věnovali barvení hran i barvení vrcholů. V rovinných grafech má smysl barvit také oblasti (Obrázek 9.15.). Když si vezmeme mapu nějakého území, můžeme se na ni podívat jako na graf nějakého rovinného grafu. Hranice států nebo krajů odpovídají hranám grafu a místa křížení či dotyku hranic odpovídají vrcholům grafu. Pro přehlednost pak kraje obarvíme tak, aby každé dva sousední kraje, které sdílí alespoň nějaký úsek hranice (nikoliv jen bod), byly



Obrázek 9.15.: *Kraje České republiky obarvené čtyřmi barvami.*

obarveny různými barvami. Je přirozené se ptát kolik *nejméně* barev pro takové „dobré oblastní barvení“ potřebujeme.

Nejprve ukážeme, že místo „oblastního barvení“ rovinného grafu můžeme zkoumat vrcholového barvení tzv. duálního grafu.

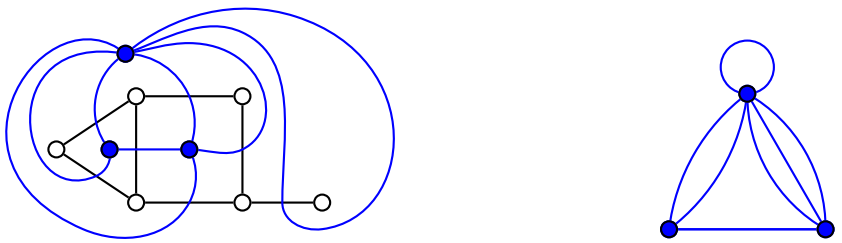
V této podkapitole budeme pracovat i s obecnými grafy, někdy připustíme existenci smyček a násobných hran. Není těžké si rozmyslet (Cvičení 9.4.4.), že pokud je jednoduchý graf $G$ planární, tak graf $G'$, který získáme z grafu $G$ tak, že nahradíme některé hrany násobnými hranami a u některých vrcholů přidáme smyčky, je také planární. Naopak, z obecného planárního grafu $G'$ jistě můžeme získat jednoduchý planární graf $G$ vynecháním smyček a násobných hran.

**Definice Duální graf**

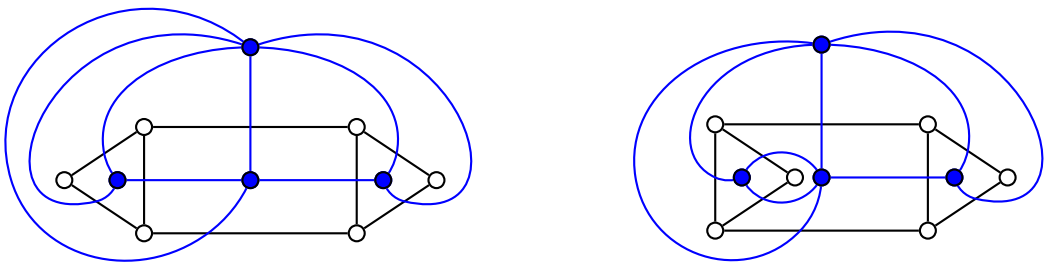
Mějme rovinný graf $G$ s množinou hran $e_1, e_2, \ldots, e_p$ a množinou oblastí $o_1, o_2, \ldots, o_q$. *Duální graf* $G^\star$ grafu $G$ je graf s množinu vrcholů $V(G^\star) = \{o_1^\star, o_2^\star, \ldots, o_q^\star\}$ a množinou hran $E(G^\star) = \{e_1^\star, e_2^\star, \ldots, e_p^\star\}$, kde dva vrcholy $o_i^\star$, $o_j^\star$ budou spojeny hranou $e_k^\star$, jestliže hrana $e_k$ je na hranici oblastí $o_i$ a $o_j$.

Všimněte si, že i v případě, že $G$ je jednoduchý graf, tak graf $G^\star$ může být se smyčkami nebo násobnými hranami (Obrázek 9.16.). Je-li například $G$ strom, je $G^\star$ graf s jediným vrcholem a $|E(G)|$ smyčkami. Obecně každá hrana, která neodděluje *dvě* oblasti, ale je součástí hranice *jediné* oblasti, odpovídá smyčce multigrafu $G^\star$.

Konstrukce duálního grafu je definována jen pro rovinné grafy (tj. máme dáno jedno pevné nakreslení grafu $G$) a dá se ukázat, že duální graf $G^\star$ k rovinnému grafu $G$ je opět rovinný graf (Cvičení 9.4.1.). Z definice by se mohlo zdát, že duálním grafem k rovinnému grafu $G^\star$ (k pevnému nakreslení duálního grafu $G^\star$) je opět původní graf $G$. To obecně není pravda, jak ukáže cvičení Cvičení 9.4.2. Dále je zajímavé si uvědomit, že struktura duálního grafu *závisí* na příslušném nakreslení grafu $G$. Stejný graf může mít několik neizomorfních duálních grafů (Obrázek 9.17., Cvičení 9.4.17.).



Obrázek 9.16.: *Graf $G$ a jeho duální multigraf $G^\star$.*



Obrázek 9.17.: *Dva neizomorfní duální grafy téhož grafu $G$.*

Směřujeme k formulaci problému čtyř barev, jednoho z nejznámějších problémů, který byl vyřešen pomocí teorie grafů. Francis Guthrie si v roce 1852 všiml, že při obarvování oblastí map stačí vždy nejvýše čtyři barvy. De Morgan a Arthur Cayley problém popularizovali. Nikdo tvrzení neuměl ani dokázat ani vyvrátit (nalezením protipříkladu) a tak se zrodil jeden z věhlasných problémů, o jehož řešení se více než sto let pokoušela celá řada významných matematiků. Konečně v roce 1976 Kenneth Appel a Wolfgang Haken podali důkaz založený jednak na teoretickém rozboru a jednak na vyšetření mnoha stovek jistých grafů. O problému čtyř barev je psáno podrobně na straně 194.

**Věta 9.13. Věta o čtyřech barvách**
*Pro libovolný planární graf $G$ platí $\chi(G) \leq 4$.*

Důkaz pochopitelně vynecháme.

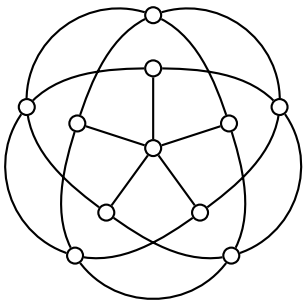
Pro planární grafy bez trojúhelníků (například planární bipartitní grafy, ale nejen je) je následující věta důsledkem Věty o čtyřech barvách. Umíme ji však snadno ukázat i bez použití Věty 9.13. (Cvičení 9.4.3.).

**Věta 9.14.** *Pro každý planární graf $G$ bez trojúhelníků platí $\chi(G) \leq 4$.*

Německý matematik Herbert Grötzsch dokázal v roce 1959 ještě silnější související výsledek.

**Věta 9.15. Grötzschova věta**
*Pro každý planární graf $G$ bez trojúhelníků platí $\chi(G) \leq 3$.*

Důkaz nebudeme uvádět. Grötzschův původní důkaz byl složitý a všechny dodnes známé důkazy jsou poměrně komplikované nebo využívají jiná silná tvrzení. Poznamenejme ještě, že je možno ukázat o něco silnější tvrzení: každý rovinný graf, který obsahuje nejvýše tři trojúhelníky, má chromatické číslo 3. Na druhou stranu existují planární grafy se čtyřmi trojúhelníky, na jejichž dobré vrcholové barvení tři barvy nestačí (najdete příklad?). Současně existují *neplanární* grafy bez trojúhelníků (například Grötzschův graf na Obrázku 9.18.) na jejichž dobré vrcholové barvení jsou potřeba alespoň čtyři barvy.



Obrázek 9.18.: *Grötzschův graf.*

**Otázka:** Jaký je příklad rovinného grafu se čtyřmi trojúhelníky, na jehož dobré vrcholové barvení jsou potřeba právě čtyři barvy?

**Kontrola tištěných spojů**

Vědci z AT&T Bellových laboratoří navrhli metodu kontroly tištěných spojů, která je pěknou praktickou aplikací Věty o čtyřech barvách. Vodivé spoje v jedné vrstvě tištěného spoje (i uvnitř procesoru) můžeme chápat jako oblasti v rovině. Obvykle požadujeme co nejmenší rozměry tištěného spoje, a proto je jejich výroba náchylná k chybám, které se projeví zkratem mezi různými vodiči (oblastmi). Kdybychom měli testovat krátké spojení mezi každými dvěma vodiči tištěného spoje se stovkou vodičů nebo (někdy se jim říká „sítě“), bude potřeba prověřit řádově 5000 možných zkratů, což je nepraktické. Typický počet sítí se pohybuje v řádu 500 a v takovém případě může zkrat nastat mezi více než 120 tisíci různými dvojicemi sítí. Při testu máme za úkol pouze zjistit *zda* je tištěný spoj vadný, není důležité *kde* přesně zkrat nastal.

Pěknou aplikací barvení grafů je možnost rychlého testu nejběžnějších vad ve výrobním procesu, které se projeví zkratem mezi *sousedními* sítěmi, tj. sítěmi, které spolu na tištěném spoji sousedí.

Protože celé schéma jedné vrstvy vodivých spojení můžeme chápat jako rovinný graf, existuje podle Věty o čtyřech barvách dobré obarvení vodivých oblastí sítí (vrcholy grafu odpovídají sítím) čtyřmi barvami. V takovém barvení nikdy nejsou sítě jedné barvy sousední. Místo přikládání dvojice testovacích sond postupně k různým dvojicím sítí, je možno pro výrobní linku sestavit jakési „supersondy“, kdy každá bude přiložena současně ke všem sítím odpovídajícím jedné barvě. Stačí se omezit na hledání zkratu mezi sítěmi různých barev, místo tisíců testů stačí prověřit $\binom{4}{2} = 6$ dvojic.

Počet testů můžeme zredukovat dokonce na pouhé dva testy, když čísla použitých čtyř barev zakódujeme v binárním kódu a jedna dvojice testovacích supersond bude odpovídat barvám s první binární číslicí 0 resp. 1 a druhá dvojice barvám s druhou binární číslicí 0 resp. 1. Pokud tištěný spoje obsahuje zkrat mezi vrcholy (odpovídají vodičů či sítím) dvou různých barev, a protože čísla každých dvou barev se liší v alespoň jednom bitu, tak bude zkrat při alespoň jednom testu objeven.

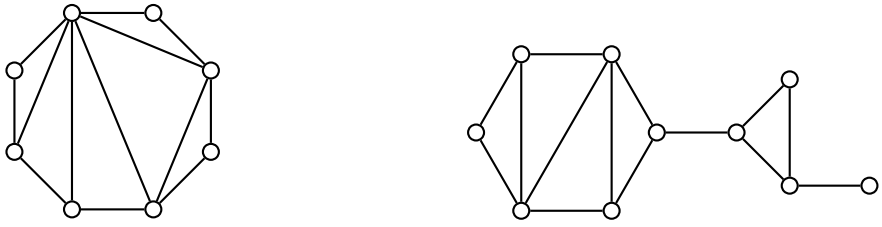
Oboustrannému tištěnému spoji, který se v praxi vyskytuje nejčastěji, by odpovídal graf tloušťky 2 (tloušťka je zavedena v Kapitole 10. na straně 208) a dá se ukázat, že na dobré obarvení takového grafu potřebujeme nejvýše 12 barev. Analogicky jako v předchozím odstavci můžeme těmto dvanácti barvám přiřadit čtyřbitové binární kódy a pro každý bit sestavit dvojici sond, vždy jedna bude současně přiložena ke všem vodičům s hodnotou 0 a druhá s hodnotou 1 příslušného bitu. Budou tak stačit čtyři testy na objevení nejběžnější výrobní vady, oproti tisícům obvyklých testů. Podrobnější popis najdete v knize [S].

**Vnějškově planární grafy**

Rovinné grafy, které dostaneme zakreslením několika hran do vnitřní oblasti cyklu, mají mezi planárními grafy výjimečné postavení, právě díky poměrně jednoduché struktuře.

**Definice** Planární graf se nazývá *vnějškově planární*, jestliže existuje takové jeho rovinné nakreslení, že všechny jeho vrcholy leží na hranici vnější oblasti. Takové rovinné nakreslení vnějškově planárního grafu se nazývá *vnějškově rovinný* graf.

Grafy na Obrázku 9.19. jsou vnějškově planární. Všimněte si, že podle definice nemusí všechny vrcholy vnějškově planárního grafu ležet na cyklu ani když je souvislý. Například graf na Obrázku 9.19. vpravo je vnějškově planární, avšak jistě neobsahuje cyklus procházející všemi vrcholy.



Obrázek 9.19.: *Příklady vnějškově planárních grafů.*

Jiná situace nastane pro 2-souvislé grafy, jak ukazuje následující lemma. Ve Cvičení 9.4.21. dokonce ukážeme, že takový cyklus existuje právě jeden.

**Lemma 9.16.** *Hranice vnější oblasti 2-souvislého vnějškově planárního grafu tvoří cyklus, který prochází všemi vrcholy.*

*Důkaz.* Víme, že hranice obsahuje všechny vrcholy grafu. Pokud by tato hranice nebyla cyklem, byla by sledem a to znamená, že prochází některým vrcholem (alespoň) dvakrát. Takový vrchol by tvořil artikulaci a graf by nebyl 2-souvislý. □

Ve Cvičení 9.4.19. ukážeme, že grafy $K_4$ a $K_{2,3}$ nejsou vnějškově planární. Je zajímavé, že tyto dva grafy mají pro vnějškově planární grafy podobný význam jako grafy $K_5$ a $K_{3,3}$ pro planární grafy. Dá se ukázat, že graf je vnějškově planární právě tehdy, když neobsahuje rozdělení grafu $K_4$ ani $K_{2,3}$.

**Věta 9.17.** *Každý vnějškově planární graf obsahuje vrchol stupně nejvýše 2.*

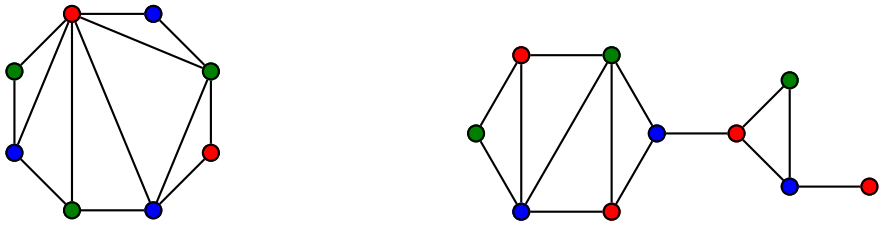
*Důkaz.* Omezíme se na souvislé grafy, protože tvrzení platí pro každou komponentu. V grafu s méně než čtyřmi vrcholy je každý vrchol stupně nejvýše 2. Pro grafy s alespoň čtyřmi vrcholy povedeme důkaz indukcí vzhledem k počtu vrcholů a dokážeme dokonce, že v každém vnějškově planárním grafu jsou dva nesousední vrcholy stupně nejvýše 2.

*Základ indukce:* Graf $K_4$ není vnějškově planární, neboť v každém cyklu, který prochází všemi vrcholy, najdeme dvě hrany (*chordály*, což jsou hrany mezi nesousedními vrcholy cyklu), jejichž koncové vrcholy se pravidelně střídají podél cyklu a nemohou být zakresleny současně ve stejné oblasti. Ostatní grafy na čtyřech vrcholech mají alespoň dva nesousední vrcholy stupně nejvýše 2.

*Indukční krok:* Mějme vnějškově planární graf $G$ s alespoň pěti vrcholy. Předpokládejme, že každý vnějškově planární graf s méně vrcholy obsahuje dva nesousední vrcholy stupně 2. Jestliže graf $G$ obsahuje artikulaci, pak najdeme (podle Cvičení 5.2.5.) dva koncové bloky (koncový blok obsahuje jedinou artikulaci). Bloky jsou vnějškově planární grafy a podle předpokladu najdeme v každém alespoň dva vrcholy stupně nejvýše 2, přičemž tyto dva vrcholy nejsou v grafu $G$ sousední a alespoň jeden z nich není artikulací grafu $G$.

V 2-souvislém grafu $G$ najdeme podle Lemmatu 9.16. cyklus $C$, který prochází všemi vrcholy. Pokud graf $G$ neobsahuje kromě hran cyklu $C$ žádnou další hranu, jsou všechny vrcholy v $G$ stupně 2. Je-li $xy$ nějaká chordála cyklu $C$, tak každá ze dvou $(x, y)$-cest cyklu $C$ spolu s chordálou $xy$ tvoří cyklus, jehož vrcholy indukují vnějškově planární podgraf grafu $G$. Každý tento podgraf splňuje indukční předpoklad a obsahuje nějaký vrchol stupně nejvýše 2 různý od $x$ a $y$. Máme tak hledané dva vrcholy a nespojuje je žádná hrana, neboť by musela buď protnout hranu $xy$ nebo být zakreslena v oblasti ohraničené cyklem $C$, což není možné. □

Pomocí předchozí věty snadno ukážeme, že každý vnějškově planární graf lze dobře obarvit třemi barvami (Cvičení 9.4.20.). Na Obrázku 9.20. je dobré vrcholové barvení grafů z Obrázku 9.19. třemi barvami.



Obrázek 9.20.: *Dobrá vrcholové 3-barvení vnějškově planárních grafů.*

Vnějškově planární graf se nazývá maximální, pokud do něj není možno přidat žádnou hranu aniž by se porušila vlastnost být vnějškově planární. Na straně 199 definujeme Catalanova čísla. Všimněte si, že pokud rozlišujeme označení vrcholů, tak počet maximálních vnějškově planárních grafů s $n$ vrcholy je dán Catalanovým číslem $C_{n-2}$.

**Otázky:**

- Je Věta 9.17. silnější než Věta 9.15.? Nebo naopak?
- Existuje vnějškově planární graf, který neobsahuje žádný vrchol stupně 2?
- Existuje vnějškově planární graf, který neobsahuje žádný vrchol stupně 1 ani 2?

### Odkazy:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Grötzsch_graph
- http://en.wikipedia.org/wiki/Outerplanar_graph.

## Cvičení

*9.4.1. Mějmě libovolný rovinný graf $G$. Ukažte, že duální multigraf $G^\star$ je planární.*

*9.4.2. Mějmě libovolný rovinný graf $G$. Ukažte, že duálním grafem k duálnímu grafu $G^\star$ (k jeho pevnému nakreslení) nemusí být původní rovinný graf $G$.*

*9.4.3. Bez použití Vět 9.13. a 9.15. dokažte Větu 9.14., která říká, že pro každý planární graf $G$ bez trojúhelníků platí $\chi(G) \leq 4$.*

*9.4.4. Ukažte, že pokud je jednoduchý graf $G$ planární, tak graf $G'$, který vznikne z grafu $G$ nahrazením některých hran násobnými hranami a přidáním smyček k některým vrcholům, je také planární.*

*9.4.5. Mějme nějaké rovinné nakreslení grafu $G$. Nadefinujte* oblastní barvení grafu *a* dobré oblastní barvení *grafu $G$. Zaveďte* oblastní chromatické číslo *$\chi_o(G)$.*

*9.4.6.$^\heartsuit$ Najděte příklad rovinného grafu, který neobsahuje $K_4$ jako podgraf, ale na jeho dobré vrcholové barvení jsou potřeba alespoň čtyři barvy.*

*9.4.7. Najděte příklad (nerovinného) grafu, který neobsahuje a) graf $K_5$ jako podgraf, ale na jeho dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň pět barev, b) graf $K_n$ jako podgraf, ale na jeho dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň $n$ barev.*

*9.4.8. Dokažte slabší verzi věty o čtyřech barvách: pro každý planární graf $G$ je $\chi(G) \leq 6$.*

*9.4.9. Najděte jiný důkaz, že pro každý planární graf $G$ platí $\chi(G) \leq 6$. Použijte Větu 8.9.*

*9.4.10.* Dokažte, Větu o 5 barvách, tj. že pro každý planární graf $G$ je $\chi(G) \leq 5$.*

*9.4.11. Najděte chybu v následujícím důkazu:*

*Mějme takový graf $G$, že na jeho dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň 5 barev. V grafu $G$ musí být nějaké vrcholy stupně alespoň 4, které jsou sousední s vrcholy čtyř ostatních barev, jinak bychom je mohli přebarvit a použít méně než 5 barev. Dále jistě najdeme takovou množinu pěti vrcholů různé barvy, které tvoří podgraf $K_5$, protože na dobré vrcholové obarvení každého podgrafu $K_5 - e$ stačí podle Brooksovy Věty 8.7. jen 4 barvy. V rovinném grafu podle Kuratowského věty neexistuje podgraf izomorfní s $K_5$, a proto (podle předchozího zdůvodnění) na obarvení rovinného grafu budou stačit vždy čtyři barvy.*

*9.4.12.$^\heartsuit$ Ukažte, že duálním grafem kola $W_{n+1}$ je kolo $W_{n+1}$.*

*9.4.13. Podle Věty 9.4. víme, že graf $K_6$ není planární. Ukažte, že existuje takový planární graf $G$, jehož vrcholy je možno obarvit šesti barvami (ohodnotit) $1, 2, \ldots, 6$ tak, že každý vrchol obarvený barvou $i$ je sousední s vrcholy všech zbývajících pěti barev.*

*9.4.14. Najděte dobré vrcholové barvení planárního grafu z předchozího příkladu pomocí čtyř barev.*

*9.4.15. Ukažte, že tvrzení ze Cvičení 9.4.13. není možné zesílit, tj. neexistuje rovinný graf $G$, jehož vrcholy je možno obarvit sedmi barvami (ohodnotit) $1, 2, \ldots, 7$ tak, že každý vrchol $i$ je sousední s vrcholy všech zbývajících šesti barev.*

*9.4.16. Pro která přirozená čísla $n$ existuje takový jednoduchý rovinný graf $G$ s $n$ vrcholy, že jeho duální graf $G^\star$ je izomorfní s grafem $G$?*

*9.4.17. Pro každé přirozené číslo $k$ najděte příklad planárního grafu $G$ a alespoň $k$ takových jeho různých rovinných nakreslení, že pro každé nakreslení dostaneme jiný (neizomorfní) duální a) multigraf $G^\star$ b) graf $G^\star$.*

*9.4.18. Najděte všechny maximální vnějškově planární grafy na a) pěti vrcholech, b) šesti vrcholech. Maximální vnějškově planární jsou zavedeny na straně 188.*

*9.4.19. Ukažte, že grafy $K_4$ a $K_{2,3}$ jsou planární, ale nejsou vnějškově planární.*

*9.4.20. Ukažte, že chromatické číslo vnějškově planárních grafů je nejvýše 3.*

*9.4.21. Ukažte, že každý 2-souvislý vnějškově planární graf obsahuje právě jeden cyklus, který prochází všemi vrcholy (hamiltonovský cyklus).*

*9.4.22. Ukažte, že duální graf libovolného rovinného grafu je souvislý.*

*9.4.23. Dokažte, že netriviální rovinný graf je bipartitní právě tehdy, když každá jeho oblast je ohraničena sudým počtem hran. (Každou hranu počítáme tolikrát, kolikrát se objeví na hranici oblasti.)*

*9.4.24. Ukažte, že každý planární graf s $n$ vrcholy, který je izomorfní se svým doplňkem, má právě $2n-2$ hran. Pro každé $n \geq 4$ sestavte příklad jednoduchého planárního grafu izomorfního se svým doplňkem.*

*9.4.25. Ukažte, že graf je vnějškově planární právě tehdy, když neobsahuje rozdělení grafu $K_4$ ani $K_{2,3}$.*

## 9.5. Doplňková témata

### Stereografická projekce

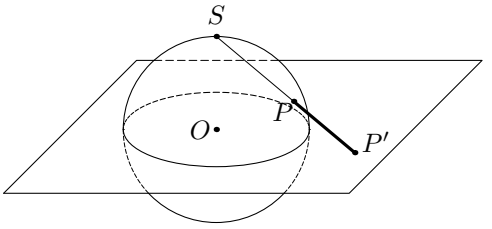
Stereografická projekce je bijektivní zobrazení celé sféry s výjimkou jediného bodu (třeba „severního pólu“) na rovinu. Výjimečnému bodu sféry říkáme *bod projekce*. Je-pochopitelné, že takové zobrazení zkresluje vzdálenosti i plochy. Stereografická projekce je však *konformní* zobrazení, tj. zachovává úhly. Protože sféra i rovina se vyskytují v řadě nejen matematických disciplín, uplatňuje se stereografická projekce nejen v matematice, ale například i v kartografii, geologii či fotografii. Stereografická projekce zkresluje vzdálenosti, v každém směru stejně. V kartografii se používá zejména na zobrazení polárních oblastí, nebo při zobrazení měsíčních kráterů (Obrázek 9.24.).

Mějme jednotkovou sféru $K$ a rovinu $\mathbb{R}^2$, která prochází středem sféry (Obrázek 9.21.). Stereografická projekce $f : K \to \mathbb{R}^2$ je dána rovnicemi

$$f(x,y,z) = (x',y') = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right),$$

kde $(x,y,x)$ jsou souřadnice bodu na sféře $K$ a $(x',y')$ jsou souřadnice bodu v rovině $\mathbb{R}^2$. Inverzní zobrazení $f^{-1} : \mathbb{R} \to K$ je dáno předpisem

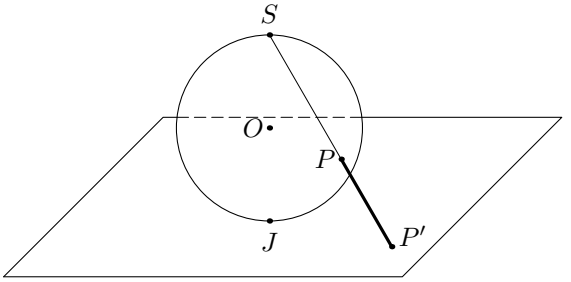
$$f(x',y') = (x,y,x) = \left(\frac{2x'}{1+(x')^2+(y')^2}, \frac{2y'}{1+(x')^2+(y')^2}, \frac{(x')^2+(y')^2-1}{1+(x')^2+(y')^2}\right).$$




Obrázek 9.21.: *Stereografická projekce, kdy rovina prochází středem sféry.*

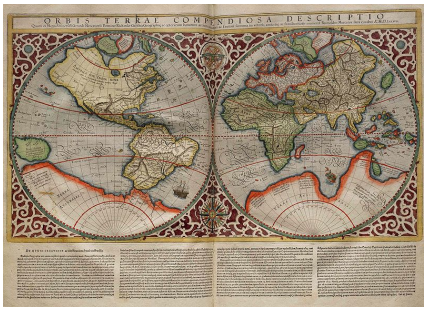
Stereografická projekce má několik pěkných vlastností. Z konformity plyne (Cvičení 9.5.1.), že každá kružnice na sféře, která neprochází bodem projekce, se zobrazí v rovině opět na kružnici. Kružnice, které prochází bodem projekce, se zobrazí do přímky.

Existují další varianty stereografické projekce. Často se pracuje i se stereografickou projekcí sféry $K$ do roviny $\mathbb{R}^2$, která se koule dotýká, například „jižním pólem“ jako na Obrázku 9.22.

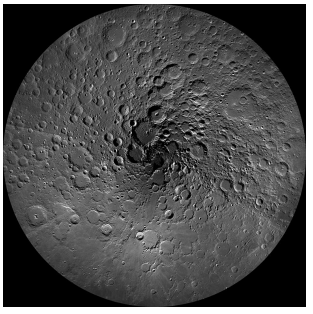
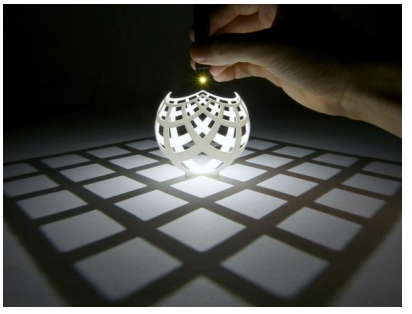



Obrázek 9.22.: *Stereografická projekce, kdy sféra stojí na rovině.*

Konformity se využívá v kartografii při kreslení navigačních map (Obrázek 9.23. vlevo). Stereografická projekce byla známá už začátkem letopočtu. Dnešní název zavedl François d'Aiguillon ve svých knihách o optice (Obrázek 9.23. vpravo).



Obrázek 9.23.: *Stereografická projekce v kartografii (Mercatorova mapa světa 1587) a Rubensova ilustrace v knize* Opticorum libri sex philosophis juxta ac mathematicis utiles *od Françoise d'Aiguillona.*

Obrázek 9.24.: *Měsíční krátery ve stereografické projekci a obrazy kružnic procházející bodem projekce.*

### Odkazy:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection
- http://mathworld.wolfram.com/StereographicProjection.html
- http://www.youtube.com/watch?v=6JgGKViQzbc

## Cvičení

*9.5.1. Vysvětlete, jak z konformity stereografické projekce plyne, že kružnice na sféře se v rovině zobrazí opět na kružnice, případně na přímky.*

### Grafy platónských těles

*Platónská tělesa* jsou pravidelné mnohostěny, které mají všechny stěny shodné pravidelné $n$-úhelníky a u kterých se v každém vrcholu setkává stejný počet (právě $p$) hran mnohostěnu pro nějaké přirozené číslo $p$. Platónská tělesa jsou jakousi prostorovou obdobou pravidelných $n$-úhelníků v rovině. Staří Řekové znali nejprve jen čtyři takové pravidelné mnohostěny: čtyřstěn, šestistěn, osmistěn a dvacetistěn. Později našli i poslední z nich – pravidelný dvanáctistěn.

Ukážeme, že existuje právě pět platónských těles. Nejprve si uvědomme, že každému konvexnímu mnohostěnu (i některým nekonvexním mnohostěnům) je možno jednoznačně přiřadit graf tak, že vrcholy mnohostěnu budou odpovídat vrcholům grafu a hrany mnohostěnu budou odpovídat právě hranám mnohostěnu. Takto vznikla i terminologie pojmů „hrana“ a „vrchol“. Přiřazení je možno ukázat názorně i pomocí stereografické projekce (obrázek na titulní straně). Důležité je pozorování, že u mnohostěnu není žádný vrchol stupně 2 a každá hrana musí oddělovat dvě stěny.

Nyní můžeme s mnohostěnem pracovat jako s grafem. Podobně jako v Eulerově vzorci (Věta 9.5.) označíme počet vrcholů $v(G)$, počet hran $h(G)$ a počet stěn (oblastí) $o(G)$. Graf každého platónského tělesa je rovinný graf, ve kterém platí následující vztahy.

1) Každý vrchol grafu odpovídá vrcholu tělesa, proto podle Věty 1.1. platí $pv(G) = 2h(G)$.
2) Každá hrana grafu odpovídá hraně tělesa a každá $n$-úhelníková stěna odpovídá oblasti ohraničené $n$ hranami, proto platí $no(G) = 2h(G)$.
3) Platí Eulerův vzorec $v(G) - h(G) + o(G) = 2$.

Jedná se o soustavu tří rovnic s parametry $p$, $n$ o třech neznámých $v(G)$, $h(G)$ a $o(G)$. Soustavu nyní vyřešíme. Rovnici Eulerova vzorce vynásobíme $np$ a dosadíme za $pv(G)$ i $no(G)$. Dostaneme vztah pro počet hran platónského tělesa v závislosti na počtu hran $n$ každé stěny a na počtu hran $p$ sbíhajících se u každého vrcholu.

$$\begin{aligned} npv(G) - nph(G) + npo(G) &= 2np \\ 2nh(G) - nph(G) + 2ph(G) &= 2np \\ h(G)(2n + 2p - np) &= 2np \\ h(G) &= \frac{2np}{2n + 2p - np}. \end{aligned}$$

Pro vyjádření počtu vrcholů platónského tělesa nyní stačí dosadit za $h(G)$ do $pv(G) = 2h(G)$ a vydělit $p$. Podobně pro vyjádření počtu stěn platónského tělesa stačí dosadit za $h(G)$ do $no(G) = 2h(G)$ a vydělit $n$. Dostaneme vztahy

$$v(G) = \frac{4n}{2n + 2p - np}, \qquad h(G) = \frac{2np}{2n + 2p - np}, \qquad o(G) = \frac{4p}{2n + 2p - np}. \tag{10}$$

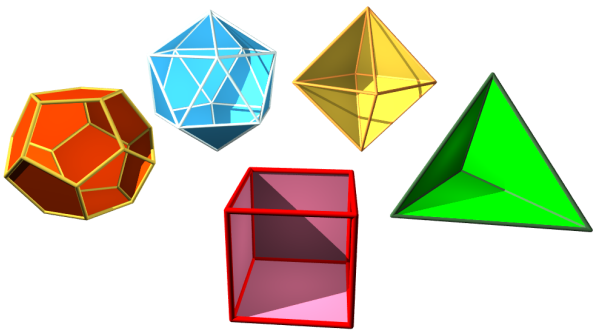
Protože všechny parametry jsou celá čísla, musí pro jmenovatele platit $2n + 2p - np > 0$, přičemž $n \geq 3$ a $p \geq 3$. Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} 2n + 2p - np &> 0 \\ 0 &> np - 2n - 2p \\ 4 &> np - 2n - 2p + 4 \\ 4 &> n(p-2) - 2(p-2) \\ 4 &> (n-2)(p-2). \end{aligned}$$

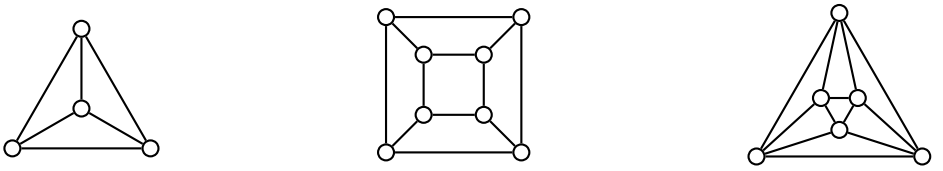
Následuje úplná diskuze řešení v závislosti na parametrech $n$ a $p$. Protože $n \geq 3$ a $p \geq 3$ jsou celá čísla, musí platit $1 \leq (n-2)(p-2) \leq 3$.

- Je-li $(n-2)(p-2) = 1$, tak tzv. Schläfliův symbol[29] je $\{n, p\} = \{3, 3\}$. Z rovnic (10) snadno dopočítáme, že příslušný mnohostěn má 4 vrcholy, 6 hran a 4 stěny. Jedná se o pravidelný čtyřstěn.
- Je-li $(n-2)(p-2) = 2$, tak Schläfliův symbol je buď $\{4, 3\}$ nebo $\{3, 4\}$. V prvním případě má příslušný mnohostěn 8 vrcholů, 12 hran a 6 stěn a jedná se o pravidelný šestistěn, neboli krychli. V druhém případě má mnohostěn 6 vrcholů, 12 hran a 8 stěn a jedná se o pravidelný osmistěn.
- Je-li $(n-2)(p-2) = 3$, tak Schläfliův symbol je buď $\{5, 3\}$ nebo $\{3, 5\}$. V prvním případě má příslušný mnohostěn 20 vrcholů, 30 hran a 12 stěn a jedná se o pravidelný dvanáctistěn. V druhém případě má mnohostěn 12 vrcholů, 30 hran a 20 stěn a jedná se o pravidelný dvacetistěn.

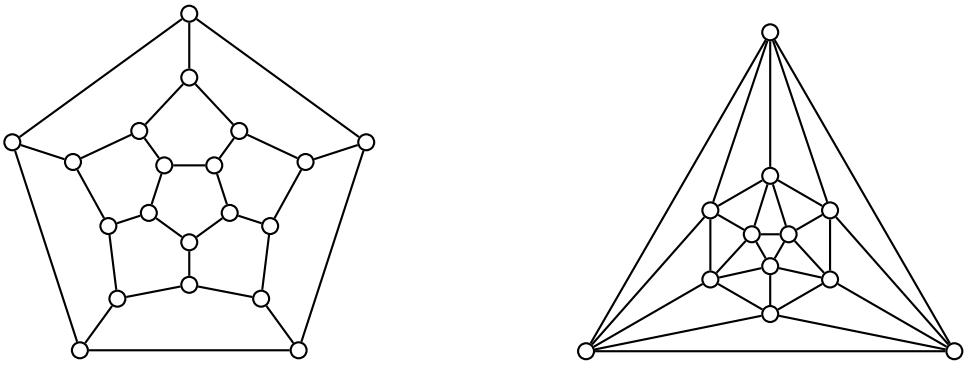
[29] Schläfliův symbol popisuje pravidelné mnohostěny. Jedná se *uspořádanou* dvojici, zápis pomocí množinových závorek se používá z historických důvodů. Schläfliův symbol lze zobecnit pro „mnohostěny“ různých dimenzí.



Obrázek 9.25.: *Všechna platónská tělesa (některé stěny jsou pro názornost vynechány).*



Obrázek 9.26.: *Grafy pravidelného čtyřstěnu, šestistěnu a osmistěnu.*



Obrázek 9.27.: *Grafy pravidelného dvanáctistěnu a dvacetistěnu.*

Jiné možnosti nepřipadají v úvahu, proto pravidelných mnohostěnů je právě pět – nejvýše pět možností vychází z výpočtu a pět umíme zkonstruovat (Obrázek 9.25.). Příslušné grafy platónských mnohostěnů jsou na Obrázcích 9.26. a 9.27.

**Odkazy:**

- http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid
- http://mathworld.wolfram.com/PlatonicSolid.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_solid
- http://www.jimloy.com/geometry/hedra.htm

**Otázky:**

- Jak by se změnil počet platónských mnohostěnů, kdybychom v definici vynechali požadavek, aby se u každého vrcholu potkávalo stejné množství hran?
- Jak by se změnil počet platónských mnohostěnů, kdybychom v definici vynechali požadavek, aby byl konvexní?
- Jak by se změnil počet platónských mnohostěnů, kdybychom v definici vynechali požadavek, aby se u každého vrcholu potkávalo stejné množství hran a aby byl konvexní?
- Jak by se změnil počet platónských mnohostěnů, kdybychom v definici vynechali požadavek, aby všechny $n$-úhelníky, které tvoří stěny, byly shodné?

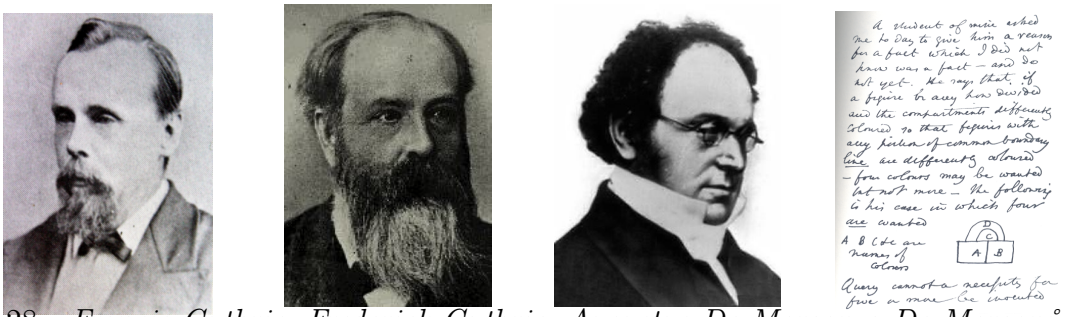
## Cvičení

*9.5.2. Mějme platónské těleso $P$ a jeho graf $G$. Jak spolu souvisí Schläfliův symbol tohoto platónského tělesa $P$ a tělesa $P'$, které odpovídá grafu duálnímu ke $G$?*

*9.5.3.**Dokažte, že existuje právě pět platónských těles* bez *použití Eulerova vzorce.*

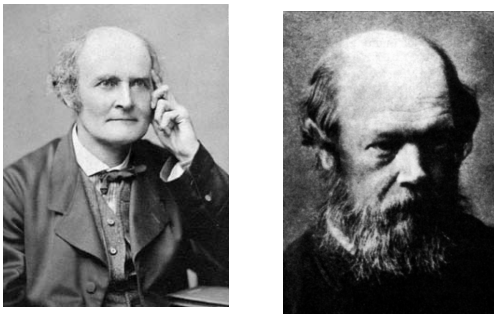
### O problému čtyř barev

Jihoafrický matematik a botanik Francis Guthrie si jako první v roce 1852 všiml, že při obarvování map Anglie vystačí se čtyřmi barvami. Diskutoval o tom se svým bratrem Frederickem (oba byli v té době studenti Augusta De Morgana). V roce 1852 Frederick Guthrie napsal De Morganovi dopis s otázkou, jak by se tvrzení dalo dokázat. De Morganovi tvrzení přišlo pravděpodobné, avšak také nevěděl, jak tvrzení dokázat. Obrátil se na svého přítele Williama Hamiltona[30], ale ani ten nevěděl, jak problém vyřešit.




Obrázek 9.28.: *Francis Guthrie, Frederick Guthrie, Augustus De Morgan a De Morganův dopis Hamiltonovi.*

Po De Morganově smrti na nějakou dobu problém čtyř barev zapadl. Arthur Cayley, také De Morganův žák, napsal v roce 1878 dopis Londýnské matematické společnosti, ve kterém se ptal, zda už někdo dokázal Guthrieho hypotézu. On sám se problému také věnoval, další autoři jako Charles Peirce, Alfred Bray Kempe, Percy John Heawood, Peter Guthrie Tait také. Někteří dokonce podali důkaz věty o čtyřech barvách, všechny se však (třeba i po několika letech) ukázaly jako chybné.



Obrázek 9.29.: *Arthur Cayley, Peter Guthrie Tait.*

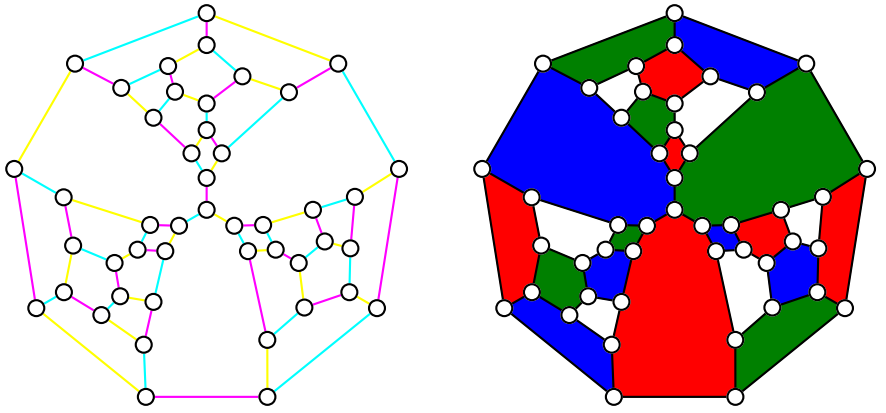
Tait v roce 1886 vyslovil hypotézu, že „graf každého mnohostěnu (neboli každý 3-souvislý planární graf) obsahuje hamiltonovský cyklus“. Neplanární grafy jistě nemusí obsahovat hamiltonovský cyklus, například Petersenův graf (Obrázek 4.10.).

Pokud by tato hypotéza byla pravdivá, tak bychom snadno dokázali větu o čtyřech barvách. Každou 3-souvislou mapu snadno převedeme na kubický (neboli 3-pravidelný) graf tak, že kolem vrcholů stupně většího než 3 nakreslíme malý kroužek, vznikne mnohoúhelník, kterým vrchol nahradíme. Počet vrcholů v 3-pravidelném grafu je sudý (podle Věty 1.1.). Nyní bychom podle Taitovy hypotézy našli hamiltonovský cyklus a pomocí něj dobré hranové barvení třemi barvami (tzv. *Taitovo hranové barvení*) tak, že obarvíme hrany hamiltonovského cyklu střídavě dvěma barvami a zbývající hrany třetí barvou. Dostaneme Taitovo hranové barvení mapy (grafu) a z něj zkonstruujeme obarvení

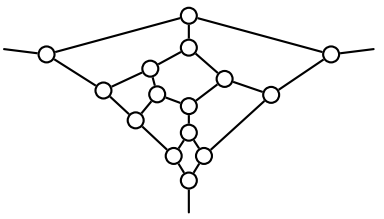
[30] O Hamiltonovi je psáno na straně 230.

oblastí této mapy čtyřmi barvami následujícím způsobem. Předpokládejme, že máme 3-souvislou kubickou mapu na bílém papíře a její hrany dobře obarveny třemi barvami. U každého vrcholu se potkávají hrany všech tří barev. Nyní odstraníme hrany jedné barvy. Dostaneme 2-pravidelný graf (kolekci cyklů přes všechny vrcholy). Oblasti, které jsou ohraničeny lichým počtem hran vybarvíme červenou barvou. Totéž uděláme ještě pro hrany jiné barvy a oblasti ohraničené lichými cykly vybarvíme třeba modře. Složíme oba grafy přes sebe a dostaneme obarvení mapy čtyřmi barvami: bílou, červenou, modrou a fialovou (tam, kde se překrývají oblasti vybarvené červeně i modře).

Bohužel takový elegantní důkaz věty o čtyřech barvách není možný, protože existují kubické planární grafy, které nemají hamiltonovský cyklus. Tutte v roce 1946 našel protipříklad. Tzv. Tutteův fragment (Obrázek 9.31.) je takový podgraf většího grafu, že jakýkoliv hamiltonovský cyklus musí přijít/odejít spodním vrcholem, nemůže přijít levým a odejít pravým vrcholem. Spojením tří fragmentů vznikne graf na Obrázku 9.30., který má 46 vrcholů, 69 hran a 25 stěn, a který neobsahuje hamiltonovský cyklus.



Obrázek 9.30.: *Tutteův protipříklad Taitovy hypotézy a jeho obarvení čtyřmi barvami.*



Obrázek 9.31.: *Tutteův fragment.*

Jiný (neúplný) důkaz věty o čtyřech barvách podal v roce 1879 Alfred Bray Kempe. Postupuje indukcí vzhledem k počtu vrcholů a jeho hlavní myšlenka spočívá v detailním rozboru obarvení vrcholů nejmenšího stupně. Je-li v planárním grafu vrchol $v$ stupně 3 a umíme-li graf $G - v$ dobře obarvit čtyřmi barvami, tak podobnou úvahou jako ve Cvičení 9.4.3. snadno ukážeme, že také $\chi(G) \leq 4$. Podobně pro planární grafy s vrcholem $v$ nejmenšího stupně 4 můžeme sestavit tzv. *Kempeho řetězce*, což je podgraf planárního grafu indukovaný na vrcholech pouze dvou barev. Dá se ukázat, že alespoň jeden z takových podgrafů obsahujících dva vrcholy sousední s $v$ nemůže být souvislý, a je proto možno vzájemnou výměnou barev v jedné komponentě zajistit, aby po přebarvení nebyly vrcholy sousední s vrcholem $v$ obarveny různými barvami. Nepoužitou barvou pak obarvíme vrchol $v$. Zcela analogicky se ukáže věta o pěti barvách (Cvičení 9.4.10.). Teprve o jedenáct let později Percy John Heawood objevil chybu v rozboru případů týkajících je planárních grafů s nejmenším stupněm 5.

Teprve v první polovině 20. století byly objeveny další techniky, například metoda přemísťování nábojů[31], které byly nakonec použity v důkazu Věty o čtyřech barvách. V roce 1976 publikovali Kenneth Appel a Wolfgang Haken první úplný důkaz. Kromě teoretického rozboru a redukce problému na konečnou množinu případů, (nevystačíme s jediným vrcholem, ale bylo potřeba uvážit celé

[31] Anglicky se metoda přemísťování nábojů nazývá *discharging* a i v české literatuře se setkáme s počeštěným názvem „disčárdžing.“

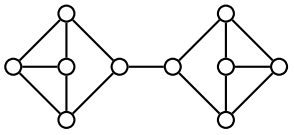
konfigurace vrcholů) využili pro vyšetření 1 936 různých konfigurací jeden z tehdejších superpočítačů. Výpočet zabral přibližně 1 200 hodin strojového času a ačkoliv byl později počet konfigurací zredukován na „pouhých“ 1 476, nebylo možno se při vyšetřování jednotlivých možností obejít bez použití výpočetní techniky. Technická část důkazu byla několikrát prověřena na několika výpočetních stanicích za použití různých algoritmů, přesto se po řadu let někteří s takovým důkazem neztotožnili a považovali tvrzení za otevřené. Teprve postupem času, redukcí prověřovaných konfigurací a nalezením alternativních důkazů (vždy však podpořené vyšetřením mnoha možností počítačem) se myšlenka počítačem podpořených důkazů vžila. Věta o čtyřech barvách se tak stala první větou, jejíž důkaz by nebyl možný bez použití počítačů. Dnes bychom takový důkaz mohli podat, počet vyšetřovaných případů by se již dal vytisknout a stačilo by tisíce možností „ručně“ zkontrolovat.

Zatímco Věta o čtyřech barvách (Věta 9.13.) je velmi dobře známá, tak méně známá je věta o hranovém barvení, která s větou o čtyřech barvách úzce souvisí.

**Věta 9.18. Věta o hranovém barvení planárních kubických grafů**
*Pro libovolný 3-pravidelný planární graf $G$ bez mostů platí $\chi'(G) = 3$.*

*Důkaz.* Tvrzení dokážeme užitím Věty o čtyřech barvách. Mějme libovolné rovinné nakreslení daného 3-pravidelného planárního graf $G$. Protože $G$ je kubický, jsou potřeba alespoň tři barvy (podle Vizingovy věty 7.1. budou stačit nejvýše čtyři barvy). Protože duální graf je opět rovinný, tak podle Věty 9.13. jistě existuje obarvení oblastí grafu $G$ čtyřmi barvami červenou, zelenou, modrou a bílou. Nyní hrany mezi červenými a modrými oblastmi a mezi bílými a zelenými oblastmi obarvíme tyrkysovou barvou. Hrany mezi červenými a zelenými oblastmi a mezi modrými a bílými oblastmi obarvíme žlutou barvou. A konečně zbývající hrany mezi červenými a bílými oblastmi a mezi modrými a zelenými oblastmi obarvíme fialovou barvou. Protože je graf kubický, u žádného vrcholu nemohou hraničit současně všechny čtyři oblasti. Dostaneme dobré hranové barvení grafu $G$ třemi barvami. □

Ne každý planární 3-pravidelný graf s mostem musí mít Taitovo obarvení. Příklad takového grafu je na Obrázku 9.32.



Obrázek 9.32.: *Graf $G$.*

W.T. Tutte vyslovil v roce 1966 hypotézu, že každý snark (snarky jsou zavedeny na straně 212) obsahuje Petersenův graf jako minor. *Minor* je graf $H$, který můžeme z daného grafu $G$ dostat odstraněním hran a nebo kontrakcí hran. *Kontrakce hrany* je proces, kdy hranu odstraníme a spojíme oba její koncové vrcholy do jediného vrcholu. Všechny ostatní hrany incidentní s těmito vrcholy budou incidentní s novým vrcholem. Podle Tutteovy hypotézy může být nejmenší snark (Petersenův graf) získán z každého dalšího snarku kontrakcí a odstraněním hran. To současně znamená, že každý snark obsahuje podgraf, který je rozdělením Petersenova grafu. Tait v roce 1880 ukázal, že Věta o čtyřech barvách je ekvivalentní tvrzení, že každý 3-pravidelný planární graf bez mostů je hranově 3-obarvitelný. Tutteova hypotéza je proto silnější formou hypotézy o čtyřech barvách, protože žádný graf, který obsahuje Petersenův graf jako minor, nemůže být planární. V roce 2001 Robertson, Sanders, Seymour a Thomas našli důkaz Tutteovy hypotézy, říká se jí *Věta o snarcích*.

### Odkazy:

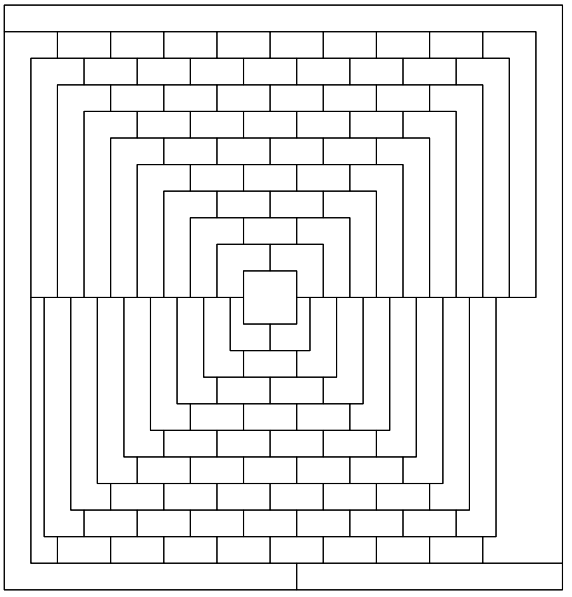
- http://en.wikipedia.org/wiki/Francis_Guthrie
- http://en.wikipedia.org/wiki/Four_colour_theorem
- http://www.mathpuzzle.com/4Dec2001.htm
- http://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_graph
- http://en.wikipedia.org/wiki/Tait's_conjecture
- http://en.wikipedia.org/wiki/Edge_contraction

## Cvičení

*9.5.4. Ukažte, že Petersenův graf nemá 1-faktorizaci. Návod: ukažte, že Petersenův graf nemá dobré hranové barvení třemi barvami (Taitovo hranové barvení).*

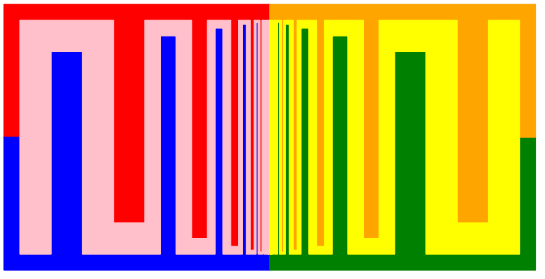
*9.5.5. Ukažte, že graf na Obrázku 9.32. nemá dobré hranové obarvení třemi barvami.*

*9.5.6. Martin Gardner publikoval v aprílovém čísle roku 1975 časopisu* Scientific American Magazine *v rubrice* Mathematical Games *mapu se 110 oblastmi (Obrázek 9.33.). Psal, že se uvedenou mapu (autorem obrázku je William McGregor) není možné obarvit čtyřmi barvami a jedná se tak o protipříklad k Větě o čtyřech barvách (Věta 9.13.). Vysvětlete!*



*Obrázek 9.33.: Mapa se 110 oblastmi.*

*9.5.7. V časopise* Scientific American Magazine *vyšel v roce 2003 článek „Color Madness“. Autorem článku je George Musser, který argumentuje, že na dobré obarvení oblastí v následujícím rovinném Obrázku 9.34. je potřeba alespoň šest barev. To je však v rozporu s Větou o čtyřech barvách (Věta 9.13.). Vysvětlete, v čem je problém.*

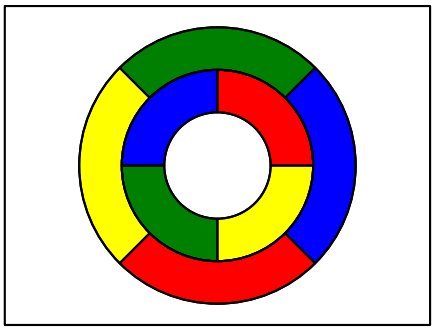


*Obrázek 9.34.: Šest oblastí v rovině.*

*9.5.8. Zkuste najít příklad podobný (rovinnému) obrázku z předchozího Cvičení 9.5.7. pro více než šest oblastí. Různé oblasti nepovažujeme za sousední, pokud mají společný pouze jeden bod na hranici.*

*9.5.9. Najděte chybu v následujícím důkazu, který uvádí protipříklad Věty o čtyřech barvách.*

*Mějme mapu jako na Obrázku 9.35. Bílé oblasti (i vnější) již nemůžeme obarvit čtvrtou barvou, protože každá hraničí s alespoň jednou oblastí obarvenou každou ze čtyř různých barev. Navíc každá obarvená oblast sousedí s oblastmi obarvenými každou ze zbývajících barev, proto nemůžeme některou*



*Obrázek 9.35.: Jako barvou obarvíme bílé oblasti?*

*oblast přebarvit a nepoužitou barvu použít na obarvení bílé oblasti. A konečně ani přebarvení dvou, tří a více oblastí nevede k redukci použitých barev.*

*9.5.10. Ukažte, že oblasti sudého rovinného grafu je možno dobře obarvit dvěma barvami.*

*9.5.11. Mějme následující mapu: bez újmy na obecnosti vezmeme obdélníkovou oblast, na jejím obvodu zvolíme dva různé body $A$, $B$ a spojíme je úsečkou $AB$. Postup opakujeme $k$-krát, vždy zvolíme dva body a spojíme je úsečkou, přičemž některé body na obvodu mohou být společné i pro více úseček. Dostaneme mapu oblastí obdélníka. Ukažte, že na dobré barvení oblastí stačí nejvýše dvě barvy.*

*9.5.12. Mějme následující mapu: bez újmy na obecnosti vezmeme obdélníkovou oblast, na jejím obvodu zvolíme tři různé body $A$, $B$ a $C$, uvnitř oblasti zvolíme jeden bod $X$ a spojíme je třemi úsečkami $XA$, $XB$ a $XC$. Postup opakujeme $k$-krát, vždy zvolíme tři různé body na hranici a jeden bod uvnitř oblastí tak, aby žádné dvě úsečky neměly s nově nakreslenými úsečkami žádný společný úsek, přičemž průsečíky i body na obvodu mohou být společné i pro více úseček. Dostaneme mapu oblastí obdélníka. Ukažte, že na dobré barvení oblastí stačí nejvýše tři barvy.*

*9.5.13. Mějme následující mapu: bez újmy na obecnosti vezmeme obdélníkovou oblast, na jejím obvodu zvolíme $n$ různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$, uvnitř oblasti zvolíme jeden bod $X$ a spojíme je $n$ úsečkami $XA_1$, $XA_2$, $\ldots XA_n$. Postup opakujeme $k$-krát, vždy zvolíme $k$ různých bodů na hranici a jeden bod uvnitř oblastí tak, aby žádné dvě úsečky neměly s nově nakreslenými úsečkami žádný společný úsek, přičemž průsečíky i body na obvodu mohou být společné i pro více úseček. Dostaneme mapu oblastí obdélníka. Ukažte, že na dobré barvení oblastí stačí nejvýše tři barvy.*

*9.5.14.* Ukažte, že Věta o čtyřech barvách (Věta 9.13.) je ekvivalentní tvrzení, že každý rovinný kubický graf je hranově 3-obarvitelný.*

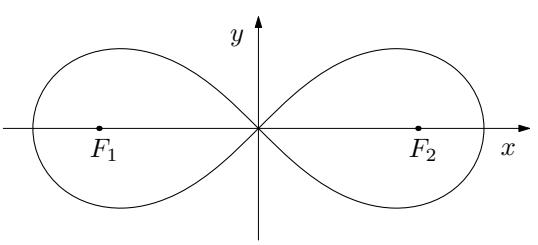
**Lemniskáta**

*Lemniskáta* (také Bernoulliho lemniskáta) je množina bodů $[x, y]$ v rovině, pro které platí

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \tag{11}$$

kde $a$ je polovina šířky lemniskáty. Parametrické rovnice lemniskáty o tzv. *šířce* $a$ jsou

$$x = \frac{a\sqrt{2}\cos t}{1 + \sin^2 t}, \qquad y = \frac{a\sqrt{2}\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \qquad \text{pro } t \in \langle 0, 2\pi).$$




Obrázek 9.36.: *Lemniskáta pro $a = 1$.*

Geometrická interpretace lemniskáty je následující. Máme dva body v rovině, $F_1$ a $F_2$, kterým říkáme ohniska a jejichž vzájemná vzdálenost je $2a$. Jedná se o množinu bodů v rovině, pro které je součin vzdáleností od ohnisek roven číslu $a^2$. Budou-li obě ohniska ležet na ose $x$ středově symetricky podle počátku, tak umocněním vztahu $|XF_1| \cdot |XF_2| = a^2$ dostaneme vztah

$$\left((x-a)^2+y^2\right)\left((x+a)^2+y^2\right) = a^2,$$

který můžeme upravit na jednodušší implicitní rovnici (11) (Cvičení 9.5.15.).

**Odkazy:**

- http://mathworld.wolfram.com/Lemniscate.html

## Cvičení

*9.5.15. Upravte rovnici $\left((x-a)^2+y^2\right)\left((x+a)^2+y^2\right) = a^4$ tak, abychom dostali rovnici (11).*

*9.5.16. Ukažte, že šířka lemniskátu je $2\sqrt{2}a$.*

### Catalanova čísla

Catalanova čísla $C_n$ se v kombinatorice říká posloupnosti přirozených čísel, která jsou určena vztahem

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{12}$$

Catalanova čísla se objevují při řešení celé řady kombinatorických úloh, které obvykle popisují strukturu, která se skládá z menších struktur stejného typu. Několik prvních Catalanových čísel pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ je

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, \ldots$$

Existuje několik dalších vztahů pro Catalanovo číslo $C_n$, například

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \tag{13}$$

nebo rekurentní předpis

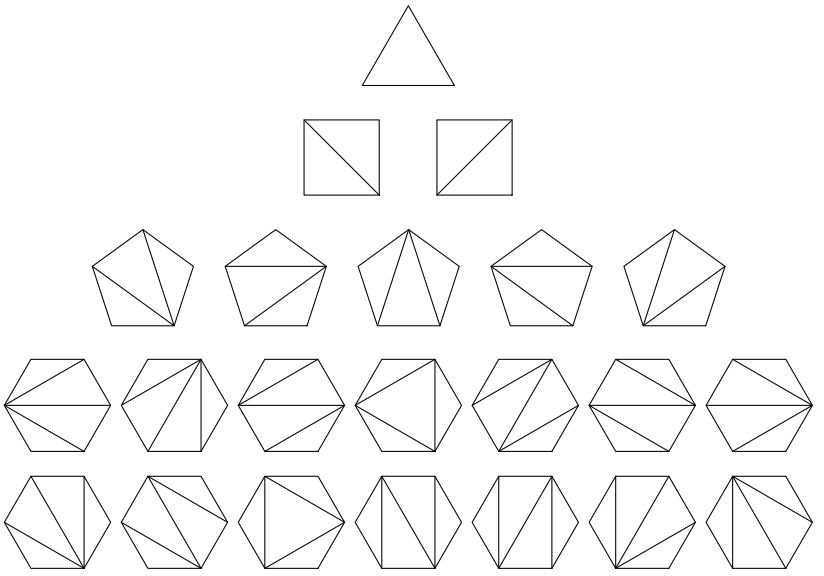
$$C_0 = 1, \quad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}. \tag{14}$$

Ze vztahu (13) i (14) je zřejmé, že $C_n$ je vždy celé číslo. Nyní uvedeme několik úloh, které všechny vedou přirozeně k zavedení Catalanových čísel.

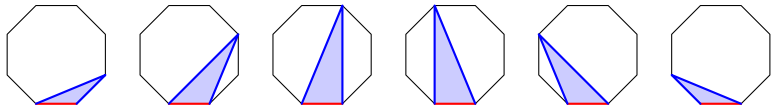
**Triangulace pravidelného $(n+2)$-úhelníku**

Počet různých triangulací pravidelného $(n+2)$-úhelníku je dán Catalanovým číslem $C_n$. Na Obrázku 9.37. jsou všechny triangulace pro malé hodnoty $n$. Trojúhelník má jedinou triangulaci, čtverec má dvě, pětiúhelník pět a šestiúhelník má 14 různých triangulací.

Nejprve ukážeme, že počet různých triangulací pravidelného $(n+2)$-úhelníku je dán rekurentním vztahem (14). Mějme nějaký pravidelný $(n+2)$-úhelník. Předpokládejme, že počet různých triangulací menších (konvexních) mnohoúhelníků známe a umíme je sestrojit. Zvolme nějakou pevnou stranu daného $(n+2)$-úhelníku. Tato strana je v každé triangulaci stranou jednoho z $n$ různých trojúhelníků (Obrázek 9.38.). Nyní každý barevně vyznačený trojúhelník rozdělí daný $(n+2)$-úhelník na nejvýše dva *menší* konvexní mnohoúhelníky s $i+2$, respektive $(n+1-i)$ stranami $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, pro které triangulace zkonstruovat umíme. Všimněte si, že počty triangulací menších částí mnohoúhelníků odpovídají podle předpokladu Catalanovým číslům $C_i$ a $C_{n-1-i}$. Podle kombinatorického pravidla součinu (strana 15) je počet triangulací v každém z případů dán součinem $C_i \cdot C_{n-1-i}$



Obrázek 9.37.: *Triangulace malých n-úhelníků.*



Obrázek 9.38.: *Odvození rekurentního vztahu pro počet triangulací* $(n+2)$*-úhelníku.*

a celkový počet triangulací daného $(n+2)$-úhelníku je dán rekurentním vztahem (14). Pro případ $n = 8$ na Obrázku 9.38. bychom dostali

$$C_0 = 1, \quad C_6 = \sum_{i=0}^{5} C_i C_{5-i} = C_0C_5 + C_1C_4 + C_2C_3 + C_3C_2 + C_4C_1 + C_5C_0.$$

Uvedené odvození také ukazuje, proč je definice $C_0 = 1$ šikovná.

**Uzávorkování pomocí $n$ párů závorek**

Tabulka 9.1. ukazuje všechna přípustná pořadí $n$ párů závorek pro malé hodnoty $n$. Přípustným uzávorkováním rozumíme každé takové pořadí závorek, které odpovídá platnému zápisu nějakého výrazu. Analogicky jako v předchozím odstavci můžeme odvodit počet různých přípustných uzávorkování pro libovolnou hodnotu $n$ (a současně taková uzávorkování zkonstruovat), jestliže umíme zkonstruovat všechna přípustná uzávorkování pro libovolný počet párů závorek *menší* než $n$.

| $n$ | Různá uzávorkování | Počet |
|---|---|---|
| 0 | | 1 možnost |
| 1 | () | 1 možnost |
| 2 | ()(), (()) | 2 možnosti |
| 3 | ()()(), ()(()), (())(), ((())) | 5 možností |
| 4 | ()()()(), ()()(()), ()(())(), ()((())), (())()(), (())(()), (()())(), ((()))(), (())()(), ((())()), ((()())) | 14 možností |

Tabulka 9.1.: *Různá uzávorkování pomocí n párů závorek.*

Všimneme si, že každá přípustná posloupnost závorek musí začínat „(“. Dále někde v posloupnosti závorek najdeme druhou odpovídající závorku „)“, přičemž podposloupnost $X$ mezi oběma závorkami musí sama o sobě tvořit přípustné uzávorkování a stejně tak zbývající podposloupnost $Y$ závorek *na konci* musí tvořit přípustnou posloupnost párů závorek:

$$(X)Y.$$

Obě podposloupnosti $X, Y$ obsahují celkem $n-1$ párů závorek, tj. pokud podposloupnost $X$ obsahuje $i$ párů, tak v podposloupnosti $Y$ jich najdeme $n-1-i$. Počet různých podposloupností $X$ pro pevnou hodnotu $i$ nijak nezávisí na konkrétním výběru podposloupnosti $Y$ a naopak, proto opět užitím kombinatorického pravidla součinu dostaneme celkový počet různých posloupností $n$ párů závorek jako součet všech přípustných součinů. Zavedeme-li úmluvu, že bez závorek je možno zapsat výraz jediným způsobem ($C_0 = 1$), dostáváme:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 C_0 \\ C_2 &= C_0 C_1 + C_1 C_0 \\ C_3 &= C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 \\ &\vdots \\ C_n &= C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} C_0 = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}. \end{aligned}$$

Vidíme, že počet přípustných pořadí $n$ párů závorek je určen vztahem (14).

**Pořadí operací v posloupnosti $n+1$ operandů**

Mějme nějakou binární operaci. Jestliže operace není asociativní, tak výsledek několika operací může záviset na pořadí, ve kterém $n$ operací mezi $n+1$ operandy provedeme. Tabulka 9.2. přehledně shrnuje pro malá $n$ počet různých možností, v jakém pořadí můžeme provést operace pro $n+1$ operandů, kdy $n = 0, 1, \ldots, 4$. Přirozeně vyvstává otázka, kolik takových pořadí existuje pro libovolnou hodnotu $n$.

| $n$ | Různá uzávorkování | Počet |
|---|---|---|
| 0 | | 1 možnost |
| 1 | $(a \star b)$ | 1 možnost |
| 2 | $((a \star b) \star c)$, $(a \star (b \star c))$ | 2 možnosti |
| 3 | $(((a \star b) \star c) \star d)$, $((a \star (b \star c)) \star d)$, $((a \star b) \star (c \star d))$, $(a \star ((b \star c) \star d))$, $(a \star (b \star (c \star d)))$ | 5 možností |
| 4 | $((((a \star b) \star c) \star d) \star e)$, $(((a \star b) \star c) \star (d \star e))$, $(((a \star b) \star (c \star d)) \star e)$, $((a \star b) \star ((c \star d) \star e))$, $((a \star b) \star (c \star (d \star e)))$, $(((a \star (b \star c)) \star d) \star e)$, $((a \star (b \star c)) \star (d \star e))$, $((a \star ((b \star c) \star d)) \star e)$, $((a \star (b \star (c \star d))) \star e)$, $(a \star (((b \star c) \star d) \star e))$, $(a \star ((b \star c) \star (d \star e)))$, $(a \star ((b \star (c \star d)) \star e))$, $(a \star (b \star ((c \star d) \star e)))$, $(a \star (b \star (c \star (d \star e))))$ | 14 možností |

Tabulka 9.2.: *Různá uzávorkování $n+1$ operandů v pevném pořadí.*

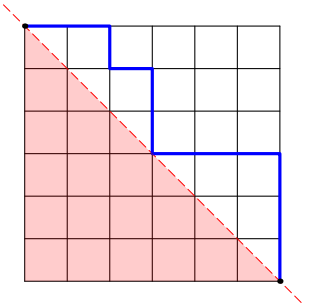
Z tabulky ihned vidíme, že počet různých přípustných posloupností $n$ párů závorek je stejný jako počet různých pořadí binárních operací mezi $n+1$ operandy. Totéž můžeme zdůvodnit obecně (Cvičení 9.5.18.). Všimněte si, že nestačí jednoduše smazat operandy a operátory.

**Otázka:** Počet různých přípustných posloupností $n$ párů závorek je stejný jako počet různých pořadí binárních operací mezi $n+1$ operandy. Proč nestačí říci, že každé pořadí operací je jednoznačně určeno nějakou přípustnou posloupností $n$ párů závorek a naopak? Vysvětlete v čem se obě úlohy liší.

**Monotónní cesty ve čtvercové síti**

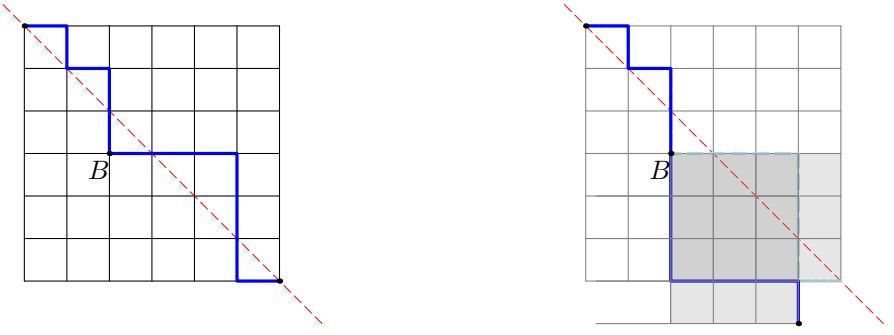
Mějme čtvercovou síť o rozměru $n$ krát $n$ čtverečků jako na Obrázku 9.39. Můžeme si představit, že se jedná o silniční síť v nějakém městě (třeba na Manhattanu).

Putujeme nejkratší cestou z levého horního rohu do pravého dolního rohu. Nejprve ukážeme, že všech takových (stejně dlouhých!) cest existuje $\binom{2n}{n}$. Celou cestu si můžeme představit jako posloupnost celkem $n$ svislých a $n$ vodorovných úseků. V této posloupnosti se vždy na některých $n$ křižovatkách rozhodneme putovat dolů „na jih“ (označíme symbolem 1) a putujeme po svislém úseku a na zbylých $n$ úsecích putujeme doprava „na východ“ po vodorovném úseku (označíme symbolem 0). Každá cesta je tak jednoznačně určena posloupností $n$ jedniček a $n$ nul. Takových posloupností je právě $P(n,n) = \frac{2n!}{n!n!} = \binom{2n}{n}$.



Obrázek 9.39.: *Cesta ve čtvercové síti, které neklesne pod diagonálu.*

Nyní se ptáme, kolik cest nikdy neklesne pod naznačenou diagonálu (Broadway). Pro úplnost upozorníme, že „dotknout“ se diagonály během putování je dovoleno. Ukážeme, že počet hledaných cest je určen právě Catalanovým číslem $C_n$. Už víme, že všech cest, kdy putujeme pouze doprava nebo dolů je $\binom{2n}{n}$. Nyní spočítáme cesty, které sice prochází sítí vždy pouze doprava a dolů, avšak které protnou diagonálu. Na Obrázku 9.40. vlevo máme jednu z takových nepřípustných cest.




Obrázek 9.40.: *Překlopení části nepřípustné cesty.*

Na každé nepřípustné cestě označíme první křížení, které je pod diagonálou, jako bod $B$. Nepřípustná cesta může diagonálu křížit samozřejmě několikrát, bod $B$ je však určen jednoznačně jako první takové místo. Nyní můžeme zbývající úsek cesty za bodem $B$ „překlopit“, tj. každý vodorovný úsek nahradíme svislým a naopak. Takové cestě budeme říkat *překlopená cesta*. Ukážeme, že překlopená cesta vždy končí o jeden úsek vlevo a jeden úsek dolů oproti původní cestě (Obrázek 9.40. vpravo), neboť pokud jsme před bodem $B$ putovali $k$-krát doprava (a $(k+1)$-krát dolů), tak nám zbývá putovat $(n-k)$-krát doprava a $(n-k-1)$-krát dolů. Po překlopení příslušného úseku cesty za bodem $B$ tak budeme putovat celkem $k+(n-k-1) = n-1$ úseků doprava a $(k+1)+(n-k) = n+1$ úseků dolů.

Klíčové pozorování je, že každé nepřípustné cestě odpovídá právě jedna překlopená cesta a každé překlopené cestě (do bodu $n-1$ úseků vpravo a $n+1$ úseků dolů od výchozího bodu) odpovídá právě jedna nepřípustná cesta. To znamená, že nepřípustných cest existuje právě tolik, kolik je překlopených cest. Počet všech překlopených cest není těžké vypočítat. Postupujeme podobně, jako když jsme počítali všechny cesty ve čtvercové síti. Nyní mezi $2n$ úseky vybereme $n+1$ úseků, kdy budeme putovat dolů. Takových překlopených cest je $\binom{2n}{n+1}$. Odečteme-li počet nepřípustných (překlopených) cest od počtu všech cest ve čtvercové síti, dostaneme vztah (13):

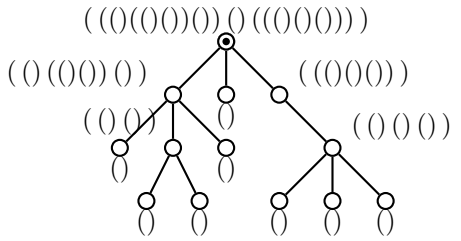
$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1},$$

který udává počet cest, které nikdy neklesnou pod naznačenou diagonálu.

**Počet různých pěstovaných kořenových stromů s $n+1$ vrcholy**

Pěstovaný kořenový strom je takový kořenový strom, ve kterém je jednoznačně určeno pořadí potomků každého vrcholu, který není koncovým vrcholem.

V předmětu Diskrétní matematika jsme ukázali, že každý pěstovaný kořenový strom s $n$ vrcholy je možno jednoznačně popsat pomocí $n$ párů závorek, přičemž každý počáteční řetězec závorek musí obsahovat *více* otvíracích závorek, než uzavíracích závorek. Kód koncového vrcholu pěstovaného kořenového stromu je jednoznačně určen dvojicí závorek „()“. Kód každého vrcholu $v$ se sestavuje rekurzivně z kódů jeho potomků ve stejném pořadí, v jakém jsou seřazeny kódy potomků vrcholu $v$. Tyto kódy jsou uzavřeny do jednoho páru závorek, a tak vznikne kód vrcholu $v$.




Obrázek 9.41.: *Pěstovaný kořenový strom s* 13 *vrcholy a sestaveným kódem.*

Oproti uzávorkování pomocí $n$ párů závorek popsanému na straně 200 to znamená, že celá přípustná posloupnost $n$ závorek je vždy uzavřena do jednoho páru závorek, který odpovídá kořenu. Kódem pěstovaného stromu je kód jeho kořene. Proto počet různých pěstovaných kořenových stromů s $n+1$ vrcholy odpovídá *obsahu* vnější dvojice závorek, což je nějaká přípustná posloupnost uzávorkování pomocí $n$ párů závorek.

Už víme (dle popisu na straně 200), že počet takových přípustných pořadí $n$ párů závorek je určen vztahem (14). Vztah (14) udává současně počet různých pěstovaných kořenových stromů s $n+1$ vrcholy.

Řetězec závorek je ke každému pěstovanému kořenovému stromy určen jednoznačně. A pokud zavedeme úmluvu, která pro každý strom určí jednoznačně jeho kořen (například v centru stromu, které je podle Věty 3.6. určeno jednoznačně) a pro libovolný kořenový strom jednoznačně určí pořadí jeho potomků (například lexikograficky dle kódů odpovídajících podstromů), tak můžeme každému stromu jednoznačně přiřadit nějaký kód $n$ párů závorek. Tento kód pak umožní efektivně rozhodnout o izomorfismu daných stromů.

**Další úlohy vedoucí ke Catalanovým číslům**

Existují desítky různých kombinatorických problémů, při jejichž řešení narazíme na Catalanova čísla. Na závěr zmíníme několik z nich.

Mějme $2n$ lidí ve frontě na lístky do divadla. Jeden lístek stojí 100 Kč a každý člověk ve frontě má jen buď stokorunu nebo dvousetkorunu, přičemž právě $n$ lidí má dvousetkoruny. Pokladní začíná s prázdnou kasou a do dvousetkoruny může vydat pouze, když v pokladně má nějakou stokorunu. Kolik existuje různých pořadí lidí (rozlišujme jen stokoruny a dvousetkoruny), kdy pokladní bude vždy moci vrátit do dvou stovek? (Cvičení 9.5.19.)

Poslední úlohu, kterou zmíníme, bychom mohli nazvat „Podávání rukou podle etikety“. Máme kulatý stůl pro $2n$ osob. Lidé si navzájem přes stůl podávají ruce, mohou tak vytvořit až $2n$ párů. Považuje se za neslušné, pokud by se měly při podávání rukou některé dvojice křížit. Počet různých způsobů, jak si $2n$ lidí může současně podat ruce podle etikety je opět určen právě Catalanovým číslem $C_n$.

## Odkazy:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number
- http://demonstrations.wolfram.com/EquivalenceOfThreeCatalanNumberInterpretations/
- více než 190 problémů souvisejících s Catalanovými čísly http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf

## Cvičení

*9.5.17. Ukažte, že a) vztahy (12) a (13) b) vztahy (12) a (14) pro Catalanova čísla jsou ekvivalentní.*

*9.5.18. Ukažte, že počet různých pořadí operací mezi $n+1$ operandy přesně odpovídá počtu různých přípustných posloupností $n$ párů závorek.*

*9.5.19. Ve frontě na lístky čeká $n$ lidí se stokorunou a $n$ lidí s dvousetkorunou. Jeden lístek stojí sto korun a pokladna začíná s prázdnou kasou. Do dvousetkoruny může pokladní vydat pouze, když v pokladně má nějakou stokorunu. a) Kolik existuje různých pořadí stokorun a dvousetkorun, kdy pokladní bude vždy moci vrátit do dvou stovek? b) S jakou pravděpodobností projde nakupování hladce, jestliže předpokládáme každou posloupnost stokorun a dvousetkorun za stejně pravděpodobnou?*

*9.5.20. Ukažte, že různých způsobů, jak si $2n$ lidí kolem kulatého stolu může současně podat ruce tak, aby se žádně dvojice rukou nekřížily je určen Catalanovým číslem $C_n$.*

**Kazimierz Kuratowski (2. února 1896 – 18. června 1980)**

Kazimierz Kuratowski se narodil v carském Rusku ve Varšavě. V roce 1913 začal inženýrské studium na Glasgowské univerzitě ve Skotsku. První světová válka studium překazila. V roce 1915 začal Kuratowski znovu studovat na Varšavské univerzitě a v roce 1921 získal doktorát z matematiky. Stal se profesorem matematiky na Lvovské polytechnice (1927) a od roku 1934 na Varšavské univerzitě.

Kazimierz Kuratowski byl členem známé skupiny Polských matematiků, kteří se pravidelně setkávali ve Lvovské Skotské kavárně (Scottish Café).

Obrázek 9.42.: *Kazimierz Kuratowski a Skotská kavárna ve Lvově.*

**Odkazy:**

- http://en.wikipedia.org/wiki/Kazimierz_Kuratowski

**Eugène Charles Catalan (30. května 1814 – 14. února 1894)**

Eugène Charles Catalan byl belgický a francouzský matematik. Narodil se 1914 v Bruges, které tehdy bylo součástí Napoleonské Francie, dnes je součástí Belgie. V roce 1825 odcestoval do Paříže aby studoval matematiku na École Polytechnique. Ačkoliv byl 1834 vyloučen, dostudoval na Châlons-sur-Marne. Později se vrátil na École Polytechnique a dostudoval v roce 1841. Byl politicky aktivní, účastnil se revoluce v roce 1848.

Obrázek 9.43.: *Eugène Charles Catalan.*

Od roku 1865 byl vedoucím pracovníkem oddělení analýzy na Univerzitě v Liège. V roce 1844 publikoval slavnou Catalanovu hypotézu, že $8 = 2^3$ a $9 = 3^2$ jsou jediné dvě po sobě jdoucí mocniny, tj. rovnice $x^p - y^q = 1$ má v přirozených číslech jediné řešení $3^2 - 2^3 = 1$. Hypotézu dokázal až v roce

2002 rumunský matematik Preda Mihăilescu. Catalan také zavedl Catalanova čísla (strana 199), která se často vyskytují při řešení kombinatorických úloh.

**Odkazy:**

- http://en.wikipedia.org/wiki/Eugene_Charles_Catalan

# Kapitola 10. Neplanární grafy

V předchozí kapitole jsme se věnovali planárním grafům. Má však smysl studovat i neplanární grafy a v této souvislosti je rozumné položit si otázku „jak moc“ je daný graf neplanární. Míru neplanarity je možné popsat několika způsoby. Některé z nich zmíníme.

Pokud daný graf $G$ není planární, tak neexistuje jeho rovinné nakreslení. V dalším budeme předpokládat, že máme takové nakreslení neplanárního grafu, že

1) žádná hrana neprotíná sama sebe,
2) dvě závislé hrany se neprotínají,
3) dvě nezávislé hrany se protínají nejvýše jednou,
4) v jednom bodě roviny se protínají nejvýše dvě hrany.

Pokud by některá z uvedených vlastností měla být porušena, umíme se příslušnému křížení vždy vyhnout vhodným překreslením daného grafu, jak jsme ukázali na straně 178 (Obrázky 9.7. a 9.8.).

## 10.1. Průsečíkové číslo

Mírou neplanarity může být například nejmenší nutný počet křížení v nějakém nakreslení daného grafu.

**Definice** *Průsečíkové číslo* grafu $G$ je nejmenší počet průsečíků hran mezi všemi takovými nakresleními grafu $G$ do roviny, ve kterých se v žádném bodě neprotínají více než dvě hrany. Průsečíkové číslo grafu $G$ se značí $\nu(G)$.

Podle definice je graf $G$ planární, právě když $\nu(G) = 0$. Je zřejmé, že je-li $H$ podgrafem grafu $G$, tak platí $\nu(H) \leq \nu(G)$. Navíc je-li $H$ rozdělením grafu $G$, jistě platí $\nu(H) = \nu(G)$.

Průsečíkové číslo je známo jen pro velmi málo obecných tříd grafů. I pro velké kompletní a kompletní bipartitní grafy jsou známy jen horní odhady, které vyplývají z konstrukce konkrétního nakreslení. Pro ilustraci uvedeme následující dvě tvrzení.

**Věta 10.1.** *Pro úplný graf $K_n$ platí*

$$\nu(K_n) \leq \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor,$$

*přičemž pro $1 \leq n \leq 11$ nastává rovnost.*

**Věta 10.2.** *Pro úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ platí*

$$\nu(K_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor,$$

*přičemž pro $\min\{m, n\} \leq 6$ nastává rovnost.*

Polský matematik Kazimierz Zarankiewicz vyslovil v roce 1954 hypotézu, že ve Větě 10.2. nastává vždy rovnost. Zatím se podařilo tuto hypotézu dokázat jen pro $\min\{m, n\} \leq 6$ a několik málo dalších hodnot.

### Dolní odhad průsečíkového čísla

Při určování průsečíkového čísla konkrétního grafu s pravidelnou strukturou můžeme využít Eulerův vzorec a jeho důsledky. Snadno odvodíme následující tvrzení.

**Lemma 10.3.** *Pro každý graf $G$ s alespoň třemi vrcholy platí $\nu(G) \geq h(G) - 3v(G) + 6$.*

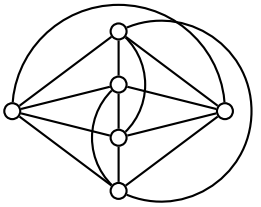
*Důkaz.* Mějme dán graf $G$. Označme $r$ nejmenší počet hran, který je nutné z grafu $G$ odstranit, abychom dostali planární graf $H$. Jistě platí $r \leq \nu(G)$. V jednoduchém rovinném grafu $H$ s alespoň třemi vrcholy je každá oblast

ohraničena alespoň třemi hranami, a tak jsme v Důsledku 9.7. ukázali, že $h(H) \leq 3v(H) - 6$. Nyní protože $v(H) = v(G)$ a $h(G) - r = h(H)$ odvodíme

$$\begin{aligned} h(H) &\leq 3v(H) - 6 \\ h(G) - r &\leq 3v(G) - 6 \\ r &\geq h(G) - 3v(G) + 6 \\ \nu(G) &\geq h(G) - 3v(G) + 6. \end{aligned}$$

Pro grafy s menším počtem vrcholů uvedený vztah neplatí. □

Například pro graf $K_6$ je proto $\nu(K_6) \geq 15 - 18 + 6 = 3$, a protože existuje takové nakreslení grafu $K_6$, ve kterém jsou pouze tři průsečíky (Obrázek 10.1.), tak víme, že $\nu(K_6) = 3$. Podobně lze určit průsečíkové číslo pro řadu speciálních grafů (Cvičení 10.1.4. a 10.1.6.), avšak určení průsečíkového čísla obecného grafu není tímto přístupem možné.



Obrázek 10.1.: *Nakreslení grafu $K_6$ se třemi průsečíky.*

**Otázky:**

- Označme $r$ nejmenší počet hran, který je nutné z grafu $G$ odstranit, abychom dostali planární graf $H$. Proč nemůže obecně říci, že $r = \nu(G)$?
- Proč nemá smysl použít dolní odhad $\nu(G) \geq h(G) - 3v(G) + 6$ pro všechny grafy?

## Cvičení

*10.1.1. Určete $\nu(K_{3,3})$ bez použití Věty 10.2.*

*10.1.2. Určete $\nu(K_{2,2,2})$.*

*10.1.3. Určete $\nu(K_{1,2,3})$.*

*10.1.4. V Lemmatu 10.3. Na straně 207 jsme odvodili dolní odhad průsečíkového čísla kompletních grafů. Odvoďte podobný přísnější odhad pro kompletní bipartitní grafy.*

*10.1.5. Určete $\nu(K_{4,4})$ bez použití Věty 10.2.*

*10.1.6. Určete průsečíkové číslo Petersenova grafu.*

*10.1.7. Ukažte, že nejmenší počet hran, které je nutno z neplanárního grafu $G$ odstranit, aby výsledný graf byl planární, může být (ostře) menší než průsečíkové číslo grafu $G$.*

*10.1.8. Najděte příklad grafu, jehož průsečíkové číslo je větší než 1 a přitom stačí odebrat jedinou hranu, aby výsledný graf byl planární.*

*10.1.9. Pro grafy bez trojúhelníků a s alespoň třemi vrcholy najděte a dokažte silnější dolní odhad průsečíkového čísla než dává Lemma 10.3.*

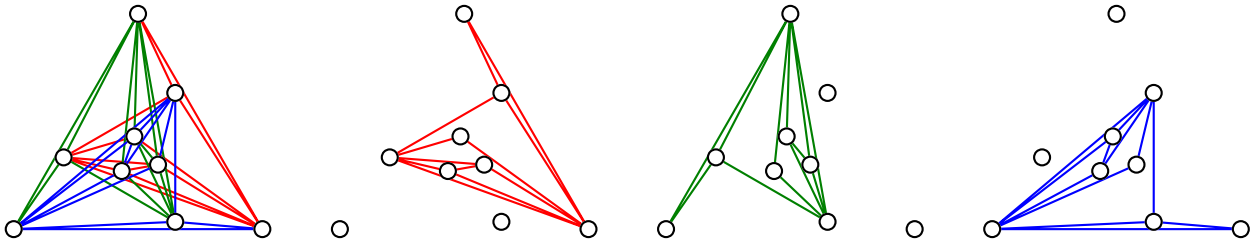
*10.1.10. Mějme graf $G$ s obvodem $g$. Najděte a dokažte silnější dolní odhad průsečíkového čísla grafu $G$, než dává Lemma 10.3.*

## 10.2. Tloušťka grafu

Jiným způsobem charakterizace neplanarity je „tloušťka grafu," která přímo souvisí s navrhováním vícevrstevných tištěných spojů (viz také strana 186).

**Definice** *Tloušťka grafu $G$* je nejmenší počet planárních faktorů, na které je možno graf $G$ rozložit. Tloušťka grafu se značí $\theta(G)$.

Na Obrázku 10.2. je rozklad neplanárního kompletního grafu $K_9$ na tři planární faktory. Proto jistě je $\theta(K_9) \leq 3$.



Obrázek 10.2.: *Rozklad grafu $K_9$ na tři rovinné faktory.*

Určit tloušťku obecného grafu není snadné. Avšak odhadnout minimální počet planárních faktorů není těžké. Důkaz následující věty je ponechán jako Cvičení 10.2.2.

**Věta 10.4.** *Pro tloušťku grafu $G$ s alespoň třemi vrcholy platí $\theta(G) \geq \left\lceil \frac{h(G)}{3v(G)-6} \right\rceil$.*

Tloušťka kompletních grafů a několika dalších tříd grafů, je známa přesně. Následující tvrzení uvedeme bez důkazu.

**Věta 10.5.** *Pro úplné grafy $K_n$, kde $n \neq 9, 10$ platí $\theta(K_n) = \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor$ a pro grafy $K_9$ a $K_{10}$ platí $\theta(K_9) = \theta(K_{10}) = 3$.*

Všimněte si, že z uvedeného výsledku vyplývá, že rozklad na Obrázku 10.2. je nejlepší možný a platí tedy $\theta(K_9) = 3$.

Dále si všimněte, že odhad daný Větou 10.4. je pro kompletní grafy překvapivě dobrý (Cvičení 10.2.9.). S výjimkou právě grafů $K_9$ a $K_{10}$ je dolní odhad daný Větou 10.4. přesný. Pro grafy $K_9$ a $K_{10}$ dává Věta 10.4. odhad $\theta(K_9) \geq \left\lceil \frac{36}{21} \right\rceil = 2$ a podobně $\theta(K_{10}) \geq \left\lceil \frac{45}{24} \right\rceil = 2$, avšak podle Věty 10.5. víme, že $\theta(K_9) = \theta(K_{10}) = 3$.

## Cvičení

*10.2.1. Existuje relace uspořádání mezi čísly $\nu(G)$ a $\theta(G)$ pro všechny grafy $G$? Jestliže ano, nalezněte nějakou. Jestliže ne, uveďte protipříklad.*

*10.2.2.$^{\heartsuit}$ Dokažte Větu 10.4., že tloušťka grafu $G$ s alespoň třemi vrcholy je alespoň $\left\lceil \frac{h(G)}{3v(G)-6} \right\rceil$.*

*10.2.3. Bez užití Věty 10.5. ukažte, že a) $\theta(K_8) = 2$, b) $\theta(K_{11}) = 3$, c)$^{*}$ $\theta(K_{12}) = 3$.*

*10.2.4. Mějme graf $G$ a libovolný jeho podgraf $H$. Ukažte, že $\theta(H) \leq \theta(G)$.*

*10.2.5. Najděte příklad grafu, jehož tloušťka je větší než $\left\lceil \frac{h(G)}{3v(G)-6} \right\rceil$.*

*10.2.6. Vyslovte a dokažte přesnější odhad průsečíkového čísla pro bipartitní grafy, než dává Lemma 10*

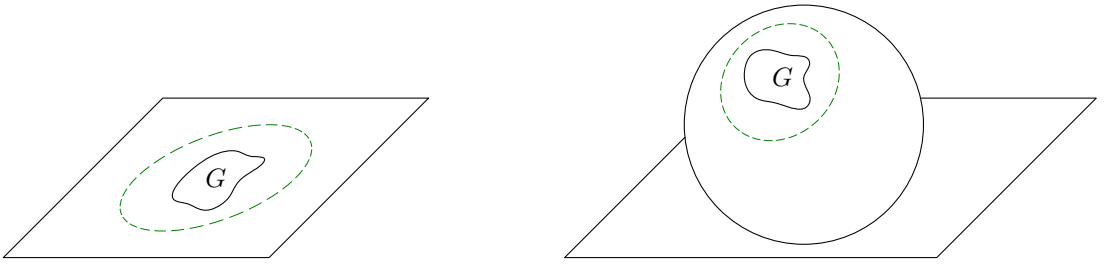
*10.2.7. Vyslovte a dokažte přesnější odhad průsečíkového čísla pro souvislé grafy s obvodem $g$, než dává Lemma 10.3.*

*10.2.8. Najděte příklad grafu a) tloušťky 2, jehož libovolný vlastní podgraf je tloušťky 1, b)$^{?}$ tloušťky 3, jehož libovolný vlastní podgraf je tloušťky 2.*

*10.2.9. Ukažte, že dolní odhad z Věty 10.4. je přesný pro všechny hodnoty $n \geq 3$ kromě $n = 9, 10$.*

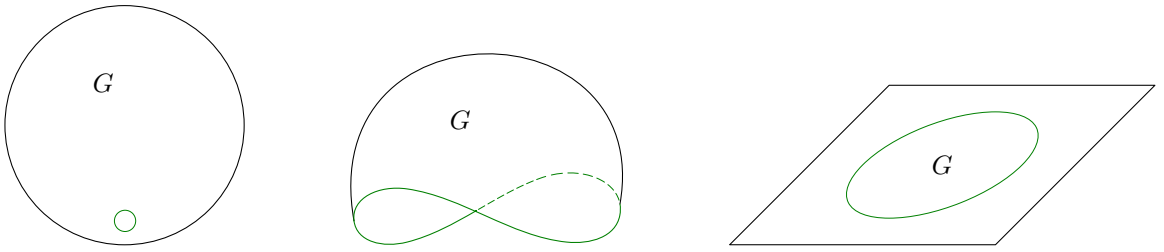
## 10.3. Rod grafu

Je zajímavé si uvědomit, že co se průsečíků týká, je kreslení grafu do roviny totožné s kreslením grafu na sféru. Neformálně si může představit, že pro kreslení máme rovinu (i sféru) vyrobenou z pružného materiálu. Zakreslíme-li konečný graf do roviny, zabírá vždy konečnou část a tak můžeme vyříznout dostatečně velkou oblast, kterou „zabalíme a nafoukneme“ nebo jen mírně natáhneme a přiložíme na kouli, přičemž nakreslení grafu se jen malinko zdeformuje (Obrázek 10.3.). Jistě tak nezmění struktura grafu ani nevzniknou žádná nová křížení hran.




Obrázek 10.3.: *Transformace rovinného nakreslení grafu na sféru.*

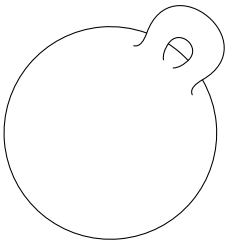
Naopak, máme-li graf nakreslený na sféře, tak vždy můžeme vyříznout část nějaké oblasti (stačí i jediný bod) tak, abychom neodstranili žádný vrchol ani bod křivky hran. Opět „rozbalením“ a natažením okrajů vyříznuté části můžeme sféru natáhnout do roviny, přičemž struktura zakresleného grafu zůstane nezměněna (Obrázek 10.4.).




Obrázek 10.4.: *Transformace nakreslení grafu ze sféry do roviny.*

Pro formální popis ekvivalence obou nakreslení můžeme najít spojité bijektivní zobrazení mezi rovinou a povrchem koule, například stereografickou projekci[32]. Avšak existují složitější topologické plochy, na kterých můžeme nakreslit bez průsečíků hran i některé grafy, které nejsou planární. Všimněte si, že planární grafy můžeme bez průsečíků nakreslit na libovolnou plochu, postupovat můžeme podobně jako na Obrázku 10.3. Například grafy $K_5$ a $K_{3,3}$ můžeme bez protínání hran zakreslit na torus (Obrázek 10.7., Cvičení 10.3.1.), avšak grafy $K_8$ nebo $K_{4,5}$ nikoliv. S tím souvisí poslední parametr neplanarity, tzv. *rod*. Souvisí přímo s topologickým pojmem *rod plochy*.

Rovina i sféra jsou plochy rodu nula. Neformálně zavedeme rod plochy jako počet „uší,“ která můžeme ke sféře připojit[33]. Jestliže je graf $G$ nakreslený na ploše tak, aby se hrany neprotínaly, tak říkáme, že $G$ je do plochy *vnořen* (Obrázek 10.5.). Není těžké si rozmyslet, že každý graf můžeme vnořit do plochy dostatečně vysokého rodu. Proto má následující definice smysl.



Obrázek 10.5.: *Plocha rodu 1 – kulová plocha s jedním přidaným uchem.*

[32] O stereografické projekci je psáno na straně 190.

[33] Správně česky je počet „uch“, neboť se jedná o ucha neživotná, často se však neformálně hovoří o uších.

**Definice Rod grafu**
*Rod grafu* $G$ je nejmenší rod plochy, do které je možno graf $G$ vnořit (zakreslit tak, aby se hrany neprotínaly). Rod grafu $G$ budeme značit $\gamma(G)$.

Zmíníme dva výsledky týkající se kompletních a kompletních bipartitních grafů. Jejich důkaz je nad rámec tohoto textu.

**Věta 10.6.** *Pro $n \geq 3$ platí*

$$\gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil .$$

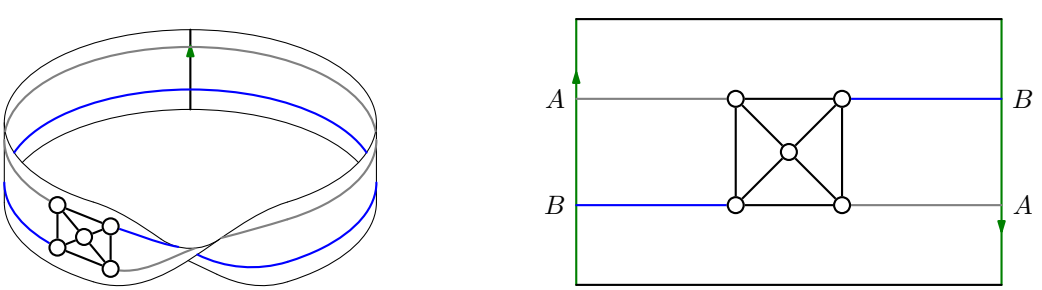
**Věta 10.7.** *Pro $m, n \geq 2$ platí*

$$\gamma(K_{m,n}) = \left\lceil \frac{(n-2)(m-2)}{4} \right\rceil .$$

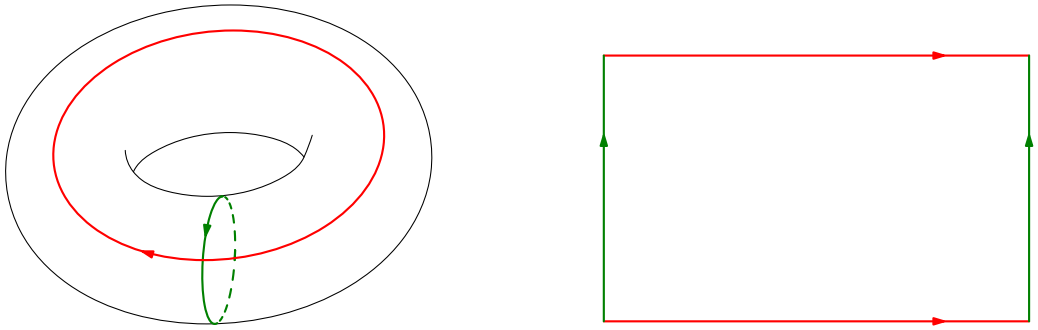
**Vnoření grafu do jiných ploch než do roviny.**
Na straně 176 jsme nadefinovali rovinné grafy, o zakreslování do roviny a na sféru jsme psali na straně 9.1. a na začátku této podkapitoly (strana 10.3.). Mějme graf vnořen do plochy, tj. máme nakreslení grafu do plochy, ve kterém se hrany nekříží. Takové nakreslení grafu se nazývá *vnoření*.

Když při kreslení na torus (správně při vnořování do toru) nebo do Möbiova listu nevystačíme s představivostí, nemusíme mít k dispozici trojrozměrný model. Využijeme tzv. *rozvinutí* do roviny. Představme si, že máme torus vyrobený z pružného materiálu. Rozřízneme-li torus napříč (řez je označen zelenou šipkou na Obrázku 10.6.) a podél (řez podle červené šipky), dostaneme plochu, kterou můžeme „rozvinout“ (natáhnout a vyrovnat) do obdélníku v rovině, přičemž hranice obdélníku odpovídají okrajům řezu (Obrázek 10.6.). S výhodou využijeme, že ve skutečnosti je čára řezu jen myšlená a každý bod na hranici vpravo odpovídá nějakému bodu na hranici vlevo. Podobně při kreslení „přes horní okraj“ pokračujeme na dolním okraji. Při kreslení na Möbiův list vystačíme s jediným řezem (Obrázek 10.8.). Kreslíme-li více průsečíků (bodů) na hranici musíme na odpovídajících stranách dodržet jejich pořadí vzhledem k orientaci šipek řezů (Obrázky 10.7. a 10.8.).

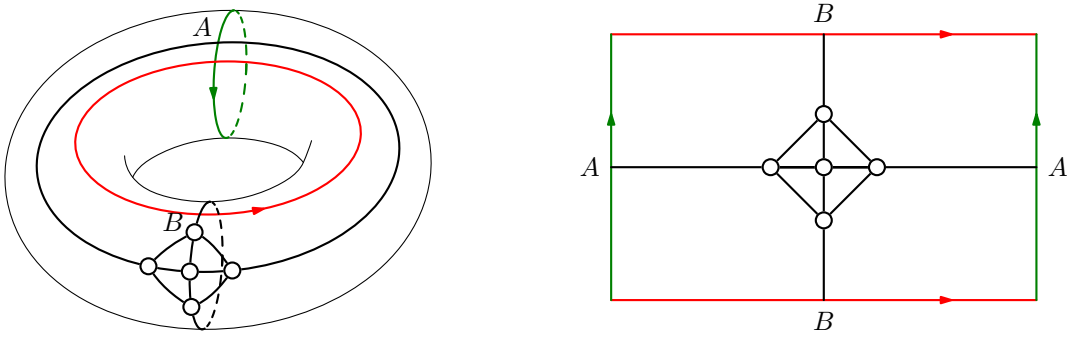
Je třeba zdůraznit že při každém kreslení do roviny i na Möbiův list chápeme plochu jako *rovinný útvar*. Podstatné je, že zakreslený bod nebo křivka leží *v ploše*, poněkud nepřesně bychom mohli říci, že leží „současně na obou stranách“ plochy. Tento fakt je významný zejména při kreslení na Möbiův list (Obrázek 10.8.), neboť na rozdíl od toru, sféry či roviny se nejedná o orientovatelnou plochu. Kreslíme-li na orientovatelnou plochu jako torus, sféru nebo na rovinu, tak vystačíme s (nesprávnou!) představou, že malujeme na povrch nějakého třírozměrného objektu, neboť vždy umíme rozlišit „horní“ a „dolní“ stranu plochy. U Möbiova listu je však taková představa zavádějící. Můžete si vyzkoušet, že při kreslení obyčejnou tužkou na stočený a slepený papírový proužek (Obrázek 2.20.) se *nepodaří* zakreslit graf $K_5$ bez křížení hran. Problémem je, že při kreslení na papírový model leží zakreslený bod nebo křivka vždy *na jedné straně* papíru. Můžeme kreslit souvislou čáru a „doputovat“ na opačnou stranu papíru, kde křivka zakreslena není. Všimněte si, že takový model vlastně neodpovídá interpretaci rozvinutého Möbiova listu na Obrázku 10.8. vpravo. Lepší interpretace je malování „prosakujícím“ inkoustem, kdy každý zakreslený bod nebo křivka leží *v ploše* Möbiova listu a je „vidět“ z obou stran plochy, tj. jsou do plochy *vnořeny*.




Obrázek 10.8.: *Nakreslení grafu $K_5$ na Möbiův list a příslušné rozvinutí do roviny.*



Obrázek 10.6.: *Rozvinutí toru do roviny pro přehledné kreslení.*




Obrázek 10.7.: *Nakreslení grafu $K_5$ na torus a příslušné rozvinutí toru do roviny.*

Pro plochy rodu $g$ platí obecnější verze Eulerova vzorce. Mějme graf $G$ vnořen do plochy rodu $g$ tak, že každá jeho oblast je topologicky ekvivalentní otevřenému disku (tj. hranice oblasti je Jordanovská křivka a oblast neobsahuje žádná „ucha“ ani „díry“ na rozdíl od toru, pláště válce nebo Möbiova pásku a podobně). Potom lze dokázat, že pro každé takové vnoření grafu $G$ platí

$$v(G) - h(G) + o(G) = 2 - 2g.$$

## Cvičení

*10.3.1. Nakreslete vnoření a) grafu $K_{3,3}$ do toru, b) grafu $K_{4,4}$ do toru.*

*10.3.2. Nakreslete vnoření a) grafu $K_5$ na Möbiův pásek, b) grafu $K_{3,3}$ na Möbiův pásek.*

*10.3.3. Nakreslete vnoření a) grafu $K_6$ do toru, b) grafu $K_7$ do toru.*

*10.3.4. Ukažte, že pro plochy rodu většího než 0 obecně nemá smysl definovat bez dalšího omezení počet oblastí grafu nakresleného (*vnořeného*) na takovou plochu.*

*10.3.5.* Ukažte, že pro graf $G$ vnořený do toru platí $v(G) - h(G) + o(G) \geq 0$.*

*10.3.6. Užitím vztahu ze Cvičení 10.3.5. ukažte, že pro graf $G$ vnořený do toru musí platit $h(G) \leq 3v(G)$.*

*10.3.7. Ukažte, že kompletní graf $K_8$ není možno vnořit do toru.*

*10.3.8. Ukažte, že chromatické číslo grafu, který lze vnořit do toru, je nejvýše 7.*

*10.3.9. Ukažte, že každý graf $G$, pro který platí $\nu(G) = 1$, můžeme zakreslit na Möbiův pásek bez křížení hran.*

*10.3.10. Ukažte, že Petersenův graf je možno vnořit do Möbiova pásku.*

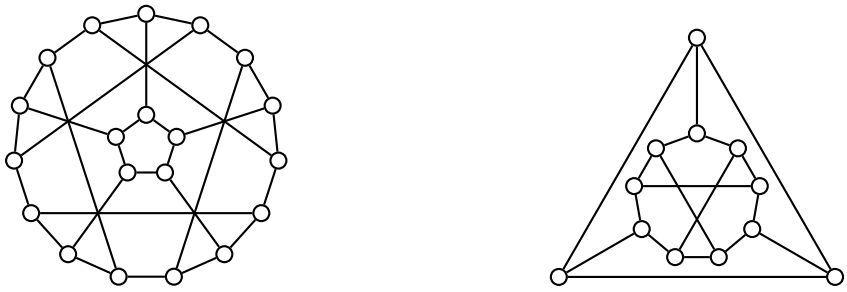
*10.3.11.? Existuje graf $G$, pro který platí $\nu(G) = 2$, a nemůžeme jej zakreslit na Möbiův pásek bez křížení hran.*

## 10.4. Doplňková témata

### Snark

*Snark* v teorii grafů je souvislý kubický graf bez mostů s chromatickým indexem 4. Podle Vizingovy věty jsou proto všechny snarky grafy třídy 2. Snark tedy nemá dobré hranové barvení třemi barvami (Taitovo barvení), nemá 1-faktorizaci. Snarků existuje nekonečně mnoho. Na Obrázku 10.9. je Flower snark (jeden z 6 snarků na 20 vrcholech) a Tietzův graf na 12 vrcholech, který je druhý nejmenší snark. Nejmenší snark je Petersenův graf (Obrázek 4.10.).

Obvykle požadujeme, aby snark neměl triviální hranový řez mohutnosti 3 (mohli bychom snark zmenšit) ani cykly délky menší než 5 (obvod menší než 5), neboť bychom mohli příslušný graf zmenšit.



Obrázek 10.9.: *Flower snark a Tietzův graf.*

Snarky se staly zajímavé díky výsledku P.G. Taita, který v roce 1880 ukázal, že hypotéza o čtyřech barvách je ekvivalentní tvrzení, že neexistuje žádný rovinný snark. První známý snark našel Petersen v roce 1898. Dlouho nebyl znám žádný jiný snark. Další objevil až v roce 1946 Blanuša. Dnes je známa řada konstrukcí nekonečných tříd snarků. Snad právě kvůli tomu, že se snarky těžko hledaly, pojmenoval Martin Gardner v roce 1976 tyto grafy „snark“ podle záhadného a nepolapitelného tvora z básně „The Hunting of the Snark“ od Lewise Carrolla[34].

**Otázka:** Existují rovinné snarky?

### Odkazy:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Snark_(graph_theory)
- Báseň od Lewise Carrolla „The Hunting of the Snark“ http://www.gutenberg.org/ebooks/13
- http://en.wikipedia.org/wiki/The_Hunting_of_the_Snark

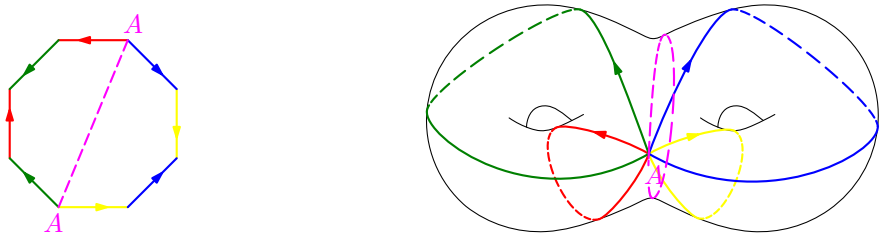
## Cvičení

*10.4.1. Ukažte, že snarky na Obrázku 10.9. nejsou planární.*

*10.4.2.♡ Může existovat snark, který je hamiltonovský?*

### Dvojtorus

Dvojtorus je plocha rodu 2. Můžeme jej rozvinout do osmiúhelníku v rovině (Obrázek 10.10.). Do dvojtoru je možno vnořit grafy $K_8$ i $K_{4,5}$ (Cvičení 10.4.3.).




Obrázek 10.10.: *Rozvinutí dvojtoru do roviny.*

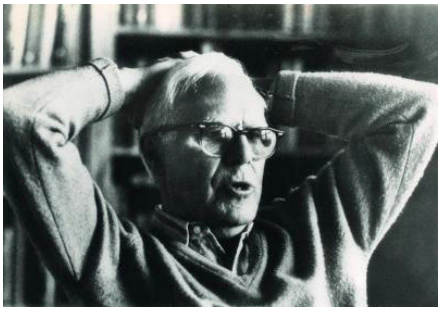
[34] Lewis Carroll, vlastním jménem Charles Lutwidge Dodgson, je znám především jako autor knížky *Alenčina dobrodružství v říši za zrcadlem*.

## Cvičení

*10.4.3.*[?] *Nakreslete vnoření a) grafu $K_8$ do dvojtoru, b) grafu $K_{4,5}$ do dvojtoru.*

**Martin Gardner (21. října 1914 – 22. května 2010)**

Martin Gardner byl Americký popularizátor matematiky a přírodních věd. Známý se stal především díky svému sloupku „Mathematical Games“, který vycházel 25 let v časopise *Scientific American*. Byl neúnavným bojovníkem proti pseudovědě, členem neziskové organizace CSICOP, dnes CSI, která je obdobou našeho sdružení Sisyfos. Současně byl jedním z největších kouzelníků a ilozionistů druhé poloviny dvacátého století.



Obrázek 10.11.: *Martin Gardner*

V roce 1936 absolvoval Chicagskou univerzitu jako bakalář filozofie, po druhé světové válce na univerzitu vrátil, avšak nedostudoval. Pracoval jako nezávislý spisovatel, napsal desítky knih, převážně z oblasti rekreační matematiky. Přinesl tak matematické problémy miliónům čtenářů, říká se o něm, že svou rubrikou nadchl pro matematiku a informatiku více čtenářů, než kdokoliv jiný.

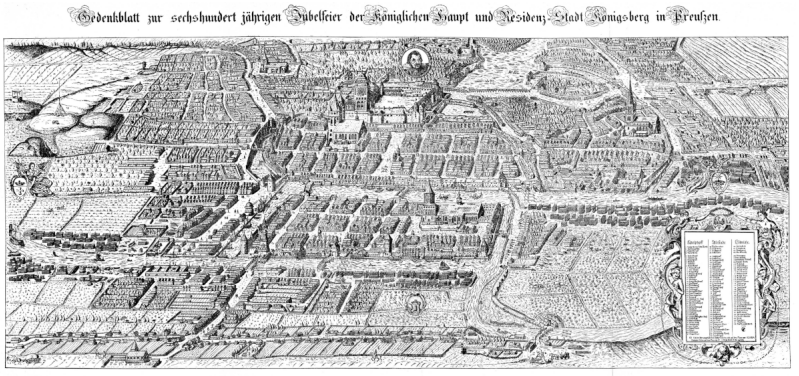
**Odkazy:**

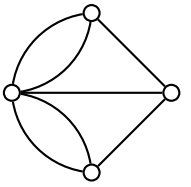
- https://en.wikipedia.org/wiki/Martin_Gardner
- https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Martin_Gardner_Mathematical_Games_columns
- http://www.sysifos.cz/

# Kapitola 11. Eulerovské a hamiltonovské grafy

**Sedm mostů města Královce**

Historicky první úlohou, která byla vyřešena s pomocí pojmů teorie grafů, byla *úloha sedmi mostů města Královce*. Pruské město Královec leží na řece Pregole. Řeka vytváří dva ostrovy, které byly v 18. století spojeny s oběma břehy i navzájem celkem sedmi mosty. Měšťané řešili problém[35], zda je možno všechny mosty přejít tak, abychom vstoupili na každý most pouze jednou. Leonhard Euler[36] v roce 1736 dokázal, že to není možné. Při formulaci problému použil abstraktní strukturu odpovídající pojmu graf a současně tak zavedl novou matematickou disciplínu – teorii grafů. Grafům, které je možno celé projít (všechny jejich hrany) jedním uzavřeným tahem, se dnes říká eulerovské.



Obrázek 11.1.: *Město Královec v roce 1613 a sedm mostů přes řeku Pregolu.*

**Jedním tahem**

Pojem eulerovského grafu úzce souvisí s kreslením jedním tahem. Jako praktické aplikace pro kreslení jedním tahem můžeme zmínit návrh trasy popelářského nebo kropícího vozu, optimalizace řezání vodním paprskem nebo robotické svařování, případně plánování tras sněžných pluhů na silnicích.

## 11.1. Eulerovské grafy

Na straně 64 jsme zavedli pojem tahu. Připomeňme, že tah je takový sled v grafu, ve kterém se neopakuje žádná hrana, zatímco vrcholy se mohou opakovat.

**Definice Eulerovský graf**

Uzavřený tah v grafu $G$, který obsahuje všechny hrany a všechny vrcholy grafu $G$, se nazývá *uzavřený eulerovský tah* nebo *eulerovský tah*. Graf, ve kterém existuje uzavřený eulerovský tah, se nazývá *eulerovský graf* a říkáme, že graf $G$ lze *nakreslit jedním (uzavřeným) tahem*.

Tah v grafu $G$, který obsahuje všechny hrany a všechny vrcholy grafu $G$ a výchozí vrchol se liší od koncového vrcholu, se nazývá *otevřený eulerovský tah*. Říkáme, že graf $G$ lze *nakreslit jedním otevřeným tahem*.

Je zřejmé, že v nesouvislém grafu žádný netriviální eulerovský tah nemůže existovat. Hledáme-li v grafu eulerovský tah, tak je přirozené požadovat, aby zkoumaný graf byl souvislý. Proto jsou následující tvrzení formulována jen pro souvislé grafy. Všimněte si, že v definici požadujeme, aby eulerovský tah obsahoval jak všechny hrany, tak i vrcholy daného grafu (proč?). Nejprve zavedeme jednu důležitou třídu grafů.

[35] Podrobnosti najdete na straně 228.

[36] O Leonhardu Eulerovi je psáno na straně 229.

**Definice** Graf nazveme *sudý*, jestliže má všechny vrcholy sudého stupně. Podobně budeme mluvit o sudých multigrafech, a jestliže smyčku budeme do stupně vrcholu počítat dvakrát (jednou za každý „koncový“ vrchol), tak i o sudých pseudografech.

Graf na Obrázku 11.1. vpravo je multigraf, který není sudý. Všechny kompletní grafy s *lichým* počtem vrcholů a hyperkrychle sudého řádu jsou sudé grafy. Kompletní bipartitní grafy jsou sudé právě tehdy, když obě partity mají sudý počet vrcholů. Petersenův graf (Obrázek 4.10.), Hoffman-Singletonův (Obrázek 1.17.) i všechny netriviální stromy nejsou sudé grafy.

Následující věta dává pěknou a současně jednoduchou nutnou a postačující podmínku existence eulerovského tahu v daném grafu.

**Věta 11.1.** *Souvislý graf je eulerovský právě tehdy, když je sudý.*

*Důkaz.*

„⇒“ Uzavřený eulerovský tah v grafu $G$ při každém průchodu vrcholem $v$ obsahuje dvě hrany incidentní s $v$. Navíc první a poslední hrana uzavřeného tahu je incidentní se stejným vrcholem, proto stupeň každého vrcholu v grafu $G$ je násobek dvojky. Každý eulerovský graf $G$ je proto sudý.

„⇐“ Postupujeme indukcí vzhledem k počtu hran.

*Základ indukce:* Nejmenší graf splňující podmínky věty je triviální graf, který obsahuje triviální uzavřený sled s jediným vrcholem.

*Indukční krok:* Mějme nějaký netriviální souvislý sudý graf $G$. Předpokládejme, že všechny souvislé sudé grafy s menším počtem hran obsahují eulerovský tah. Protože graf $G$ má všechny vrcholy stupně alespoň 2 (vrchol menšího sudého stupně by byl triviální komponentou), tak podle Lemmatu 3.1. obsahuje graf $G$ nějaký cyklus $C$. V grafu $G' = G - E(C)$ zůstane každý vrchol sudého stupně, neboť odebereme vždy 0 nebo 2 hrany incidentní s každým vrcholem. Proto každá komponenta $L_i$ grafu $G'$ je souvislý sudý graf s méně hranami než $G$ a podle indukčního předpokladu obsahuje komponenta $L_i$ uzavřený eulerovský tah. Navíc každá komponenta $L_i$ obsahuje nějaký vrchol cyklu $C$, jinak by původní graf nebyl souvislý (detaily jsou ponechány jako Cvičení 11.1.3.). V každé komponentě $L_i$ označme jeden takový vrchol $v_i$. Nyní postupujeme podle cyklu $C$ a vždy, když narazíme na nějaký vrchol $v_i$, tak na stávající tah navážeme uzavřený eulerovský tah komponenty $L_i$ a dále pokračujeme po cyklu $C$. Sestavíme tak uzavřený tah, který bude obsahovat všechny hrany cyklu $C$ i všech komponent grafu $G - E(C)$, proto se jedná o eulerovský tah v grafu $G$. □

Uvedený důkaz je konstruktivní. Podává návod na rekurzívní algoritmus nalezení eulerovského tahu v libovolném souvislém sudém grafu. Všimněte si, jak z existence eulerovského tahu v nějakém grafu $G$ plyne, že graf $G$ je souvislý.

**Otázka:** Jak by se změnilo tvrzení Věty 11.1., kdybychom v definici nepožadovali, aby eulerovský tah obsahoval všechny vrcholy?

Důkaz následujícího tvrzení je ponechán jako Cvičení 11.1.1., neboť vtipnou úvahou můžeme tvrzení Důsledku 11.2. snadno převést na tvrzení Věty 11.1.

**Důsledek 11.2.** *Souvislý graf lze nakreslit jedním otevřeným tahem právě tehdy, když obsahuje právě dva vrcholy lichého stupně.*

Také důkaz následujícího tvrzení je ponechán jako Cvičení 11.1.4. Všimněte si, že když máme jeden otevřený tah nebo více než jeden hranově disjunktní tah, neříkáme jim eulerovské.

**Důsledek 11.3.** *Hrany souvislého grafu $G$ lze nakreslit $k$ hranově disjunktními otevřenými tahy, přičemž počáteční a koncové vrcholy každých dvou tahů jsou navzájem různé, právě tehdy, když $G$ obsahuje $2k$ vrcholů lichého stupně.*

Analogicky můžeme pojem eulerovského tahu zavést i pro multigrafy (grafy s násobnými hranami). Hovoříme pak o eulerovském multigrafu a tvrzení Věty 11.1. (i Důsledků 11.2. a 11.3.) můžeme zobecnit pro multigrafy.

**Důsledek 11.4.** *Souvislý multigraf je eulerovský právě tehdy, když je sudý.*

*Důkaz.*

„⇒“ Jestliže uzavřený tah obsahuje všechny hrany multigrafu $T$, pak je multigraf $G$ jistě souvislý a každý jeho vrchol sudého stupně ze stejného důvodu jako v důkazu Věty 11.1.
„⇐“ Mějme souvislý multigraf $G$. Rozdělením každé hrany multigrafu (přidáním nového vrcholu $z$ do každé hrany $xy$) dostaneme jednoduchý graf $G'$ (proč?). Podle Věty 11.1. existuje v grafu $G'$ uzavřený eulerovský tah $T$. Každý přidaný vrchol $z$ je v grafu $G'$, a proto i v tahu $T$ sousední pouze s vrcholy $x$, $y$ a nahradíme-li v tahu $T$ vždy příslušnou část $x, z, y$ tahu $T$ hranou $xy$, tak dostaneme uzavřený tah v multigrafu $G$. □

V následující kapitole zobecníme na straně 247 tvrzení Věty 11.1. i pro orientované grafy.

**Otázky:**

- Je každý graf, který je možno nakreslit jedním tahem, eulerovský?
- Stačí v důkazu Důsledku 11.3. spárovat $k$ dvojic vrcholů lichého stupně $k$ novými hranami v grafu $G$, dále s využitím Věty 11.1. najít uzavřený eulerovský tah a z něj dostat $k$ otevřených tahů vynecháním $k$ přidaných hran?
- Vysvětlete, jakou roli hraje požadavek souvislosti v tvrzení Věty 11.3.?
- Jak by se musel upravit důkaz Věty 11.4., aby platit i pro pseudografy?

### Odkazy:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg
- http://www.amt.canberra.edu.au/koenigs.html

## Cvičení

*11.1.1. Dokažte Důsledek 11.2.: Souvislý graf $G$ lze nakreslit jedním otevřeným tahem právě tehdy, když obsahuje právě dva vrcholy lichého stupně.*

*11.1.2. Nechť $G$ je souvislý graf a $S$ je jeho hranový řez. Ukažte, že potom každá komponenta grafu $G' = G - S$ obsahuje vrchol, který je koncovým vrcholem některé hrany řezu $S$.*

*11.1.3. S využitím Cvičení 11.1.2. dokažte tvrzení použité v důkazu Věty 11.1.: Máme-li souvislý graf $G$ a v něm cyklus $C$, tak v každé komponentě grafu $G - E(C)$ existuje vrchol, který leží v grafu $G$ na cyklu $C$.*

*11.1.4. Dokažte Větu 11.3.: Souvislý graf $G$ lze nakreslit $k$ hranově disjunktními otevřenými tahy, přičemž počáteční a koncové vrcholy každých dvou tahů jsou navzájem různé, právě tehdy, obsahuje-li $2k$ vrcholů lichého stupně.*

*11.1.5.♡ Ukažte, že ve Cvičení 11.1.4. není možné vynechat požadavek souvislosti.*

*11.1.6. Zobecněte Cvičení 11.1.4. i pro nesouvislé grafy.*

*11.1.7. Nakreslete eulerovský graf se sudým počtem vrcholů a lichým počtem hran. Pokud to není možné, zdůvodněte to.*

*11.1.8. Nakreslete bipartitní eulerovský graf se sudým počtem vrcholů a lichým počtem hran. Pokud to není možné, zdůvodněte to.*

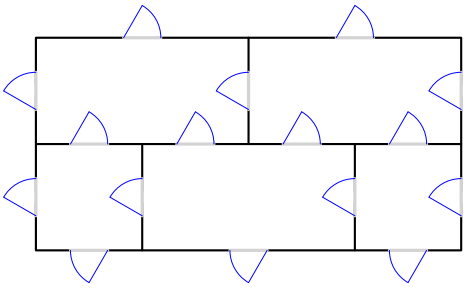
*11.1.9. Najděte chybu v následujícím důkazu: Ukážeme, že neexistuje eulerovský graf se sudým počtem vrcholů a lichým počtem hran. Podle Věty 11.1. je souvislý graf eulerovský právě tehdy, když má všechny vrcholy sudého stupně. Eulerovský graf se sudým počtem vrcholů a lichým počtem hran neexistuje, protože součet sudého počtu $2k$ sudých čísel $2l_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, 2k$ je dělitelný 4. Využijeme, že součet sudého počtu lichých čísel $l_i$ je sudý, tj. $\sum_{i=1}^{2k} l_i = 2m$.*

$$\sum_{i=1}^{2k} 2l_i = 2\sum_{i=1}^{2k} l_i = 2 \cdot 2m = 4m.$$

*Podle Věty 1.1. je součet stupňů roven dvojnásobku počtu hran $|E|$. Nyní $4m = 2|E|$ protože $|E| = 2m$, musí být v eulerovském grafu se sudým počtem vrcholů vždy sudý počet hran.*

*11.1.10. Ukažte, že každý sudý graf bez izolovaných vrcholů je možno rozložit na cykly.*

*11.1.11.♡ Je možno projít dům, jehož půdorys na Obrázku 11.2., tak, abychom každými dveřmi prošli právě jednou?*



*Obrázek 11.2.: Půdorys domu s vyznačenými dveřmi.*

*11.1.12. Je graf zachycující celočíselné barycentrické souřadnice (Obrázek 2.19.) pro obecné $k > 0$ eulerovský? Pokud ano, jak vypadá uzavřený eulerovský tah v takovém grafu?*

*11.1.13.* Mějme rovinný graf, který má stupně všech vrcholů sudé. Dokažte, že chromatické číslo jeho duálního grafu je dva.*

*11.1.14. Je možno obrátit tvrzení Příkladu 11.1.13.? Tj. platí, že je-li duální graf souvislého rovinného grafu $G$ bipartitní, tak $G$ má všechny vrcholy sudého stupně?*

*11.1.15. Existuje netriviální eulerovský graf, který má nejvýše dva vrcholy stejného stupně?*

*11.1.16. Dokažte nebo vyvraťte: mějme eulerovský graf $G$ a v něm dvě hrany $e$, $f$ incidentní se stejným vrcholem. V grafu $G$ existuje eulerovský tah, ve které hrany $e$, $f$ následují bezprostředně za sebou.*

## 11.2. Hamiltonovské grafy

V této podkapitole se budeme věnovat problému procházení všech vrcholů v daném grafu, přičemž požadujeme, abychom každý vrchol navštívili právě jednou. Takovému problému se říká hledání „hamiltonovské cesty“ podle hry, kterou vymyslel v roce 1857 William Rowan Hamilton[37]. Jednalo se o nalezení takové cesty po hranách dvanáctistěnu, abychom každý vrchol navštívili jen jednou a vrátili se do původního vrcholu. Příklady hry[38] jsou na Obrázku 11.3.

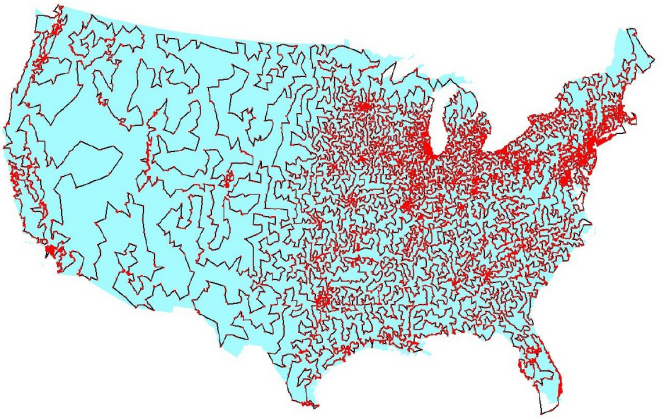
Obrázek 11.3.: *Různé varianty Hamiltonovy hry.*

[37] O Siru Williamu Hamiltonovi je psáno na straně 230.

[38] Obrázky byly převzaty z http://puzzlemuseum.com/month/picm02/200207icosian.htm

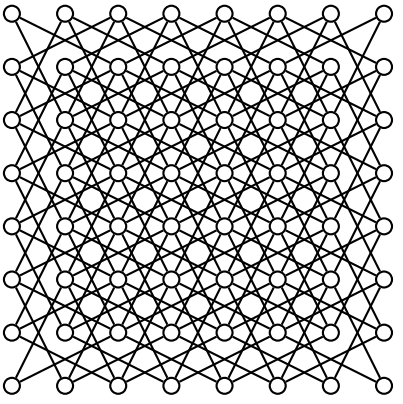
Na první pohled by se mohlo zdát, že úloha nalezení hamiltonovského cyklu je jen modifikací úlohy hledání eulerovského tahu. Není tomu tak. Zatímco pro existenci eulerovského tahu máme jednoduchou nutnou a postačující podmínku (Věta 11.1.), tak rozhodnout, zda grafu existuje cyklus, který obsahuje všechny vrcholy grafu, je obtížné a žádná nutná a postačující podmínka pro obecný graf není známa.

Další úlohy, které je možné přeformulovat na stejný problém teorie grafů, jsou například úlohy obchodního cestujícího nebo klasická úloha jezdce na šachovnici. Obchodní cestující má za úkol procestovat všechna města v dané oblasti, přičemž každé město musí navštívit právě jednou a vrátit se zpět do výchozího města. V praxi požadujeme, aby celková vzdálenost, kterou obchodní cestující urazí, byla co nejmenší (Obrázek 11.4.). Ve zjednodušené verzi nám může zajímat, zda taková cesta vůbec existuje. Jestliže mapu znázorníme grafem, ve kterém vrcholy odpovídají městům a hrany silnicím, tak hledáme v tomto grafu hamiltonovský cyklus.



Obrázek 11.4.: *Optimální řešení úlohy obchodního cestujícího pro 13 509 měst s alespoň 500 obyvateli.*

V úloze s jezdcem na šachovnici máme za úkol jezdcem (koněm) objet celou šachovnici tak, abychom každé políčko navštívili právě jednou a nakonec se vrátili na výchozí políčko. Na Obrázku 11.5. je graf, ve kterém hledáme takový cyklus, který obsahuje všechny vrcholy grafu.



Obrázek 11.5.: *Graf možných tahů jezdce po šachovnici.*

Samozřejmě se můžeme pokusit řešit uvedené úlohy hrubou silou (probráním všech možností), ale již pro malé grafy může být takový postup zdlouhavý a řešení se nemusí podařit najít v rozumném čase ani s využitím výpočetní techniky.

**Definice Hamiltonovský graf**

Cyklus, který prochází všemi vrcholy grafu $G$, se nazývá *hamiltonovský cyklus* v grafu $G$. Graf, který obsahuje hamiltonovský cyklus, se nazývá *hamiltonovský graf*. Podobně cesta, která prochází všemi vrcholy grafu $G$, se nazývá *hamiltonovská cesta* v grafu $G$.

Všimněte si, že každý hamiltonovský graf jistě obsahuje hamiltonovskou cestu, avšak jestliže graf obsahuje hamiltonovskou cestu, hamiltonovský být nemusí.

**Otázky:**

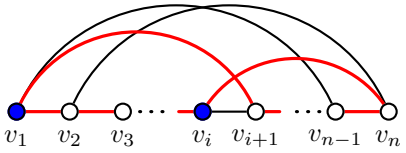
- Je každý hamiltonovský graf současně eulerovský?
- Je každý hamiltonovský graf na lichém počtu vrcholů současně eulerovský?
- Je každý eulerovský graf současně hamiltonovský?

**Postačující podmínky**

Přirozeně se dá očekávat, že hamiltonovský cyklus najdeme spíše v hustém grafu než v grafu s malým průměrným stupněm. Několik následujících tvrzení toto očekávání potvrzuje.

**Věta 11.5. Oreho věta**
*Mějme graf $G$ s $n$ vrcholy, kde $n \geq 3$. Jestliže pro každé dva nesousední vrcholy $u$, $v$ grafu $G$ platí $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, tak graf $G$ je hamiltonovský.*

*Důkaz.* Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existují grafy s $n$ vrcholy ($n \geq 3$), které neobsahují hamiltonovský cyklus a přitom splňují podmínku, že pro každé dva nesousední vrcholy $u$, $v$ platí $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Pro spor mezi nimi vybereme takový graf $G$, který má největší počet hran. Nyní si uvědomíme, že graf $G$ obsahuje hamiltonovskou cestu $v_1, v_2, \ldots, v_n$, jinak by bylo možné (každou) nejdelší cestu prodloužit přidáním vhodné hrany, aniž by byla porušena neexistence hamiltonovského cyklu. Vrcholy $v_1$ a $v_n$ jistě nejsou sousední. Označme $M$ množinu všech vrcholů grafu $G$, které leží na hamiltonovské cestě $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *bezprostředně před* nějakým vrcholem sousedním s $v_1$ (na Obrázku 11.6. jsou vyznačeny modře). Všimněte si, že $|M| = \deg(v_1)$ a například $v_1 \in M$, ale $v_n \notin M$ ani $v_{n-1} \notin M$.



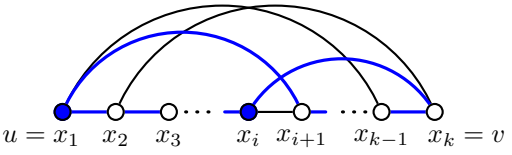

Obrázek 11.6.: *Hamiltonovská cesta v grafu $G$ a vynucený hamiltonovský cyklus.*

Nyní vrchol $v_n$ není sousední s vrcholem $v_1$ (a pochopitelně ani s vrcholem $v_n$), avšak je podle předpokladu sousední s alespoň $n - \deg(v_1)$ vrcholy grafu $G$. Podle Dirichletova principu je vrchol $v_n$ sousední s alespoň jedním vrcholem $v_i$ v množině $M$, neboť vrcholů různých od $v_n$, které nepatří do $M$, je $n - 1 - \deg(v_1)$ (Obrázek 11.6.). To však znamenám že cyklus $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}$ je hamiltonovský cyklus v grafu $G$ (na obrázku je vyznačen červeně), což je hledaný spor s výběrem grafu $G$. □

Hlavní myšlenku z důkazu Oreho větu můžeme zobecnit: Máme-li nejdelší cestu $P$ v grafu $G$ a její koncové vrcholy jsou dostatečně vysokého stupně, tak v grafu $G$ najdeme cyklus, který prochází všemi vrcholy cesty $P$, ovšem ne nutně ve stejném pořadí, jako na cestě $P$.

**Lemma 11.6.** *Mějme graf $G$ a v něm nějakou nejdelší $(u, v)$-cestu délky $k - 1$, kde $k \geq 3$. Jestliže součet stupňů koncových vrcholů je $\deg(v) + \deg(u) \geq k$, tak $G$ obsahuje cyklus délky $k$.*

*Důkaz.* Postupujeme přímo. Předpokládejme, že graf $G$ obsahuje nějakou *nejdelší* cestu $P$ délky $k - 1$ a součet stupňů jejích koncových vrcholů $u$, $v$ je $\deg(u) + \deg(v) \geq k$. Vrcholy cesty postupně označíme $u = x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k = v$ (Obrázek 11.7.).




Obrázek 11.7.: *Nejdelší cesta $P$ a konstrukce cyklu $C$.*

Protože cesta $P$ je nejdelší, tak všechny vrcholy sousední s vrcholem $u$ i s vrcholem $v$ musí ležet na cestě $P$, jinak by cestu $P$ bylo možno prodloužit.

Všimneme si, že oba koncové vrcholy jsou stupně alespoň dva. Pokud by (bez újmy na obecnosti) byl vrchol $u$ stupně 1, tak vrchol $v$ je stupně alespoň $k-1$ a je sousední se *všemi* vrcholy cesty $P$, tedy i s vrcholem $u$, což by byl spor.

Podobně jako v důkazu Oreho věty (Věta 11.5.) označíme $M$ množinu všech vrcholů cesty $P$, které leží *bezprostředně před* vrcholy sousedními s $u$ (počítáno od vrcholu $u$). V obrázku jsou zvýrazněny modře. Těchto vrcholů existuje právě $\deg(u)$ a jistě mezi nimi je i vrchol $u$ a jistě mezi nimi není není vrchol $v$. Nyní vrchol $v$ je sousední s právě $\deg(v) \geq k - \deg(u)$ vrcholy cesty $P$ (kromě vrcholu $v$) a podle Dirichletova principu musí být sousední s alespoň jedním vrcholem $x_i \in M$, $i \in [1, k-1]$, protože mezi $k-1$ vrcholy $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ je jen $(k-1) - \deg(u)$, které v množině $M$ nejsou a $\deg(v) \geq k - \deg(u) > (k-1) - \deg(u)$.

Nyní navázáním hranově disjunktních úseků: $(x_1, x_i)$-cesty (případně i triviální), hrany $x_i x_k$, $(x_k, x_{i+1})$-cesty (případně i triviální) a hrany $x_{i+1}x_1$ dostaneme cyklus $C$ délky $k$, který obsahuje všechny vrcholy cesty $P$ (Obrázek 11.7.). □

Lemma použijeme v důkazech několika následujících tvrzení. I důkaz Oreho věty (Věta 11.5.) bychom mohli s využitím Lemmatu 11.6. zjednodušit.

*Jiný důkaz.* Opět postupujeme sporem. Předpokládejme, že existují grafy s $n$ vrcholy ($n \geq 3$), které neobsahují hamiltonovský cyklus a přitom splňují podmínku, že pro každé dva nesousední vrcholy $u$, $v$ platí $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Pro spor mezi nimi vybereme takový graf $G$, který má největší počet hran. Nyní si uvědomíme, že v grafu $G$ existuje hamiltonovská cesta $v_1, v_2, \ldots, v_n$ délky $n-1$, jinak by bylo možné (každou) nejdelší cestu prodloužit přidáním vhodné hrany, aniž by byla porušena neexistence hamiltonovského cyklu. Koncové vrcholy $v_1$ a $v_n$ jistě nejsou sousední, ale součet jejich stupňů je podle předpokladu $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Podle Lemmatu 11.6. v grafu $G$ existuje cyklus délky $n$, který je hamiltonovský. □

**Otázky:**

- Vysvětlete, jak se v důkazu Lemmatu 11.6. projeví, že vrchol $u$ je sousední s vrcholem $v$.
- Je požadavek $k \geq 3$ v Lemmatu 11.6. nutný?

Větu 11.5. dokázal norský matematik Øystein Ore v roce 1960. Dříve, v roce 1952 dokázal evropský matematik Gabriel Andrew Dirac následující speciální případ.

**Věta 11.7. Diracova věta**
*Mějme graf $G$ s $n$ vrcholy, kde $n \geq 3$. Je-li $\delta(G) \geq n/2$, tak graf $G$ je hamiltonovský.*

Diracova věta je důsledkem Oreho věty a nebudeme ji proto dokazovat. Ještě obecnější je následující věta z roku 1962, kterou dokázal maďarský matematik Lajos Pósa (vyslovuje se „póša“) když mu bylo 22 let.

**Věta 11.8. Pósova věta**
*Mějme graf $G$ s $n$ vrcholy, kde $n \geq 3$. Jestliže pro každé přirozené číslo $j < n/2$ obsahuje graf $G$ méně než $j$ vrcholů stupně menšího nebo rovného $j$, tak graf $G$ je hamiltonovský.*

*Důkaz.* Nejprve ukážeme, že graf $G$, který splňuje předpoklady Pósovy věty je souvislý. Všechny vrcholy nějaké komponenty $L$ grafu $G$, mají *menší* stupeň, než je počet vrcholů v komponentě $L$. Má-li komponenta $L$ $r$ vrcholů, tak podle předpokladu nemůže být $r \leq n/2$. To ale znamená, že i nejmenší komponenta grafu $G$ má více než $n/2$ vrcholů a $G$ je proto souvislý.

Nechť $m$ je délka nejdelší cesty v grafu $G$ a mezi všemi nejdelšími cestami grafu $G$ označme $P$ takovou nejdelší cestu $v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}$ délky $m$, která má největší součet stupňů koncových vrcholů, tj. číslo $\deg(v_1) + \deg(v_{m+1})$ je největší možné.

Podle Lemmatu 11.6. existuje v grafu $G$ cyklus $C$ délky $m+1$, jeho vrcholy označme $w_1, w_2, \ldots, w_{m+1}$. Ukážeme, že $m+1 = n$. Pro spor předpokládejme, že $m+1 < n$, a proto v grafu $G$ existují vrcholy mimo cyklus $C$. Protože graf $G$ je souvislý, tak jistě najdeme vrchol $x$ sousední s některým vrcholem $w_k$ cyklu $C$ a cesta

$$x, w_k, w_{k+1}, \ldots, w_k, w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$$

v grafu $G$ má délku $m+1$, což je hledaný spor. Ukázali jsme tak, že cyklus $C$ je hledaný hamiltonovský cyklus grafu $G$. □

Následující větu dokázal v roce 1972 matematik českého původu Václav Chvátal. Její důkaz vynecháme.

**Věta 11.9. Chvátalova věta**
*Mějme graf $G$ s $n$ vrcholy, kde $n \geq 3$. Vrcholy grafu $G$ označme $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak, aby platilo $\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \ldots \leq \deg(v_n)$. Jestliže pro každé $i < n/2$ platí $\deg(v_i) > i$ nebo $\deg(v_{n-i}) \geq n - i$, tak graf $G$ je hamiltonovský.*

Není těžké si uvědomit, že Diracova věta je speciálním případem Oreho věty a Oreho věta je speciálním případem Pósovy věty (Cvičení 11.2.18.). Podobně lze ukázat, že Pósova věta je speciálním případem Chvátalovy věty.

**Otázky:**

- Najdete příklad grafu, který splňuje podmínky Oreho Věta, ale nesplňuje podmínky Diracovy Věty?
- Najdete příklad grafu, který splňuje podmínky Pósovy Věta, ale nesplňuje podmínky Oreho Věty?

Postačující podmínky existence hamiltonovského cyklu jsou vhodné v případě, kdy graf obsahuje hamiltonovský cyklus a je dostatečně hustý. V takovém případě nám postačující podmínky zaručují zaručí existenci hamiltonovského cyklu aniž tento cyklus hledáme. Avšak ne každý hamiltonovský graf musí tyto podmínky splňovat. Vždyť například každý cyklus $C_n$ jistě je evidentně hamiltonovský, avšak pro $n \geq 5$ nesplňuje předpoklad uvedených vět a nemůžeme je použít k rozhodnutí, že se jedná o hamiltonovský graf.

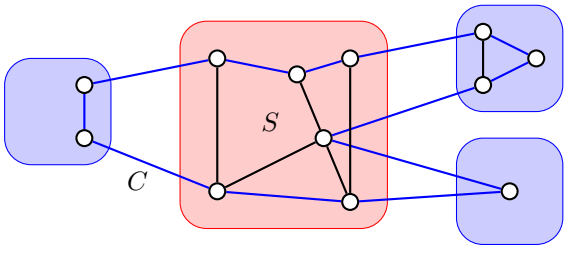
**Nutné podmínky**
Je zřejmé, že každý hamiltonovský graf je souvislý. Snadno dokážeme, že každý hamiltonovský graf je dokonce alespoň 2-souvislý, tj. hamiltonovský graf neobsahuje artikulaci (Cvičení 11.2.1.). Silnější souvislost však není zaručena, ani v případě, kdy v grafu existuje několik hranově disjunktních hamiltonovských cyklů (Cvičení 11.2.21.).

**Otázka:** Je každý 2-souvislý graf hamiltonovský?

Následující věta udává další obecnou vlastnost každého hamiltonovského grafu.

**Věta 11.10.** *Je-li $G$ hamiltonovský graf, tak pro každou neprázdnou vlastní podmnožinu $S$ vrcholové množiny $V(G)$ platí $\omega(G - S) \leq |S|$.*

*Důkaz.* Mějme nějakou neprázdnou nevlastní podmnožinu $S \subseteq V(G)$. Hamiltonovský cyklus $C$ grafu $G$ prochází postupně všemi vrcholy grafu $G$. Každá hrana cyklu $C$, která odchází z nějaké komponenty grafu $G - S$ musí vést do nějakého vrcholu množiny $S$, jinak by se nejednalo o komponentu grafu $G - S$ (Obrázek 11.8.).




Obrázek 11.8.: *Hamiltonovský cyklus $C$, množina $S$ a komponenty grafu $G - S$.*

Z každé komponenty vede hrana cyklu $C$ do jiného vrcholu množiny $S$, proto množina $S$ obsahuje alespoň tolik vrcholů jako je komponent grafu $G - S$. □

**Otázky:**

- Proč v tvrzení Věty 11.10. požadujeme, aby $S$ byla neprázdná množina?
- Proč v tvrzení Věty 11.10. požadujeme, aby $S$ byla vlastní podmnožina $V(G)$?

Podmínka ve Větě 11.10., je nutná, ale není postačující. Například v Petersenově grafu pro každou neprázdnou vlastní podmnožinu vrcholů $S$ platí $\omega(G - S) \leq |S|$, a přitom Petersenův graf není hamiltonovský (Cvičení 11.2.8.). Další příklad grafu, který není hamiltonovský a přesto splňuje nutnou podmínku Věty 11.10., je na Obrázku 11.9. vlevo. Abychom ukázali, že uvedený graf není hamiltonovský, všimneme si, že takový cyklus by musel obsahovat všechny hrany incidentní s vrcholy stupně 2, avšak prostřední vrchol by v hamiltonovském cyklu musel být stupně alespoň 3.

Obrázek 11.9.: *Dva grafy, které nejsou hamiltonovské.*

Každý hamiltonovský bipartitní graf má partity stejné velikosti (Cvičení 11.2.4.). Naproti tomu ne každý bipartitní graf, který má parity stejné velikosti, je hamiltonovský (Obrázek 11.9. vpravo).

**Otázky:**

- Proč graf na Obrázku 11.9. splňuje nutnou podmínku Věty 11.10.?
- Proč není graf na Obrázku 11.9. vpravo hamiltonovský?

Zatímco postačující podmínky používáme, abychom ukázala, že graf hamiltonovský je, tak nutné podmínky hamitonicity jsou vhodné v případě, kdy chceme ukázat, že graf hamiltonovský není. Jestliže graf některou z nutných podmínek hamiltonicity nesplňuje, můžeme hledání uzavřít s tím, že hamiltonovský cyklus v grafu neexistuje. Avšak grafy mohou všechny zde uvedené nutné podmínky splňovat a přesto nejsou hamiltonovské; například dříve zmíněný Petersenův graf (Cvičení 11.2.8.).

**Nutné a postačující podmínky**

Je třeba upozornit, že není známa žádná podmínka, na základě které bychom pro libovolný graf uměli v krátkém čase rozhodnout o existenci hamiltonovského cyklu. Je užitečné srovnat následující tvrzení (Věta 11.13.) s nutnou a postačující podmínkou pro existenci eulerovského tahu ve Větě 11.1. Nejprve zavedeme uzávěr grafu.

**Definice Uzávěr grafu**

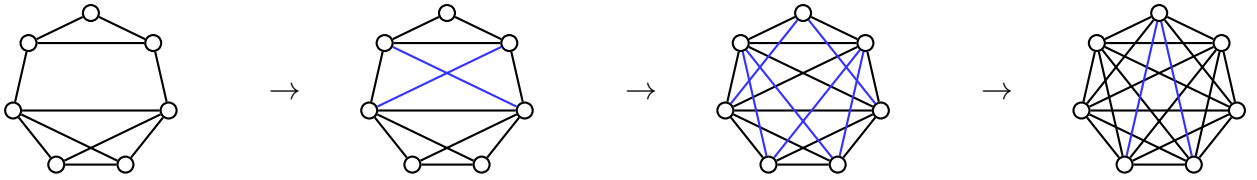
Mějme dán graf $G$ s $n$ vrcholy. Graf, který vznikne postupným přidáním všech hran $uv$ pro každou dvojici nesousedních vrcholů $u$, $v$ takovou, že součet stupňů $u$ a $v$ je alespoň $n$, se nazývá *uzávěr grafu* $G$ a značí se $C(G)$.

Všimněte si, jak z definice uzávěru grafu plyne, že přidáváme hrany tak dlouho, dokud existují nesousední vrcholy, jejichž součet stupňů je alespoň $n$. Z definice není zřejmé, že uzávěr grafu je jednoznačně definován. Hrany totiž můžeme přidávat v různém pořadí, přitom zvyšujeme stupně koncových vrcholů a po několika krocích je možno přidat hrany, které nebylo možno přidat na začátku. Proto dokážeme následující lemma.

**Lemma 11.11.** *Jestliže $C(G)$ a $C'(G)$ jsou dva libovolné uzávěry grafu $G$, tak $C(G) = C'(G)$.*

*Důkaz.* Tvrzení ukážeme přímo. Označme $e_1, e_2, \ldots, e_r$ posloupnost hran přidaných do grafu $G$ při konstrukci uzávěru $C(G)$ a označme $f_1, f_2, \ldots, f_s$ posloupnost hran přidaných do grafu $G$ při konstrukci uzávěru $C'(G)$.

Protože před přidáním hrany $e_1 = uv$ do uzávěru $C(G)$ musí být součet stupňů koncových vrcholů alespoň $n$, tak se hrana $uv$ musí nacházet také v uzávěru $C'(G)$. Podobně, jestliže po přidání hran $e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}$ můžeme přidat hranu $e_i$ do uzávěru $C(G)$, tak musí být součet stupňů koncových vrcholů alespoň $n$ a hrana $uv$ se musí nacházet také v uzávěru $C'(G)$. Proto žádná hrana z posloupnosti $e_1, e_2, \ldots, e_r$ nechybí v posloupnosti $f_1, f_2, \ldots, f_s$ a naopak, tj. oba uzávěry $C(G)$ a $C'(G)$ jsou shodné. □



Obrázek 11.10.: *Graf $G$ a konstrukce jeho uzávěru $C(G)$ postupným přidáváním hran.*

Hledání hamiltonovského cyklu v obecném grafu je komplikované. Uzávěr grafu může pomoci při rozhodnutí, zda takový cyklus existuje. Jestliže ukážeme, že graf nebo jeho uzávěr je dostatečně hustý, tak existence hamiltonovského cyklu plyne z postačujících podmínek. Nejprve dokážeme pomocné tvrzení.

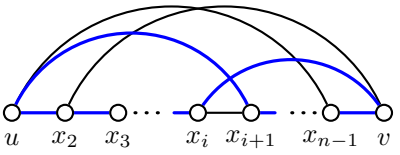
**Lemma 11.12.** *Mějme dvojici nesousedních vrcholů $u$, $v$ grafu $G$ s $n$ vrcholy, jejichž součet stupňů $\deg(u)$ a $\deg(v)$ je alespoň $n$. Pak graf $G + uv$ je hamiltonovský právě tehdy, když je graf $G$ hamiltonovský.*

*Důkaz.* Jedná se o důkaz ekvivalence, jejíž jedna implikace je zřejmá: jestliže graf $G$ obsahuje hamiltonovský cyklus, tak jistě i graf $G + uv$ obsahuje hamiltonosvký cyklus.

Zbývá ukázat implikaci „⇒“ , tj. když graf $G + uv$ obsahuje hamiltonovský cyklus a součet stupňů vrcholů $u$, $v$ je v grafu $G$ alespoň $n$, tak i graf $G$ obsahuje hamiltonovský cyklus. Pokud graf $G + uv$ obsahuje hamiltonovský cyklus, který hranu $uv$ neobsahuje, tak tento cyklus je také v grafu $G$ a tvrzení platí. Jinak v grafu $G$ jistě existuje hamiltonovská $(u, v)$-cesta (vznikne z cyklu vynecháním hrany $uv$). Délka této cesty je $n - 1$ a podle předpokladu je $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Podle Lemmatu 11.6. v grafu $G$ existuje cyklus délky $n$, tj. hamiltonovský cyklus.

**Jiný důkaz:**

Druhou implikaci můžeme dokázat přímo bez Lemmatu 11.6. Jestliže přidaná hrana $uv$ neleží na hamiltonovském cyklu grafu $G+uv$, tak hamiltonovský cyklus existuje i v grafu $G$ a tvrzení platí. Pokud hamiltonovský cyklus grafu $G+uv$ hranu $uv$ obsahuje, tak graf $G$ jistě obsahuje hamiltonovskou $(u, v)$-cestu $P$ (proč?). Vrcholy cesty $P$ označíme $u = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = v$. Vrchol $u$ je sousední s vrcholem $x_2$ a dalšími $k - 1$ vrcholy mezi $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Na cestě $P$ existuje právě $k$ vrcholů, které leží *bezprostředně před* některým vrcholem sousedním s vrcholem $u$, počítáno od vrcholu $u$. Jejich množinu označme $M$. Mezi vrcholy množiny $M$ není vrchol $v$ (ale vrchol $u$ ano).




Obrázek 11.11.: *Hamiltonovský cyklus v grafu $G$.*

Nyní vrchol $v$ je sousední s alespoň $n - k$ vrcholy cesty $P$ (nejsou mezi nimi vrcholy $u$ a $v$). Proto, podle Dirichletova principu, musí být vrchol $v$ sousední s alespoň jedním vrcholem $x_i$ z množiny $M$. To však znamená, že v grafu $G$ existuje hamiltonovský cyklus $u = x_1, x_2, \ldots, x_i, v = x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}$ (Obrázek 11.11.). □

Uvědomte si, že Lemma 11.12. je možno využít i v důkazu Věty 11.5. Máme-li pro spor vybraný nehamiltonovský graf $G$ s největším počtem hran (a tedy s hamiltonovskou cestou), tak podle předpokladu věty je $\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$ a graf $G + uv$ je jistě hamiltonovský. Podle Lemmatu 11.12. je hamiltonovský také graf $G$, což je spor hledaný v důkazu Věty 11.5.

Následující tvrzení má formu nutné a postačující podmínky, která je nutná a postačující pouze na první pohled, neboť převádí určení hamiltonicity jednoho grafu na určení hamiltonicity jiného grafu.

**Věta 11.13.** *Graf $G$ je hamiltonovský právě tehdy, když je hamiltonovský jeho uzávěr $C(G)$.*

*Důkaz.*

„⇒“ První implikace je zřejmá. Jestliže graf $G$ obsahuje hamiltonovský cyklus, tak jeho uzávěr $C(G)$, který vznine případným přidáním několika hran, je také hamiltonovský.

„⇐“ Předpokládejme, že uzávěr $C(G)$ obsahuje hamiltonovský cyklus. Uzávěr vznikl postupným přidáváním hran mezi dvojice vrcholů, jejichž součet stupňů je alespoň $n = |V(G)|$.

Budeme-li nyní hrany v opačném pořadí z uzávěru odebírat, tak opakovaným použitím Lemmatu 11.12. vidíme, že i původní graf $G$ je hamiltonovský. Konstrukce z důkazu Lemmatu 11.12. navíc dává postup, jak takový hamiltonovský cyklus v každém kroku najít. Proto známe-li hamiltonovský cyklus v uzávěru grafu $C(G)$, tak najdeme i hamiltonovský cyklus původního grafu $G$. □

**Důsledek 11.14.** *Je-li uzávěr grafu s více než dvěma vrcholy kompletní graf, tak je $G$ hamiltonovský.*

Větu 11.13. a její Důsledek 11.14. můžeme využít při zkoumání hamiltonicity daného grafu $G$ tak, že najdeme uzávěr grafu $C(G)$, což je úloha dobře algoritmicky řešitelná. Pokud je uzávěr kompletní graf a nebo jinak poznáme, že uzávěr je hamiltonovský graf, tak současně víme, že hamiltonovský musí být i původní graf $G$. Samotné nalezení hamiltonovského cyklu Věta 11.13. ani Důsledek 11.14. neřeší, neboť důkaz Věty 11.13. je existenční. Podle Důsledku 11.14. je zřejmé, že graf na Obrázku 11.10. vlevo je hamiltonovský i když hamiltonovský cyklus neznáme.

**Odkazy:**

- http://www.math.uwaterloo.ca/navigation/ideas/articles/honsberger/index.shtml
- http://www.ams.org/journals/proc/1966-017-02/S0002-9939-1966-0188103-0/S0002-9939-1966-0188103-0.pdf

## Cvičení

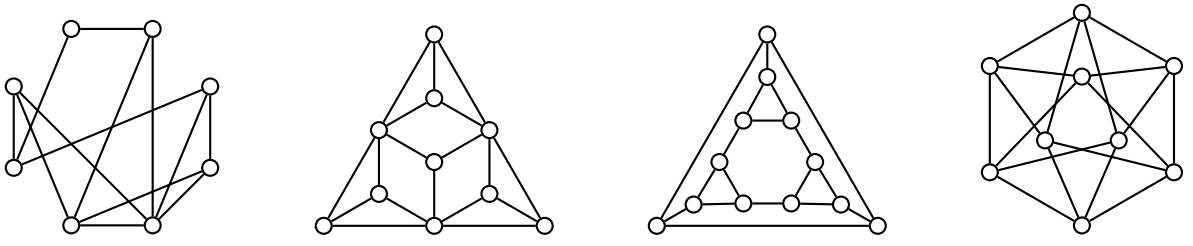
*11.2.1. Dokažte, že každý hamiltonovský graf je nejméně 2-souvislý.*

*11.2.2. Najděte nějaký 2-souvislý pravidelný bipartitní graf s partitami stejné velikosti, který není hamiltonovský.*

*11.2.3. Dokažte nebo vyvraťte: má-li graf $G$ dva navzájem hranově disjunktní hamiltonovské cykly, potom je $G$ 3-souvislý.*

*11.2.4.♡ Dokažte, že každý bipartitní hamiltonovský graf má partity stejné velikosti.*

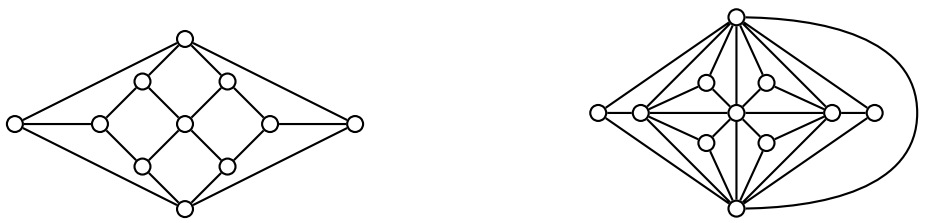
*11.2.5. Nalezněte uzávěry grafů na Obrázku 11.12. Které z uvedených grafů jsou hamiltonovské?*



*Obrázek 11.12.: Grafy $G$, $H$, $F$ a $I$.*

*11.2.6. Dokažte Diracovu větu bez použití Oreho věty.*

*11.2.7. Rozhodněte, zda a) Herschelův graf na Obrázku 11.13. vlevo nebo b) Goldnerův–Hararyův graf na Obrázku 11.13. vpravo jsou hamiltonovské.*



*Obrázek 11.13.: Herschelův graf a Goldnerův–Hararyův graf.*

*11.2.8. Ukažte, že Petersenův graf není hamiltonovský.*

*11.2.9. Graf $G$ se nazývá* hypohamiltonovský, *jestliže není hamiltonovský, avšak graf $G - v$ je hamiltonovský pro každý vrchol $v$ grafu $G$. Ukažte, že Petersenův graf je hypohamiltonovský.*

*11.2.10. Dokažte, že kolo $W_{n+1}$ je hamiltonovský graf pro libovolné $n \geq 3$.*

*11.2.11. Ukažte, že podmínka $\delta(G) \geq n/2$ v Diracově větě nemůže být nahrazena podmínkou $\delta(G) \geq (n-1)/2$.*

*11.2.12. Ukažte, že v definici uzávěru grafu na straně 222 nemůžeme nahradit podmínku $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ podmínkou $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1$.*

*11.2.13. Dokažte, že pro každé $n \geq 1$ je úplný tripartitní graf $K_{n,2n,3n}$ hamiltonovský, zatímco $K_{n,2n,3n+1}$ není hamiltonovský.*

*11.2.14. Jednání u kulatého stolu je přítomno $n \geq 4$ osob, přičemž každé dvě z nich dohromady znají všech $n-2$ ostatních. Ukažte, že mohou okolo stolu sedět tak, že každá osoba sedí mezi dvěma lidmi, které zná.*

*11.2.15.$^{\heartsuit}$ Ukažte, že každý $k$-pravidelný graf na $2k-1$ vrcholech je hamiltonovský.*

*11.2.16.* Dokažte nebo vyvraťte: každý $k$-pravidelný graf na $2k+1$ vrcholech je hamiltonovský.*

*11.2.17. Ukažte, že v každém grafu $G$, který obsahuje hamiltonovskou cestu, pro každou vlastní podmnožinu $S$ množiny $V(G)$ platí $\omega(G - S) \leq |S| + 1$.*

*11.2.18. Ukažte, že a) Diracova věta je speciálním případem Oreho věty, b) Oreho Věta je speciálním případem Pósovy věty.*

*11.2.19. Ukažte, že všechny grafy platónských těles (Obrázky 9.26. a 9.27.) jsou hamiltonovské.*

*11.2.20. Ukažte, že hyperkrychle $Q_n$ řádu $n \geq 2$ je hamiltonovská.*

*11.2.21. Pro libovolné přirozené číslo $k$ najděte příklad grafu, který obsahuje $k$ hranově disjunktních hamiltonovských cyklů a jehož vrcholová souvislost je 2.*

*11.2.22. Ukažte, že není možné putovat jezdcem po šachovnici $4 \times n$ polí, navštívit každé políčko právě jednou, a vrátit se zpět na výchozí políčko.*

*11.2.23.$^{?}$ Pro které rozměry šachovnice $n \times n$ polí je možné navštívit jezdcem každé políčko právě jednou, a vrátit se zpět na výchozí políčko.*

*11.2.24. Najděte tři příklady grafů, které nejsou hamiltonovské, avšak splňují podmínku Věty 11.10.*

*11.2.25. Najděte příklad hamiltonovského grafu, jehož uzávěr obsahuje více hran než $G$ a současně méně hran než kompletní graf.*

*11.2.26. Najděte nekonečnou třídu grafů, které nejsou hamiltonovské, ale jejich uzávěr obsahuje více hran než původní graf.*

*11.2.27.$^{\heartsuit}$ Najděte takový příklad grafu $G$ (s nejvýše pěti vrcholy), že pro každou neprázdnou vlastní podmnožinu $S \subset V(G)$ platí $\omega(G - S) \leq |S|$, a přitom graf $G$ není hamiltonovský.*

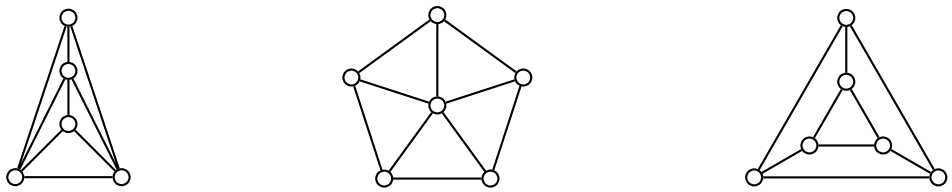
## 11.3. Další výsledky

Bez důkazu uvedeme několik výsledků, které souvisí s hamiltonovskými cestami a cykly v grafech.

**Definice** Řekneme, že graf $G$ je *hamiltonovsky souvislý*, jestliže pro každou dvojici různých vrcholů $u, v \in V(G)$ existuje v $G$ hamiltonovská cesta mezi vrcholy $u$ a $v$.

Každý hamiltonovsky souvislý graf je samozřejmě současně souvislý, avšak ne každý souvislý graf je i hamiltonovsky souvislý. Například všechny stromy s alespoň třemi vrcholy neobsahují hamiltonovskou $(u, v)$-cestu, jestliže alespoň jeden z vrcholů $u$, $v$ není listem. Ani bipartitní grafy s alespoň třemi vrcholy nejsou hamiltonovsky souvislé (Cvičení 11.3.3.).

Snadno nahlédneme, že každý hamiltonovsky souvislý graf s alespoň třemi vrcholy je i hamiltonovský. Jestliže $u$, $v$ jsou nějaké sousední vrcholy v hamiltonovsky souvislém grafu $G$, tak hamiltonovská $(u, v)$-cesta nemůže obsahovat hranu $uv$ (proč?). Protože podle definice hamiltonovsky souvislého grafu najdeme mezi oběma vrcholy hamiltonovskou $(u, v)$-cestu, tvoří tato cesta spolu s hranou $uv$ hamiltonovský cyklus v grafu $G$. Graf $G$ je proto hamiltonovský. Naproti tomu ne každý hamiltonovský graf je současně hamiltonovsky souvislý. Na Obrázku 11.14. je několik hamiltonovsky souvislých grafů.



Obrázek 11.14.: *Hamiltonovsky souvislé grafy.*

**Otázky:**

- Najděte příklad grafu, který je hamiltonovský, ale není hamiltonovsky souvislý.
- Najděte všechny grafy, které jsou hamiltonovsky souvislé, ale nejsou hamiltonovské.

Následující tvrzení je analogií Oreho Věty 11.5. pro hamiltonovsky souvislé grafy.

**Věta 11.15.** *Mějme graf $G$ s $n$ vrcholy, kde $n \geq 3$. Jestliže pro každé dva nesousední vrcholy $u$, $v$ platí $\deg(u) + \deg(v) \geq n + 1$, tak $G$ je hamiltonovsky souvislý.*

Podle Cvičení 11.3.8. umíme v souvislém grafu zaručit existenci cest, jejichž délka závisí na nejmenším stupni. Následuje ještě obecnější tvrzení o existenci dostatečně dlouhých cest v daném grafu.

**Věta 11.16.** *Mějme souvislý graf $G$ s alespoň třemi vrcholy a přirozené číslo $k$. Jestliže pro každé dva nesousední vrcholy $u$, $v$ grafu $G$ platí $\deg(u) + \deg(v) \geq k$, tak v $G$ existuje buď hamiltonovská cesta nebo cesta délky alespoň $k$.*

*Důkaz.* Pokud graf $G$ obsahuje hamiltonovskou cestu, tvrzení platí. Mějme přirozené číslo $k$ takové, že pro každé dva nesousední vrcholy $u$, $v$ grafu $G$ platí $\deg(u) + \deg(v) \geq k$. Označme $P$ nějakou nejdelší cestu v grafu.

Pokud nejsou koncové vrcholy cesty $P$ sousední, tak podle Lemmatu 11.6. graf $G$ obsahuje cyklus délky $k$. Protože podle předpokladu cyklus $C$ není hamiltonovský, a protože graf $G$ je souvislý, tak některý vrchol $v$ cyklu $C$ je sousední s vrcholem $u$, který na cyklu $C$ neleží. Hrana $uv$ spolu s cestou, která prochází všemi vrcholy cyklu $C$, tvoří cestu délky $k$ a tvrzení platí.

Zbývá případ, kdy cesta $P$ není hamiltonovská a její koncové vrcholy jsou sousední. Pro spor předpokládejme, že délka $m$ cesty $P$ je menší než $k$. Cesta $P$ spolu s hranou mezi koncovými vrcholy tvoří cyklus délky $m + 1$, který není hamiltonovský, a podobně jako výše najdeme v grafu cestu délky $m + 1$. To je spor s volbou cesty $P$, proto nejdelší cesta má délku alespoň $k$ a tvrzení platí. □

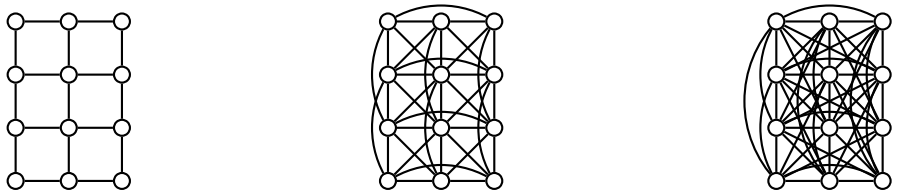
Srovnejme tvrzení Lemmatu 11.6. a Věty 11.16. Zatímco Lemma 11.6. říká, že k nejdelší cestě v grafu najdeme stejně dlouhý cyklus, tak podle Věty 11.16. v grafu musí existovat cesta, jejíž délka bude dána součtem stupňů nesousedních vrcholů, případně hamiltonovská cesta. V grafu však mohou existovat i delší cesty.

**Otázky:**

- Můžeme spojením Lemmatu 11.6. a Věty 11.16. říci, že mají-li každé dva nesousední vrcholy $u$, $v$ souvislého grafu $G$ s alespoň třemi vrcholy součet stupňů alespoň $k$, tak v $G$ existuje cyklus délky $G$?
- Proč v Lemmatu 11.6. požadujeme, aby cesta byla nejdelší?

**Mocnina grafu**

Na straně 73 jsme zavedli kartézskou mocninu grafu. Nyní *n-tou mocninou grafu* (nikoliv kartézskou) budeme rozumět graf, který vznikne z grafu $G$ přidáním všech hran $uv$, jestliže v grafu $G$ existuje $(u, v)$-cesta délky nejvýše $n$. Druhou mocninu grafu budeme značit $G^2$, $n$-tou mocninu pak $G^n$. Na Obrázku 11.15. je příklad grafu $G$ (který je současně svou první mocninou) spolu s jeho druhou a třetí mocninou.



Obrázek 11.15.: *Graf $G$ a jeho mocniny $G^2$ a $G^3$.*

Následující dvě tvrzení uvedeme bez důkazu.

**Věta 11.17.** *Mějme souvislý graf $G$, potom $G^3$ je hamiltonovsky souvislý graf.*

**Věta 11.18.** *Mějme 2-souvislý graf $G$, potom $G^2$ je hamiltonovský graf.*

### Odkazy:

- http://mathworld.wolfram.com/Hamilton-ConnectedGraph.html
- http://mathworld.wolfram.com/GraphPower.htm

## Cvičení

*11.3.1. Ukažte, že hamiltonovsky souvislý graf na více než třech vrcholech má všechny vrcholy stupně nejméně 3.*

*11.3.2. Ukažte, že grafy na Obrázku 11.14. jsou hamiltonovsky souvislé.*

*11.3.3. Ukažte, že bipartitní grafy s alespoň třemi vrcholy nejsou hamiltonovsky souvislé.*

*11.3.4. Nechť $H$ je libovolné rozdělení grafu $K_{2,3}$. Dokažte, že graf $H$ není hamiltonovský, avšak graf $H^2$ je hamiltonovský.*

*11.3.5. Nalezněte příklad 2-souvislého grafu, který není hamiltonovský, a ukažte, že jeho druhá mocnina je hamiltonovská.*

*11.3.6. Pro které z úloh a) Hamiltonova hra, b) jezdec na šachovnici je možno rozhodnout o existenci řešení užitím některých vět z této kapitoly?*

*11.3.7. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?*

*a) každý graf obsahující uzavřený eulerovský tah je vrcholově 2-souvislý.*
*b) každý graf obsahující uzavřený eulerovský tah je hranově 2-souvislý.*
*c) každý graf obsahující hamiltonovský cyklus je vrcholově 2-souvislý.*
*d) každý graf obsahující hamiltonovský cyklus je hranově 2-souvislý.*

*11.3.8.* Ukažte, že každý souvislý graf $G$ obsahuje buď hamiltonovskou cestu nebo cestu délky alespoň $2\delta(G)$. Lze vynechat požadavek souvislosti?*

*11.3.9. Najdete souvislý kubický graf, který má takové dobré hranové 3-barvení, ve kterém hrany libovolných dvou barev indukují hamiltonovskou cestu? Najdete nekonečně mnoho takových grafů?*

*11.3.10. Je graf možných tahů jezdce po šachovnici (Obrázek 11.5.) hamiltonovsky souvislý?*

*11.3.11. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení (zesílení Věty 11.16.): Mějme souvislý graf $G$ s alespoň třemi vrcholy a přirozené číslo $k$. Jestliže pro každé dva nesousední vrcholy $u$, $v$ grafu $G$ platí $\deg(u) + \deg(v) \geq k$, tak v $G$ existuje cesta délky $k$.*

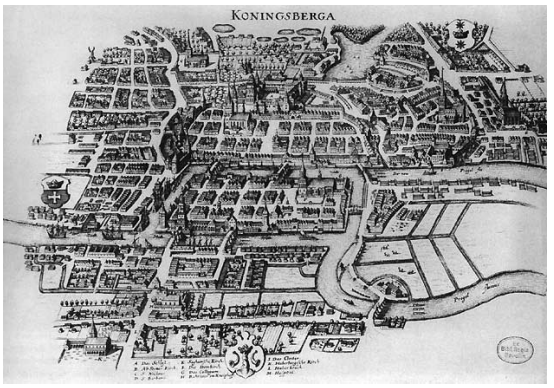
*11.3.12. Myška se prokousává sýrem o rozměru $3\times3\times3$ kostičky. Vždy sežere celou kostičku $1\times1\times1$ a přesune se na sousední kostičku, která s ní sousedí celou stěnou. Myška začíná sýr žrát od rohové kostičky. Může takto sežrat a) celý sýr, b) celý sýr a středovou kostičku sežrat jako poslední?*

*11.3.13. Které z grafů Platónských těles (Obrázky 9.26. a 9.27.) jsou hamiltonovsky souvislé?*

## 11.4. Doplňková témata

### Sedm mostů města Královce

V roce 1254 během druhé křížové výpravy proti Prusku založili němečtí rytíři vedeni českým králem Přemyslem Otokarem II na řece Pregole město Královec. Ve středověku se město Královec stalo významným obchodním centrem strategicky položeným na řece. V osmnáctém století byl Královec bohatým městem s flotilou obchodních lodí a měšťany, jejichž rodiny žily v blahobytu. Na tehdejší dobu vyspělá ekonomika umožnila městu vystavět celkem sedm mostů přes Pregolu, z nichž většina spojovala ostrov Kneiphof s oběma břehy (Obrázky 11.1. a 11.16.).




Obrázek 11.16.: *Město Královec, mapa od Merian-Erbena z roku 1652.*

Jak řeka obtékala Kneiphof (český překlad by mohl být Hospodský dvůr) a druhý velký ostrov, rozdělovala město na čtyři části. Sedm mostů se jmenovalo Kovářský, Spojovací, Zelený, Kupecký, Dřevěný, Vysoký a Medový most. Podle tradice trávili měšťané nedělní odpoledne procházkami po městě. Tak přirozeně vznikla otázka, zda je možno projít všech sedm královeckých mostů, každý z nich právě jednou. Nikomu se to nedařilo, ale nikdo ani neuměl zdůvodnit, že by to bylo nemožné.

Naštěstí pro královecké měšťany (i teorii grafů) leží Královec (Königsberg, dnešní Kaliningrad) nedaleko Petrohradu. Carl Leonhard Gottlieb Ehler, starosta Gdańsku, oslovil Leonharda Eulera, který v té době žil v Petrohradu, zda by problém uměl vyřešit. Eulerovi se úloha zdála triviální, vyřešil ji a v odpovědi se divil, proč měšťané čekají odpověď od matematika, když by ji mohl vyřešit kdokoliv jiný. Přesto jej úloha zaujala, možná proto, že při jejím řešení nevyužil ani geometrii, ani algebru ani známe početní metody, jak psal ještě téhož roku v dopise italskému matematikovi Giovannimu Marinonimu. Úloha mu připomněla jiný problém, se kterým ho již dříve oslovil německý matematik Gottfried Wilhelm Leibniz a který Leibniz nazýval geometrie pozic. Euler při řešení formálně zavedl a současně použil tuto geometrii pozic, dnes bychom řekli teorii grafů.

#### Dnešní Královec

Dva ze sedmi mostů z původní úlohy byly zničeny během druhé světové války. Další dva byly později zbořeny a nahrazeny novými. Zbývající tři mosty zůstaly zachovány, přičemž jeden z nich byl v roce 1935 přestavěn. V centru dnešního Kaliningradu je mostů pět. V terminologii teorie grafů by oběma břehům odpovídaly vrcholy stupně 2 a oběma ostrovům vrcholy stupně 3. Nyní je možné

projít každý z mostů právě jednou, procházka však není turisticky atraktivní, neboť musí začínat na jednom z ostrovů a končit na druhém.

**Odkazy:**

- http://mathdl.maa.org/mathDL/46/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=1310&bodyId=1452
- http://www.learner.org/courses/mathilluminated/units/4/textbook/02.php
- http://canitz.org/?p=35
- http://math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E053.pdf

## Leonhard Euler (15. dubna 1707 – 18. září 1783)

Leonhard Euler patří bezesporu k největším matematikům všech dob. Narodil se v Basileji ve Švýcarsku, většinu života strávil v Rusku a v tehdejším Prusku. Je považován za zakladatele teorie grafů.

Obrázek 11.17.: *Leonhard Euler na portrétu z roku 1753 od Emanuela Handmanna a na portrétu od Johanna Georga Bruckera.*

Dětství strávil Euler ve Švýcarsku. Johann Bernoulli, jeden z významných matematiků slavné rodiny Bernoulliů, byl přítelem Paula Eulera, pastora kalvinistické církve, Leonhardova otce. Byl to právě Johann Bernoulli, který během sobotních kondicí objevil Leonhardův talent pro matematiku a přesvědčil Paula Eulera, že jeho syn bude jednou slavným matematikem, nikoliv pastorem. Ve třinácti letech vstoupil na Basilejskou univerzitu a v roce 1727 obhájil doktorskou práci o šíření zvuku.

Leonhard Euler se spřátelil se syny Johanna Bernoulliho, Danielem a Nicolasem, kteří pracovali na Petrohradské akademii věd. Když Nicolas Bernoulli zemřel, byl na jeho místo na Danielovo doporučení přijat mladý Euler. Na akademii věd pak zůstal i po Nicolasově odchodu, třebaže politická situace nebyla v té době nakloněna cizincům. Propracoval se až na vedoucího matematického ústavu.

V roce 1734 se Euler oženil s Kateřinou Gsellovou, měli spolu třináct dětí, ze kterých se jen pět dožilo dospělosti. Vzhledem k přetrvávajícím nepokojům v Carském Rusku odešel Euler v roce 1741 na pozvání Fridricha II. Velikého do Berlína na Berlínskou akademii. V Berlíně žil a pracoval 25 let. Ještě za svého pobytu v Rusku prodělal horečku, při které téměř oslepl na pravé oko. Během dalších let se jeho zrak postupně zhoršoval a od roku 1766 byl téměř slepý na obě oči. Přesto nepřestával pracovat, zrak vynahradil bohatými duševními schopnostmi a fotografickou pamětí.

Za vlády Kateřiny Veliké se situace v Rusku zlepšila a v roce 1766 přijal Euler nabídku, aby se do Petrohradu vrátil. Zde žil a pracoval až do své smrti v roce 1783.

Obrázek 11.18.: *Leonhard Euler na švýcarské bankovce.*

Eulerův záběr obsáhl téměř všechny oblasti matematiky: geometrii, diferenciální počet, algebru, teorii čísel, aplikovanou matematiku i fyziku. Byl velmi produktivní, jeho vydané práce by zaplnily cca 60 svazků. Zasloužil se o zavedení pojmu funkce, jako první používal i zápis $f(x)$ pro funkční hodnoty, zavedl dnešní značení pro goniometrické funkce, Eulerovo číslo $e$, imaginární jednotku $i$ a řecký symbol $\Sigma$ pro sumu. Eulerovy práce přispěly k standardizaci celé řady pojmů, zpopularizoval označení $\pi$ jako poměru obvodu a průměru kruhu. Francouzský matematik a astronom Pierre-Simon Laplace shrnul Eulerův vliv na matematiku nejen své doby:

„*Čtěte Eulera, čtěte Eulera, on je učitel nás všech.*“

**Odkazy:**

- http://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
- http://www.math.dartmouth.edu/~euler/

### William Rowan Hamilton (4. srpna 1805 – 2. září 1865)

Sir William Rowan Hamilton byl irský matematik, fyzik a astronom. Zasloužil se o rozvoj optiky, dynamiky a algebry.

Obrázek 11.19.: *William Rowan Hamilton.*

Hamilton se narodil v roce 1805 v Dublinu. Měj osm sourozenců a jeho otec, obchodní cestující, neměl čas na vzdělávání dětí, neboť trávil většinu času na cestách. Proto byl poslán, aby žil u svého strýce reverenda James Hamiltona, který jej vyučoval. Již v pěti letech malý William ovládal latinu, řečtinu i hebrejštinu. Sám se pak naučil celou řadu dalších evropských i exotických jazyků.

Významným obratem v jeho životě bylo setkání se zázračným dítětem Zerah Colburnem. Hamiltonovo jazykové i matematické nadání bylo výjimečné, když však ve svých 12 letech soupeřil Colburnem, v početních úlohách obvykle prohrál. Nicméně právě setkání s Colburnem podnítilo Hamiltonův zájem o matematiku. Od roku 1822 se pak věnoval studiu matematiky soustavně vystudoval Trinity College v Dublinu.

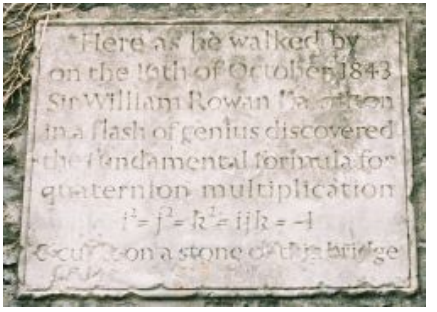
K Hamiltonovým nejznámějším výsledkům patří objev kvaternionů. Snažil se zobecnit množinu komplexních čísel (popsanou jako množinu bodů v rovině). Dlouhou dobu se mu nedařilo najít zobecnění pro tři dimenze, později bylo dokázáno, že to není možné. Podařilo se mu však najít řešení pro čtyři dimenze. Hamilton se procházel podél Royal Canal v Dublinu, když ho napadlo řešení ve tvaru

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Hamilton naškrábal tuto rovnici na kámen na mostu Broom Bridge. Dnes tuto událost připomíná na mostě kamenná plaketa.

**Odkazy:**

- http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hamilton.html




Obrázek 11.20.: *Broom Bridge v Dublinu a pamětní plaketa na mostě.*

# Kapitola 12. Orientované grafy

Na straně 45 jsme zmínili několik zobecnění jednoduchého grafu a mezi nimi i orientovaný graf. S orientovanými grafy se přirozeně setkáme při řešení různých praktických problémů. Modelujeme-li silniční síť grafem, tak se obvykle jedná o orientovaný graf, neboť v silniční síti mohou být jednosměrky. V potrubní síti bez čerpadel teče kapalina vždy jen jedním směrem (dolů), v elektrické síti a v produktovodech se dopravuje energie od zdroje ke spotřebičům. Také schémata konečných automatů jsou orientované grafy.

## 12.1. Základní pojmy

Nejprve podáme formální definici orientovaného grafu.

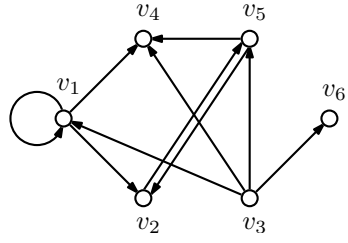
**Definice Digraf**
Mějme neprázdnou množinu vrcholů $V$. Dvojice $(V, A)$, kde $A$ je nějaká podmnožina kartézského součinu $V \times V$ (množina uspořádaných dvojic prvků z $V$), se nazývá *orientovaný graf* $D$ nebo stručně *digraf*[39] $D$.

Prvkům množiny $A$ říkáme *orientované hrany*, stručně *hrany* případně *šípy*. Jsou-li $u$, $v$ dva různé vrcholy digrafu $D$, tak orientovanou hranu $(u, v)$ budeme značit stručně $uv$. Vrchol $u$ se nazývá *výchozí* nebo *počáteční* a $v$ *koncový* vrchol hrany $uv$. *(Orientovanou) smyčkou* rozumíme orientovanou hranu, která má stejný počáteční i koncový vrchol. Hrany $uv$ a $vu$ se nazývají *opačně orientované* nebo jen *opačné* hrany.

Všimněte si, že uvedená definice připouští existenci (orientovaných) smyček, ale nepřipouští násobné orientované hrany. V některých knihách se důsledně rozlišují orientované grafy (jak jsme je zavedli v naší definici) a digrafy, které mohou obsahovat násobné orientované hrany. V tomto textu budeme pojem „digrafu“ i „orientovaného grafu“ používat ve smyslu Definice 12.1. Definici obecného grafu, který může obsahovat násobné orientované i neorientované hrany, jsme uvedli na straně 45. Dvojici opačných hran nepovažujeme za násobné hrany.

**Definice Jednoduchý orientovaný graf**
Orientovaný graf, ve kterém navíc nejsou smyčky (ani násobné orientované hrany), nazýváme *jednoduchý* orientovaný graf, případně jednoduchý digraf.

Orientovaný graf $D$ na Obrázku 12.1. má množinu vrcholů $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ a množinu orientovaných hran $E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_3, v_6), (v_5, v_2), (v$
Protože orientovaný graf $D$ obsahuje smyčku $(v_1, v_1)$, tak se nejedná o jednoduchý orientovaný graf.



Obrázek 12.1.: *Orientovaný graf $D$.*

[39] Termín *digraf* je z anglického „directed graph“. Označení $A$ pro množinu orientovaných hran digrafu pochází z anglického termínu „arc“ pro orientovanou hranu.

**Otázky:**

- Jak by vypadala definice orientovaného grafu, který může obsahovat i násobné orientované hrany?
- Jak by mohla vypadat definice smíšeného grafu, který obsahuje orientované i neorientované hrany, ale neobsahuje násobné hrany?

Množinu vrcholů a množinu orientovaných hran digrafu $D$ budeme značit $V(D)$ a $A(D)$, analogicky jako u jednoduchého (neorientovaného) grafu. Počet orientovaných hran (včetně smyček) digrafu $D$ budeme značit $h(D)$.

Pojmy *incidence*, *sousednost* a *nezávislost* se zavedou analogicky jako pro jednoduché grafy. Upozorníme na jeden důležitý detail. Jestliže digraf obsahuje orientovanou hranu $uv$ a neobsahuje opačnou hranu $vu$, tak vrchol $v$ považujeme za sousední s vrcholem $u$, ale vrchol $u$ není sousední s vrcholem $v$ (vrchol $v$ je dosažitelný z vrcholu $u$, ale naopak ne). *Nezávislé* vrcholy nejsou spojeny žádnou orientovanou hranou (v libovolné orientaci) a nezávislé orientované hrany nemají žádný společný vrchol. Přesná definice je ponechána jako Cvičení 12.1.4. Stejně tak v dalším textu přirozeně rozšíříme použití i dalších pojmů pro digrafy: *podgraf digrafu*, *izomorfismus digrafů* a podobně. Přesnou definici opět ponecháme jako cvičení.

Jestliže se omezíme na jednoduché orientované grafy a nerozlišujeme izomorfní digrafy, tak existuje jediný jednoduchý(!) orientovaný graf s jedním vrcholem, tři jednoduché orientované grafy se dvěma vrcholy a šestnáct různých jednoduchých orientovaných grafů se třemi vrcholy (Cvičení 12.1.1.). Na čtyřech vrcholech je jednoduchých orientovaných grafů 218 a na deseti vrcholech dokonce 341 260 431 952 972 580 352 (více než 341 triliónů). Jejich počet je znám pro libovolný počet vrcholů.

Jestliže rozlišujeme vrcholy digrafu (například označením), tak je také snadné určit počet různých digrafů s daným počtem vrcholů (Cvičení 12.1.2.).

**Poznámka 12.1.** Množina orientovaných hran digrafu $D = (V, A)$ je podmnožina $V^2$. Množina $A$ je vlastně relací na množině $V$ a jednoduchý digraf odpovídá ireflexivní relaci na $V$. Přesto se zavádí jak pojem relace, tak orientované grafy. S každým z těchto pojmů se pracuje v jiných souvislostech.

**Stupně vrcholů v orientovaném grafu**

Na rozdíl od jednoduchého grafu rozlišujeme v orientovaných grafech několik variant pojmu stupeň.

**Definice** Počet orientovaných hran, se kterými je vrchol $v$ v jednoduchém orientovaném grafu $D$ incidentní, se nazývá *celkový stupeň* vrcholu $v$, stručně *stupeň* vrcholu a značí se $\deg(v)$, případně $\deg_D(v)$. Pokud uvažujeme digraf se smyčkami, budeme každou smyčku do celkového stupně počítat dvakrát.

Je-li vrchol $u$ počátečním vrcholem hrany $uv$, nazývá se $uv$ *odchozí hrana* z vrcholu $u$ a počet odchozích hran z vrcholu $u$ se nazývá *odchozí* nebo *vnější stupeň* vrcholu $u$ a značí se $\operatorname{odeg}(u)$. Podobně je-li vrchol $v$ koncovým vrcholem hrany $uv$, nazýváme $uv$ *příchozí hranou* do vrcholu $v$ a počet příchozích hran do vrcholu $v$ se nazývá *příchozí* nebo *vnitřní stupeň* vrcholu $v$ a značí se $\operatorname{ideg}(v)$. Smyčku počítáme mezi příchozí i odchozí hrany daného vrcholu.

Jestliže pro každý vrchol $v$ digrafu $D$ platí, že $\operatorname{ideg}(v) = \operatorname{odeg}(v)$, říkáme, že digraf $D$ je *vyvážený*, nebo že má *vyváženou orientaci*.

Obrázek 12.2.: *Vlevo je orientovaný graf s odchozími stupni* 0, 2, 2, 2, 1, *s příchozími stupni* 2, 0, 1, 2, 2 *a vpravo je vyvážený orientovaný graf.*

Celkový stupeň vrcholu $v$ je vždy součtem odchozího a příchozího stupně vrcholu $v$, tj. $\operatorname{ideg}(v) + \operatorname{odeg}(v) = \deg(v)$. Všimněte si, že vyvážený digraf nemusí mít všechny celkové stupně stejné! Vyvážený graf tak není analogií pravidelného grafu. Různé vrcholy na Obrázku 12.2. vpravo mají různé celkové stupně, avšak příchozí stupeň každého vrcholu je roven jeho odchozímu stupni. Analogicky jako v Kapitole 1. můžeme zavést nejmenší a největší odchozí a příchozí stupně digrafu $D$. Značit je budeme: nejmenší odchozí stupeň $\delta^+(D)$, nejmenší příchozí stupeň $\delta^-(D)$, největší odchozí stupeň $\Delta^+(D)$ a největší příchozí stupeň $\Delta^-(D)$.

**Věta 12.1.** *Je-li $D$ orientovaný graf s $n$ vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a $h(D)$ hranami, tak platí*

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{odeg}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ideg}(v_i) = h(D).$$

Důkaz je snadný a je ponechán jako Cvičení 12.1.3.

**Otázky:**

- Co by se změnilo, kdybychom řekli, že celkový stupeň vrcholu je počet orientovaných hran, se kterými je daný vrchol incidentní?
- Platí Věta 12.1. i pro orientované grafy s násobnými hranami?
- Existuje netriviální orientovaný graf, ve kterém každý vrchol má jiný odchozí stupeň?
- Existuje nějaký graf, který je současně digrafem?
- Existuje nějaký digraf, který je současně grafem?

V Kapitole 1.2. jsme na straně 51 ukázali nutnou a dostatečnou podmínku pro to, aby daná posloupnost nezáporných celých čísel byla grafová. Analogií stupňové posloupnosti pro orientované grafy je posloupnost uspořádaných dvojic odchozích a příchozích stupňů: jsou-li $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vrcholy digrafu $D$, tak $(\operatorname{odeg}_D(v_i), \operatorname{ideg}_D(v_i))$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, je takovou posloupností. Budeme jí říkat *digrafová posloupnost*. Například digraf na Obrázku 12.2. vlevo má digrafovou posloupnost $(0,2), (2,0), (2,1), (2,2), (1,2)$.

Podle Věty 12.1. je nutnou podmínku, aby daná posloupnost uspořádaných dvojic nezáporných celých čísel byla digrafovou posloupností, že součet prvních složek uspořádaných dvojic se rovná součtu druhých složek. Pro digrafy s násobnými hranami je tato podmínka současně postačující (Cvičení 12.1.8.). Pro jednoduché orientované grafy se smyčkami je situace složitější. Rozhodnutí, zda uvedená posloupnost dvojic nezáporných celých čísel je nebo není digrafová se převádí na otázku existence jistého bipartitního grafu, kterému říkáme split digrafu. Konstrukce splitu je posána na straně 248. Pro split se pak ověřuje analogická podmínka, jak ve Větě 1.3. (Věta Havla–Hakimiho).

## Cvičení

*12.1.1.♡ a) Najděte všechny neizomorfní digrafy s jedním nebo dvěma vrcholy. Které z nich jsou jednoduché? a) Najděte všechny neizomorfní jednoduché orientované grafy se třemi vrcholy.*

*12.1.2.♡ Předpokládejme, že rozlišujeme vrcholy digrafu $D$ (například označením). a) Kolik existuje různých digrafů s $n$ vrcholy? b) Kolik existuje různých jednoduchých orientovaných grafů s $n$ vrcholy? c) Kolik existuje různých jednoduchých orientovaných grafů s $n$ vrcholy, které neobsahují žádnou dvojici opačně orientovaných hran?*

*12.1.3.♡ Dokažte Větu 12.1.*

*12.1.4.♡ Definujte pojmy* incidence *vrcholu a hrany,* sousednost *vrcholů a* nezávislost *vrcholů i hran pro orientované grafy.*

*12.1.5.♡ Definujte pro orientované grafy další pojmy, které jsme definovali pro neorientované grafy: podgraf, faktor, indukovaný podgraf, vnější a vnitřní stupňová posloupnost orientovaného grafu.*

*12.1.6.*♡ *Definujte a) incidenční matici, b) matici sousednosti orientovaného grafu. V čem se liší od analogických matic pro neorientované grafy?*

*12.1.7. Najděte příklad jednoduchého orientovaného grafu s $n$ vrcholy, ve kterém má každý vrchol jiný odchozí stupeň.*

*12.1.8. Ukažte, že v digrafu, ve kterém mohou existovat násobné hrany, je posloupnost uspořádaných dvojic nezáporných celých čísel digrafová právě tehdy, když součet prvních složek je stejný jako součet druhých složek.*

## 12.2. Cesty, cykly, dosažitelnost

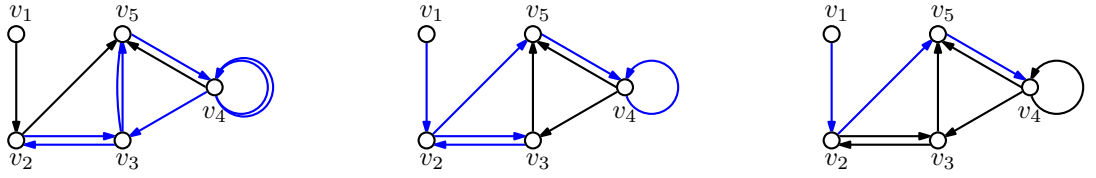
Orientované sledy, tahy a cesty v digrafu zavedeme analogicky jako pro jednoduché grafy v Kapitole 2.

**Definice** *Orientovaný sled* v digrafu $D$ je taková posloupnost vrcholů a orientovaných hran

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n), \tag{15}$$

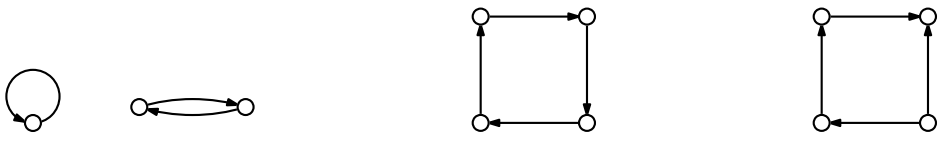
ve které každá orientovaná hrana $e_i$ má počáteční vrchol $v_{i-1}$ a koncový vrchol $v_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Sled (15) nazýváme orientovaný $(v_0, v_n)$-sled. Orientovaný sled, ve kterém se neopakuje žádná hrana, nazýváme *orientovaný tah*. Orientovaný sled, ve kterém se neopakuje žádný vrchol, nazýváme *orientovaná cesta*.

Orientované sledy, tahy a cesty chápeme jako popis putování v digrafu, při kterém dodržujeme orientaci hran, nikdy neputujeme proti naznačenému směru. V digrafu, který modeluje nějakou reálnou situaci, odpovídají taková omezení obvykle nějakým přirozeným požadavkům (jednosměrky, spádování potrubí, klesání potenciálu a podobně). Všimněte si, že v orientovaném grafu jsou orientovaný sled, tah i cesta jednoznačně určeny posloupností vrcholů. Proto budeme v dalším textu orientované sledy, tahy i cesty zadávat jen posloupností vrcholů. Na Obrázku 12.3. vlevo je orientovaný sled $v_3, v_5, v_4, v_4, v_3, v_2, v_3, v_5$, uprostřed je orientovaný tah $v_1, v_2, v_3, v_2, v_5, v_4, v_4$ a vpravo pak je orientovaná cesta $v_1, v_2, v_5, v_4$.




Obrázek 12.3.: *Sled, tah a cesta v digrafu.*

Délkou orientovaného $(v_0, v_n)$-sledu budeme rozumět počet hran tohoto sledu. Naprosto analogicky chápeme délku orientovaného $(v_0, v_n)$-tahu nebo orientované $(v_0, v_n)$-cesty. Triviální orientovaný sled, který obsahuje jediný vrchol, je současně triviální orientovaný tah i triviální orientovaná cesta. *Orientovaný cyklus* je takový netriviální orientovaný sled, ve kterém se neopakují hrany ani vrcholy s výjimkou prvního a posledního vrcholu. Všimněte si, že smyčka v digrafu je orientovaným cyklem délky 1, na rozdíl od jednoduchých (neorientovaných) grafů, ve kterých nejkratší cyklus má délku 3. V digrafech mohou samozřejmě existovat i cykly délky 2, stačí vzít dvojici opačně orientovaných hran (Obrázek 12.4. vlevo). Digraf, který neobsahuje žádný orientovaný cyklus, se nazývá *acyklický*.



Obrázek 12.4.: *Orientované cykly délky 1, 2 a 4 a cyklus délky 4, který není orientovaný.*

Někdy může být vhodné zeslabit pojem orientované cesty (případně sledu) a odhlédnout od orientace hran. Například cyklus na Obrázku 12.4. vpravo sice není orientovaným cyklem, ale nahradíme-li orientované hrany neorientovanými, dostaneme cyklus $C_4$.

**Definice** *Neorientovaná cesta* nebo *polocesta* v digrafu $D$ je taková posloupnost různých vrcholů a orientovaných hran

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n),$$

ve které každá orientovaná hrana $e_i$ má buď počáteční vrchol $v_{i-1}$ a koncový vrchol $v_i$ nebo počáteční vrchol $v_i$ a koncový vrchol $v_{i-1}$, pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Na Obrázku 12.5. vidíme příklad orientované a neorientované cesty v nějakém digrafu. Cesta pochopitelně nemusí být komponentou ale jen podgrafem digrafu.

Obrázek 12.5.: *Orientovaná cesta a polocesta v digrafu $D$.*

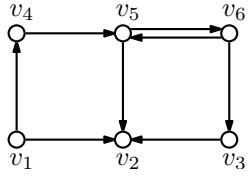
Všimněte si, že na rozdíl od orientované cesty, *není* polocesta v obecném digrafu určena jednoznačně jen posloupností vrcholů (proč?). Podobně jako neorientovanou cestu můžeme nadefinovat i *neorientovaný cyklus*.

**Otázka:** Je v jednoduchém (ne obecném) orientovaném grafu polocesta určena jednoznačně jen posloupností vrcholů?

### Dosažitelnost a souvislost v orientovaném grafu

**Definice** Řekneme, že vrchol $v$ je v digrafu $D$ *dosažitelný* z vrcholu $u$, jestliže v $D$ existuje orientovaná $(u, v)$-cesta. Řekneme, že vrcholy $u$ a $v$ jsou *vzájemně dosažitelné*, jestliže v $D$ existují obě cesty: orientovaná $(u, v)$-cesta i orientovaná $(v, u)$-cesta.

Je dobré si uvědomit, že dosažitelnost v orientovaných grafech obecně *není* symetrická vlastnost, jako tomu je pro neorientované grafy. Pro daný digraf $D$ můžeme na množině vrcholů $V(D)$ definovat relaci dosažitelnosti tak, že vrcholy $u$ a $v$ jsou v relaci (v tomto pořadí), pokud je vrchol $v$ dosažitelný z vrcholu $u$. Taková relace obecně není relací ekvivalence, neboť nemusí být symetrická. Například v grafu na Obrázku 12.6. je vrchol $v_3$ dosažitelný z vrcholu $v_4$, avšak vrchol $v_4$ není dosažitelný z vrcholu $v_3$. Z vrcholu $v_1$ jsou dosažitelné dokonce všechny ostatní vrcholy, ale $v_1$ není dosažitelný z žádného jiného vrcholu.




Obrázek 12.6.: *Digraf $D$.*

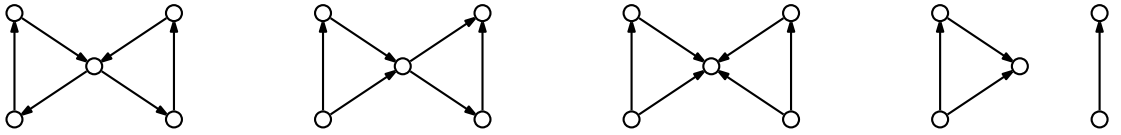
Protože relace dosažitelnosti není symetrická, je zavedení souvislosti komplikovanější než u jednoduchých grafů. Můžeme rozlišit několik druhů souvislosti, které zavedená terminologie charakterizuje „silou“.

**Definice** Řekneme, že digraf $D$ je

- *slabě souvislý*, jestliže mezi každými dvěma vrcholy v digrafu $D$ existuje polocesta,
- *jednostranně souvislý*, jestliže mezi každými dvěma vrcholy $u$, $v$ v digrafu $D$ existuje alespoň jedna ze dvou orientovaných cest: $(u, v)$-cesta nebo $(v, u)$-cesta,
- *silně souvislý*, jestliže mezi každými dvěma vrcholy $u$, $v$ v digrafu $D$ existuje orientovaná $(u, v)$-cesta.

Jinak je digraf *nesouvislý*.

Všimněte si, že definice silné souvislosti je ekvivalentní s tvrzením, že každé dva různé vrcholy digrafu $D$ jsou navzájem dosažitelné. Na Obrázku 12.7. jsou příklady grafů, které jsou (po řadě zleva doprava) silně, jednostranně, slabě souvislé a úplně vpravo je nesouvislý digraf. Z definice vyplývá, že každý silně souvislý graf je současně jednostranně i slabě souvislý a každý jednostranně souvislý graf je i slabě souvislý. Naopak samozřejmě existují slabě souvislé grafy, které nejsou jednostranně souvislé a také najdeme jednostranně souvislé grafy, které nejsou silně souvislé (Obrázek 12.7.).



$G_1$ $G_2$ $G_3$ $G_4$

Obrázek 12.7.: *Silně ($G_1$), jednostranně ($G_2$), slabě ($G_3$) souvislý a nesouvislý ($G_4$) digraf.*

### Vzdálenost v orientovaném grafu

**Definice** *Orientovaná vzdálenost* vrcholu $v$ od vrcholu $u$ v daném digrafu je délka nejkratší orientované $(u, v)$-cesty. Jestliže orientovaná $(u, v)$-cesta v daném digrafu neexistuje, definujeme orientovanou vzdálenost z vrcholu $u$ do vrcholu $v$ rovnu $\infty$.

Orientovanou vzdálenost vrcholu $v$ od vrcholu $u$ budeme značit $\mathrm{dist}(u, v)$, stejně jako v neorientovaném grafu. Značení $\mathrm{dist}_D(u, v)$ použijeme, když budeme chtít zdůraznit, ve kterém digrafu $D$ vzdálenost měříme.

Všimněte si, že vzdálenost není symetrická vlastnost, a proto rozlišujeme vzdálenost vrcholu $v$ od vrcholu $u$ a naopak. I když vzdálenost vrcholu $v$ od vrcholu $u$ je rovna nějakému celému číslu $k$, tak vzdálenost vrcholu $u$ od vrcholu $v$ může být různá od $k$ a dokonce může být i $\infty$. Například v digrafu $D$ na Obrázku 12.6. je $\mathrm{dist}(v_4, v_3) = 3$, a přitom $\mathrm{dist}(v_3, v_4) = \infty$. Vzdálenost v digrafu tak obecně *není* metrikou.

**Otázky:**

- Existuje takový digraf $D$, že pro každou dvojici různých vrcholů $u, v \in V(D)$ platí, že $\mathrm{dist}(u, v) = 1$ a $\mathrm{dist}(v, u) = \infty$ (nebo naopak)?
- Existuje takový digraf s více než jedním vrcholem, ve kterém žádné dvě různé dvojice různých vrcholů $u$, $v$ nemají stejnou orientovanou vzdálenost $\mathrm{dist}(u, v)$?
- Kolik existuje takových digrafů s více než jedním vrcholem, ve kterém žádné dvě různé dvojice různých vrcholů $u$, $v$ nemají stejnou orientovanou vzdálenost $\mathrm{dist}(u, v)$?

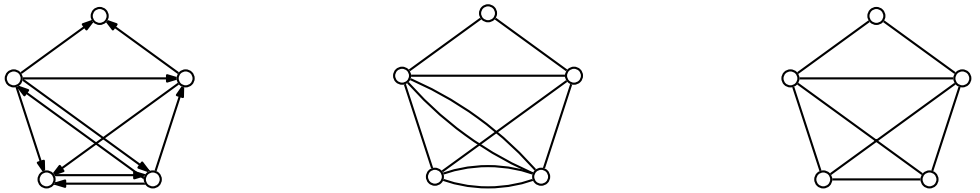
### Příbuzné orientované a neorientované grafy

Z orientovaného grafu lze několika způsoby získat neorientovaný graf. Nejjednodušší je „zapomenout“ orientaci hran. Přitom musíme dobře uvážit, jak naložit s dvojicemi opačně orientovaných hran.

**Definice** Neorientovaný multigraf, který vznikne z jednoduchého orientovaného grafu $D$ (bez smyček) nahrazením každé orientované hrany neorientovanou hranou, se nazývá *deorientace* orientovaného grafu $D$ a značí se $U(D)$.

Neorientovaný graf, který vznikne z jednoduchého orientovaného grafu $D$ nahrazením každé orientované hrany nebo dvojice opačně orientovaných hran jednou neorientovanou hranou, se nazývá *symetrizace* orientovaného grafu $D$ a značí se $\mathrm{sym}(D)$.

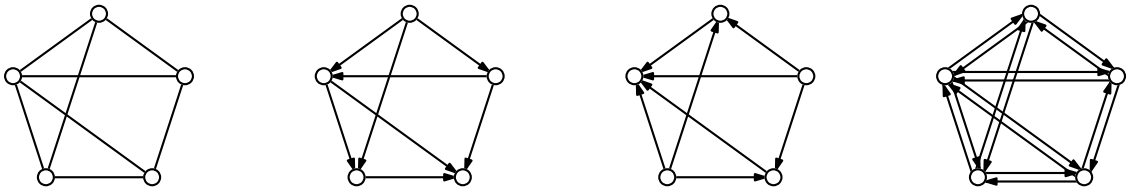
Všimněte si, že pokud bychom v definici symetrizace vynechali větu o dvojici opačně orientovaných hran, tak $\mathrm{sym}(D)$ nemusí být jednoduchý graf. Každá dvojice opačně orientovaných hran dává v deorientaci dvojnásobnou neorientovanou hranu (Obrázek 12.8.).



Obrázek 12.8.: *Jednoduchý orientovaný graf $D$, jeho deorientace $U(D)$ a symetrizace* $\mathrm{sym}(D)$.

Také naopak, když máme nějaký neorientovaný graf, můžeme několika způsoby sestavit odpovídající orientovaný graf.

**Definice** Mějme jednoduchý neorientovaný graf $G$. Graf, ve kterém je každá neorientovaná hrana nahrazena jednou ze dvou možných orientovaných hran, se nazývá *orientace* grafu $G$ a značí se $D(G)$. Graf, ve kterém je každá neorientovaná hrana nahrazena dvojicí opačně orientovaných hran, se nazývá *asociovaný orientovaný graf* a značí se $B(G)$.



Obrázek 12.9.: *Neorientovaný graf $G$, dvě jeho orientace $D(G)$ a asociovaný orientovaný graf $B(G)$.*

Je snadné si rozmyslet, že digraf $D$ je slabě souvislý právě tehdy, když jeho symetrizace je souvislý graf (Cvičení 12.2.3.).

**Otázky:**

- Máme jednoduchý graf $G$ a sestrojíme nějakou jeho orientaci $D(G)$. Platí $\mathrm{sym}(D(G)) \simeq G$?
- Máme jednoduchý graf $G$ a sestrojíme nějakou jeho orientaci $D(G)$. Platí $U(D(G)) \simeq G$?
- Jak se změní odpovědi na předchozí dvě otázky, když místo orientace $D(G)$ budeme pracovat s asociovaným orientovaným grafem $B(G)$?
- Existují grafy, pro které platí $U(B(G)) \simeq G$?
- Pro jaké orientované grafy $D$ platí $U(D) \simeq \mathrm{sym}(D)$?

Zmíníme jakousi analogii silné souvislosti digrafů a 2-souvislosti neorientovaných grafů. Kdybychom v následující větě výslovně nepracovali s jednoduchými orientovanými grafy, tak bychom museli uvážit, jak při deorientaci naložit se smyčkami.

**Věta 12.2.** *Je-li $D$ jednoduchý silně souvislý orientovaný graf, tak jeho deorientace $U(D)$ je hranově 2-souvislý (multi)graf.*

*Důkaz.* Postupujeme sporem. Předpokládejme, že digraf $D$ je silně souvislý a jeho deorientace $U(D)$ není hranově 2-souvislá. Všimnete si, že orientace grafu není definována pro multigrafy. Snadno bychom však mohli definici orientace rozšířit. Proto můžeme říci že digraf $D$ je vždy nějakou orientací své deorientace $U(D)$.

Pokud by deorientace $U(G)$ byl nesouvislý (multi)graf, tak každá jeho orientace je nesouvislá, což podle předpokladu není možné. Pokud by deorientace $U(G)$ byla 1-souvislá, tak obsahuje nějaký most, který v digrafu odpovídá nějaké orientované hraně $uv$. Digraf $D - uv$ je proto nesouvislý a vrcholy $u$, $v$ leží v různých komponentách.

Podle předpokladu je digraf $D$ silně souvislý a obsahuje nějakou orientovanou $(v,u)$-cestu. Taková cesta jistě neobsahuje hranu $uv$, a proto tuto cestu obsahuje i digraf $D-uv$. Vrcholy $u$, $v$ leží ve stejné komponentě digrafu $D-uv$. Dostáváme hledaný spor. □

Připomeňme, že v definici orientace grafu není nespecifikováno, jakou orientaci hrany zvolíme. Následující definice a věta ukazují, že u hranově 2-souvislých grafů tuto volnost můžeme využít. Například síť ulic většiny měst by mohla sestávat pouze z jednosměrných cest a přitom lze zajistit dostupnost každého místa. Řada městských čtvrtí ve Spojených státech má „streets“ a k nim kolmé „avenues“ jednosměrné, což přispívá k plynulosti a bezpečnosti provozu.

**Definice** Řekneme, že graf $G$ je *silně orientovatelný*, jestliže existuje taková jeho orientace $D(G)$, která je silně souvislá.

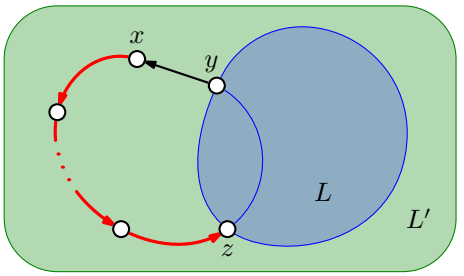
Ulice velké části měst odpovídají planárním grafům. Všimněte si, že následující věta však platí pro libovolné hranově 2-souvislé grafy.

**Věta 12.3.** *Každý hranově 2-souvislý graf je silně orientovatelný.*

*Důkaz.* Tvrzení ukážeme přímo a důkaz bude konstruktivní. Ukážeme, jak takovou silnou orientaci najít.

Máme-li hranově 2-souvislý graf $G$, tak má jistě alespoň tři vrcholy a podle Věty 5.1. je každý jeho vrchol stupně alespoň 2. To však současně znamená (například s využitím Lemmatu 3.1.), že v grafu $G$ existuje nějaký cyklus $v_1, v_2, \ldots, v_k$, kde $3 \leq k \leq |V(G)|$. Hrany cyklu zorientujeme tak, abychom dostali orientovaný cyklus a případné další hrany mezi vrcholy tohoto cyklu zorientujeme libovolně. Dostaneme tak silně souvislý podgraf $L$ výsledného digrafu.

Pokud $V(L) = V(G)$, algoritmus (a důkaz) končí. V opačném případě zvolíme libovolný vrchol $x$, který nepatří do $V(L)$ a který je sousední s nějakým vrcholem $y$ v množině $V(L)$. Takový vrchol $x$ jistě existuje, neboť graf $G$ je dokonce hranově 2-souvislý, a proto kromě hrany $xy$ obsahuje graf $G$ ještě $(x,y)$-cestu, která hranu $xy$ neobsahuje. Označme $z$ první vrchol na $(x,y)$-cestě, který patří do množiny $V(L)$ (Obrázek 12.10.).




Obrázek 12.10.: *Digraf $L$, vrchol $x$, $(x,y)$-cesta a $(x,z)$-cesta v grafu $G$.*

Nyní zorientujeme hranu $yx$ (v tomto pořadí) a všechny hrany $(x,z)$-cesty jako na Obrázku 12.10. (mohli bychom zvolit i opačnou orientaci). Případné další hrany grafu $G$, jejichž koncové vrcholy patří do $V(L)$ nebo leží na $(x,z)$-cestě, zorientujeme libovolně. Nyní celý orientovaný podgraf označíme $L'$ a ukážeme, že graf $L'$ je silně souvislý. Mějme libovolné dva vrcholu $u, v \in V(L')$. Rozlišíme tři případy.

1) Jsou-li $u, v \in V(L)$, existují podle uvedené konstrukce v podgrafu $L$ dvě cesty: orientovaná $(u,v)$-cesta i orientovaná $(v,u)$-cesta.
2) Je-li jeden z vrcholů (bez újmy na obecnosti třeba vrchol $u$) vnitřním vrcholem $(x,z)$-cesty, tak její část: $(u,z)$-cesta spolu s $(z,v)$-cestou v digrafu $L$ tvoří orientovanou $(u,v)$-cestu v grafu $L'$. Podobně $(v,y)$-cesta v digrafu $L$ spolu s orientovanou hranou $yx$ a $(x,u)$-cestou, která je částí $(x,z)$-cesty, tvoří orientovanou $(v,u)$-cestu v digrafu $L'$.
3) Konečně, jsou-li $u$, $v$ dva různé vnitřní vrcholy $(x,z)$-cesty (bez újmy na obecnosti v tomto pořadí), tak orientovaná $(u,v)$-cesta je částí $(x,z)$-cesty a orientovanou $(v,u)$-cestu v digrafu $L'$ sestavíme z $(v,z)$-cesty jako úseku $(x,z)$-cesty, $(z,y)$-cesty v digrafu $L$, hrany $yx$ a $(x,u)$-cesty jako úseku $(x,z)$-cesty.

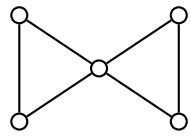
Ve všech případech jsme našli obě cesty: orientovanou $(u,v)$-cestu i orientovanou $(v,u)$-cestu. Digraf $L'$ je proto silně souvislý. Položíme $L = L'$. Pokud graf $G$ obsahuje ještě jiné vrcholy, kromě $V(L)$, celý postup zopakujeme (pro konečné grafy bude takových kroků konečně mnoho), jinak algoritmus i důkaz končí. □

V Kapitole 5. jsme ukázali, že hranová souvislost je slabší než vrcholová souvislost. Ihned tak můžeme vyslovit následující důsledek.

**Důsledek 12.4.** *Každý 2-souvislý graf je silně orientovatelný.*

*Důkaz.* Podle Věty 5.1. pro každý graf $G$ platí $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$, tj. každý 2-souvislý graf je také hranově 2-souvislý. Podle Věty 12.3. je proto $G$ také silně orientovatelný. □

Tvrzení Věty 12.3. je silnější než tvrzení Důsledku 12.4. Věta 12.3. platí i pro grafy, které jsou pouze hranově 2-souvislé a nejsou vrcholově 2-souvislé. Příklad takového grafu je na Obrázku 12.11. a jedna jeho silná orientace je na Obrázku 12.7. vlevo.



Obrázek 12.11.: *Příklad grafu, který je silně orientovatelný, ale není 2-souvislý.*

**Otázka:** Najdete příklad grafu, který je silně orientovatelný, ale není hranově 2-souvislý?

## Cvičení

*12.2.1.*♡ *Dokažte nebo vyvraťte vrcholovou verzi Věty 12.2.: je-li $D$ jednoduchý silně souvislý orientovaný graf, tak jeho deorientace $U(D)$ je vrcholově 2-souvislý (multi)graf.*

*12.2.2. Vysvětlete, která z následujících tvrzení jsou pravdivá. a) Pro každý digraf $D$ platí $D(\mathrm{sym}(D)) \simeq D$, b) Existuje digraf $D$, pro který platí $D(\mathrm{sym}(D)) \simeq D$, c) Pro každý digraf $D$ platí $B(\mathrm{sym}(D)) \simeq D$, d) Existuje digraf $D$, pro který platí $B(\mathrm{sym}(D)) \simeq D$. Jak se změní odpovědi na předchozí otázky, když místo symetrizace $\mathrm{sym}(D)$ budeme pracovat s deorientací $U(D)$?*

*12.2.3. Ukažte, že digraf $D$ je slabě souvislý právě tehdy, když jeho symetrizace je souvislý graf $G = \mathrm{sym}(D)$.*

*12.2.4. Nechť $D$ je digraf, který neobsahuje jako podgraf žádný orientovaný cyklus (je acyklický). Ukažte, že potom $\delta^+(D) = 0$.*

*12.2.5.*♡ *Orientovaný digraf $D^o$, který vznikne změnou orientace všech hran orientovaného digrafu $D$, nazveme* opačným digrafem *k digrafu $D$. Ukažte, že $\mathrm{ideg}_D(v) = \mathrm{odeg}_{D^o}(v)$ pro každý vrchol $v \in D$.*

*12.2.6. Nechť $D$ je orientovaný graf, neobsahující žádný orientovaný cyklus. Ukažte s pomocí výsledků předchozích Cvičení 12.2.4. a 12.2.5., že $\delta^-(D) = 0$.*

*12.2.7. Ukažte, že jednoduchý orientovaný graf $D$, ve kterém platí $\delta^+(D) = k > 0$, obsahuje orientovaný cyklus délky nejméně $k + 1$.*

*12.2.8. Odvoďte a dokažte nutnou a postačující podmínku pro existenci uzavřeného orientovaného tahu v digrafu $D$.*

*12.2.9. Ukažte, že každý graf $G$ má takovou orientaci $D(G)$, že pro každý vrchol $v$, $v \in V(G)$, platí*

$$\left|\mathrm{ideg}_{D(G)}(v) - \mathrm{odeg}_{D(G)}(v)\right| \leq 1.$$

*12.2.10. Ukažte, že každý souvislý graf $G$ má takovou orientaci $D(G)$, ve které nejvýše jeden vrchol má lichý odchozí stupeň.*

*12.2.11. Ukažte, že v digrafu $D$, který vznikne orientací kompletního grafu $K_n$, platí $\sum_{v \in V(D)} \mathrm{odeg}^2(v) = \sum_{v \in V(D)} \mathrm{ideg}^2(v_i)$. Je možno tvrzení zobecnit i pro jiné digrafy?*

*12.2.12. Najděte příklad orientace kompletního grafu, ve kterém posloupnost odchozích stupňů není přeuspořádáním posloupnosti příchozích stupňů. Najdete nekonečnou třídu takových grafů?*

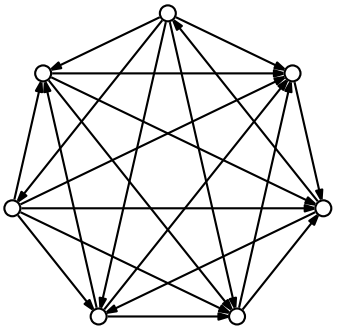
*12.2.13. Dokažte nebo vyvraťte: Pro každé $n > 1$ existuje takový jednoduchý orientovaný graf $D$ s $n$ vrcholy, že $\mathrm{ideg}_D(u) = \mathrm{ideg}_D(v)$ a $\mathrm{odeg}_D(u) = \mathrm{odeg}_D(v)$ pro každé dva různé vrcholy $u, v \in D$.*

*12.2.14. Dokažte nebo vyvraťte: Počet vrcholů lichého vnějšího (vnitřního) stupně v orientovaném grafu musí být sudý.*

## 12.3. Turnaje

Máme $n$ týmů nebo hráčů, kteří budou hrát turnaj, například tenisový. Každé dva týmy se spolu utkají v jednom zápase. Protože v tenise neexistuje remíza, můžeme výsledek každého zápasu znázornit orientovanou hranou v kompletním grafu, která je orientována například od vítěze k poraženému. V této podkapitole se budeme věnovat právě takovým grafům (Obrázek 12.12.).

**Definice** *Turnaj* je orientovaný graf, ve kterém pro každou dvojici různých vrcholů $u$, $v$ existuje právě jedna z orientovaných hran $uv$ nebo $vu$.



Obrázek 12.12.: *Turnaj.*

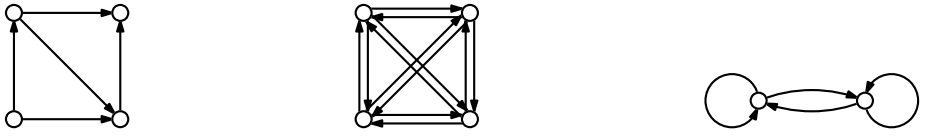
Turnaj získáme jako orientaci $D(K_n)$ (neorientovaného) kompletního grafu $K_n$. Symetrizace turnaje je jednoduchý kompletní graf, neobsahuje žádnou násobnou hranu. Jestliže rozlišujeme vrcholy (například označením), tak není těžké si rozmyslet (Cvičení 12.1.2.), že počet všech jednoduchých digrafů je $4^{\binom{n}{2}} = 2^{n(n-1)}$ a počet všech digrafů je $2^{n^2}$. Počet všech turnajů s $n$ vrcholy je $2^{\binom{n}{2}}$, přičemž pro $n = 1$ pracujeme přirozeně s hodnotou $\binom{1}{2} = 0$. A konečně počet všech jednoduchých digrafů bez protišípů je $3^{\binom{n}{2}}$.

**Tranzitivní a acyklické turnaje**

Souvislost grafových turnajů se sportovními turnaji, ve kterých neexistují remízy, je nasnadě. Nejprve zavedeme dvě přirozené vlastnosti turnaje.

**Definice** Řekneme, že turnaj je *tranzitivní*, jestliže pro každou dvojici orientovaných hran $uv$ a $vw$ obsahuje také orientovanou hranu $uw$. Jestliže turnaj neobsahuje žádný orientovaný cyklus, tak máme *acyklický* turnaj.

Obecně existují acyklické digrafy, které nejsou tranzitivní (Obrázek 12.13. vlevo) a tranzitivní digrafy, které nejsou acyklické (Obrázek 12.13. vpravo).



Obrázek 12.13.: *Digrafy $D_1$, $D_2$ a $D_3$.*

**Otázky:**

- Proč není digraf $D_1$ na Obrázku 12.13. vlevo tranzitivní?
- Proč není digraf $D_2$ na Obrázku 12.13. uprostřed tranzitivní?
- Najděte nejmenší tranzitivní digraf, který není acyklický.

Následující věta dává výsledek, který je možná na první pohled poněkud překvapivý. Říká, že pro turnaje jsou pojmy acykličnost a tranzitivita ekvivalentní. Pokud bychom pracovali pouze s turnaji, tak by stačilo zavést jen jeden z obou pojmů!

**Věta 12.5.** *Turnaj je tranzitivní právě tehdy, když je acyklický.*

*Důkaz.*
„⇒“ První implikaci ukážeme sporem. Předpokládejme, že turnaj $D$ je tranzitivní a obsahuje orientovaný cyklus $v_1, v_2, \ldots, v_k$ (a jeho orientované hrany). Protože digraf $D$ obsahuje orientované hrany $v_1v_2$ a $v_2v_3$, tak z tranzitivity plyne, že obsahuje i orientovanou hranu $v_1v_3$. Obecně, z tranzitivity turnaje $D$ plyne, že když obsahuje orientované hrany $v_1v_i$ a $v_iv_{i+1}$, tak obsahuje i orientovanou hranu $v_1v_{i+1}$. Opakováním postupu ukážeme, že turnaj $D$ obsahuje i hranu $v_1v_k$, což je spor, neboť v orientovaném cyklu leží orientovaná hrana $v_kv_1$. Ukázali jsme, že tranzitivní turnaj $D$ je acyklický.
„⇐“ Opačnou implikaci ukážeme přímo. Předpokládejme, že turnaj $D$ je acyklický. Pro každou dvojici orientovaných hran $uv$, $vw$ obsahuje turnaj také právě jednu ze dvou hran $uw$ a $wu$. Protože digraf $D$ je acyklický, nemůže obsahovat orientovanou hranu $wu$, a proto obsahuje orientovanou hranu $uw$. Tím je důkaz tranzitivity ukončen.
□

Je zřejmé, že turnaj na čtyřech vrcholech, který je na Obrázku 12.14. vlevo, je tranzitivní. Snadno ověříme, že turnaj na Obrázku 12.14. vpravo je acyklický. Podle předchozí věty víme jsou oba turnaje izomorfní (Cvičení 12.3.1.).

Obrázek 12.14.: *Tranzitivní turnaj a acyklický turnaj na čtyřech vrcholech.*

Další věta ukazuje, že o tranzitivních (a tedy ani acyklických) turnajích pro daný počet vrcholů vlastně nemá smysl hovořit v množném čísle. Jestliže lze výsledek sportovního turnaje popsat acyklickým orientovaným grafem, je struktura výsledků celého turnaje určena jednoznačně až na pořadí hráčů.

**Věta 12.6.** *Pro každé přirozené číslo $n$ existuje jediný tranzitivní turnaj s $n$ vrcholy (až na izomorfismus).*

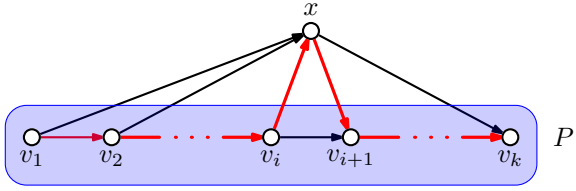
Důkaz věty je ponechán jako Cvičení 12.3.2.

**Další vlastnosti turnajů**

I v případě, kdy turnaj není tranzitivní, můžeme vyslovit zajímavá tvrzení. V libovolném turnaji například vždy můžeme seřadit všechny hráče tak, že každý hráč vždy porazil následujícího hráče v posloupnosti. Můžeme tak zavést pojem *(orientované) hamiltonovské cesty* a *(orientovaného) hamiltonovského cyklu*.

**Věta 12.7.** *Každý turnaj obsahuje orientovanou hamiltonovskou cestu.*

*Důkaz.* Označme $P = v_1, v_2, \ldots, v_k$ nějakou nejdelší orientovanou cestu v daném turnaji $D$ s $n$ vrcholy. Jestliže $k = n$, tvrzení platí a důkaz končí.




Obrázek 12.15.: *Prodloužení orientované cesty $P$ v turnaji $D$.*

Předpokládejme nyní pro spor, že $k < n$. To znamená, že v turnaji $D$ existuje vrchol $x$, který neleží na cestě $P$. Kdyby hrana $xv_1$ patřila do turnaje $D$, tak by orientovaná cesta $x, v_1, v_2, \ldots, v_k$ byla delší než $P$, což podle předpokladu není možné. Proto v turnaji $D$ leží orientovaná hrana $v_1x$.

Označme nyní $v_i$ poslední takový vrchol na cestě $P$, že orientovaná hrana $v_ix$ patří do hranové množiny turnaje $D$. Jistě $i < k$, neboť kdyby hrana $v_kx$ patřila mezi hrany turnaje, tak orientovaná cesta $v_1, v_2, \ldots, v_k, x$ je delší než $P$, což podle předpokladu není možné. Nyní však snadno nahlédneme, že orientovaná cesta $v_1, v_2, \ldots, v_i, x, v_i$ (na Obrázku 12.15. je vyznačena červeně) je delší orientovaná cesta v turnaji $D$, než nejdelší cesta $P$ a máme hledaný spor. □

Říká se, že dobrý dealer s ojetými vozy umí přesvědčit zákazníka, který váhá nad koupí konkrétního vozu. Postupně srovnává další a další dvojice vozů, vždy zvolí pro kupce výhodnější variantu, projdou tak všechna auta v prodejně a nakonec skončí u předem zvoleného vozu. Věta 12.7. ukazuje, že takové tvrzení má reálný základ. Stačí jen vhodně zvolit kritérium, podle kterého budeme každou dvojici vozů porovnávat.

**Věta 12.8.** *Turnaj obsahuje orientovaný hamiltonovský cyklus právě tehdy, když je silně souvislý.*

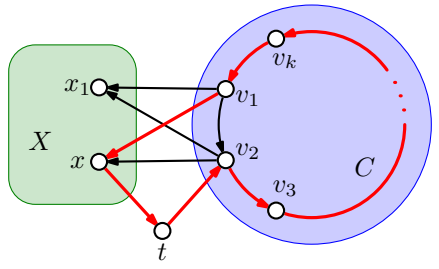
*Důkaz.* Jedná se o tvrzení ve tvaru ekvivalence, ukážeme obě implikace.

„⇒“ První implikace je zřejmá. Protože každé dva vrcholy $u$, $v$ turnaje leží na (orientovaném) hamiltonovském cyklu, tak příslušný úsek cyklu mezi vrcholy $u$ a $v$ tvoří orientovanou $(u, v)$-cestu.

„⇐“ Nejprve nepřímo ukážeme, že silně souvislý turnaj $D$ obsahuje orientovaný cyklus. Podle Věty 12.5. je každý acyklický turnaj tranzitivní a v tranzitivním turnaji mohou být všechny vrcholy seřazeny zleva doprava tak, že každá hrana směřuje doprava (Obrázek 12.14. vlevo). V acyklickém turnaji proto nenajdeme orientovanou cestu zprava doleva, a tak acyklický turnaj není silně souvislý.

Označme $C = v_1, v_2, \ldots, v_k$ nějaký nejdelší orientovaný cyklus v silně souvislém turnaji $D$ s $n$ vrcholy. Jestliže $k = n$, tak $C$ je hamiltonovský cyklus a důkaz končí.

Předpokládejme pro spor, že $k < n$ a tedy že v turnaji $D$ existují vrcholy mimo cyklus $C$. Protože turnaj $D$ je silně souvislý, tak obsahuje hranu z nějakého vrcholu cyklu $C$ do nějakého vrcholu $x_1$, který do $C$ nepatří. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že se jedná o hranu $v_1x_1$ (Obrázek 12.16.). Kdyby hrana $x_1v_2$ patřila do $D$, tak cyklus $v_1, x_1, v_2, \ldots, v_k$ byl delší než cyklus $C$, a proto do turnaje $D$ patří hrana $v_2x_1$. Opakováním téhož argumentu snadno nahlédneme, že všechny hrany mezi vrcholy cyklu $C$ a vrcholem $x_1$ směřují do $x_1$ (Obrázek 12.16.).




Obrázek 12.16.: *Prodloužení cyklu $C$ přes vrchol množiny $X$ a přes vrchol $t$.*

Označme $X$ množinu všech vrcholů mimo cyklus $C$, do kterých směřuje hrana z vrcholu $v_2$ (!). Analogicky jako v předchozím odstavci zdůvodníme, že všechny hrany z vrcholů cyklu $C$ mají koncový vrchol v množině $X$. Vrchol $x_1$ jistě do množiny $X$ patří také.

Protože ale turnaj $D$ je silně souvislý, musí existovat také cesty z vrcholů množiny $X$ do vrcholů cyklu $C$. Proto musí turnaj $D$ obsahovat nějaký vrchol $t \notin X$, do kterého vede hrana z nějakého vrcholu $x \in X$. Víme, že hrana mezi $t$ a $v_2$ končí ve vrcholu $v_2$, jinak by vrchol $t$ patřil do množiny $X$. Nyní dostáváme hledaný spor, neboť orientovaný cyklus $C' = v_1, x, t, v_2, v_3, \ldots, v_k$ je delší, než cyklus $C$ a důkaz končí. □

Všimněte si, že uvedený důkaz je konstruktivní. Popisuje algoritmus, který umí libovolný orientovaný cyklus délky menší než $n$ v daném turnaji prodloužit, a proto opakováním uvedeného postupu můžeme hamiltonovský cyklus zkonstruovat, pokud existuje (Cvičení 12.3.12.).

**Král turnaje**

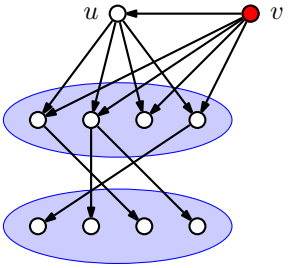
Posloupnosti odchozích stupňů orientovaného (i neorientovaného) grafu se říká *skóre grafu*, protože v modelu soutěží odpovídá počtu vyhraných zápasů. Všimněte si, že turnaj nemusí mít jednoznačného vítěze, pokud více vrcholů má stejný nejvyšší odchozí stupeň (stejné *skóre vrcholu*). Je zajímavé si uvědomit, že v tranzitivních turnajích je podle Věty 12.6. pořadí určeno jednoznačně, přičemž každý hráč má jiné skóre. Nyní ukážeme, že v každém turnaji musí existovat hráči (týmy), kteří porazili všechny ostatní hráče přímo a nebo nepřímo „přes“ *jediný* vrchol turnaje tak, že hráč $x$ porazil hráče $y$ hráč a $y$ porazil hráče $z$.

**Definice** Řekneme, že vrchol $u$ je *králem* v digrafu $D$, jestliže každý jiný vrchol $v$ je dosažitelný z $u$ po nějaké orientované cestě délky nejvýše 2.

V obecném orientovaném grafu král může a nemusí existovat. Následující věta však říká, že v turnaji takový vrchol existuje vždy.

**Věta 12.9.** *V každém turnaji existuje král.*

*Důkaz.* Důkaz je konstruktivní. Ukážeme, jak krále v turnaji najít. Označme $u$ libovolný vrchol turnaje $D$. Jestliže vrchol $u$ je králem (každý vrchol je dosažitelný z $u$ po orientované cestě délky nejvýše 2), tvrzení platí. Pokud vrchol $u$ není králem, musí existovat vrchol $v$, který není dosažitelný z $u$ po orientované cestě délky nejvýše 2 (Obrázek 12.17.). Protože $D$ je orientace kompletního grafu, tak pro každý vrchol $w$ dosažitelný z vrcholu $u$ cestou délky 1 (jedinou hranou) je vrchol $w$ také koncovým vrcholem hrany $vw$, jinak by vrchol $v$ byl dosažitelný z vrcholu $u$ cestou $u, w, v$ délky 2. Ze stejného důvodu je navíc vrchol $u$ koncovým vrcholem hrany $vu$. Proto jistě platí $\operatorname{odeg}(v) > \operatorname{odeg}(u)$.




Obrázek 12.17.: *Hledání krále turnaje $D$.*

Z Obrázku 12.17. je současně zřejmé, že všechny vrcholy dosažitelné z vrcholu $u$ cestou délky nejvýše 2 jsou dosažitelné stejně dlouhou případně kratší cestou i z vrcholu $v$. Jestliže nalezený vrchol $v$ je králem, tvrzení platí. Pokud $v$ není králem, označíme jej $u$ a najdeme jiný vrchol $v$ s ještě vyšším odchozím stupněm. Protože $D$ je konečný graf, tak nemůžeme do nekonečna nacházet vrcholy s vyšším odchozím stupněm a dříve nebo později najdeme takový vrchol $v$, který je králem v turnaji $D$. □

**Otázky:**

- Najděte příklad digrafu, který nemá krále.
- Najděte příklad digrafu na alespoň třech vrcholech, který má právě dva krále.
- Najděte příklad digrafu na alespoň třech vrcholech, ve kterém je každý vrchol králem.

**Příliš mnoho králů**

Je dobré si uvědomit, že koncept krále, tak jak byl zaveden na straně 244, nemá vlastnosti, které bychom od „krále“ čekali. Podle Věty 12.9. víme, že krále budeme umět najít v každém turnaji. Intuitivně bychom čekali, že král bude jaksi výjimečným vrcholem v turnaji a že králů nebude mnoho. Opak je pravdou! Dá se ukázat, že ve většině turnajů bude téměř každý vrchol králem, což samotný pojem krále devalvuje.

Vrchol $u$ nazveme *imperátorem* turnaje $D$, jestliže každý jiný vrchol $v$ turnaje $D$ je dosažitelný z vrcholu $u$ cestou délky 1 (je koncovým vrcholem orientované hrany $uv$). První vrchol na Obrázku 12.14. vlevo je imperátor, ale například v turnaji na Obrázku 12.12. imperátor neexistuje. Analogicky bychom mohli zavést imperátora digrafu. Pochopitelně, v každém turnaji existuje nejvýše jeden imperátor (proč?).

Tým, který v turnaji porazí všechny ostatní týmy, by bezesporu byl jediným králem turnaje a současně imperátorem. Avšak imperátory v turnajích najdete jen zřídka. Skoro vždy každý tým alespoň jeden zápas prohraje a v turnaji pak žádný imperátor není. Právě proto byl zaveden pojem krále. První užitečné pozorování je, že každý tým, který byl poražen, byl poražen nějakým králem.

**Lemma 12.10.** *Ke každému vrcholu $v$ s kladným příchozím stupněm najdeme v turnaji $D$ alespoň jednoho takového krále $u$, že hrana $uv \in A(D)$.*

Důkaz je ponechán jako Cvičení 12.3.5. Následující věta však ukazuje zajímavé pozorování, že turnaj bez imperátora nemůže mít jediného krále.

**Věta 12.11.** *Vrchol $v$ je jediným králem turnaje $D$ právě tehdy, když $v$ je imperátorem turnaje $D$.*

*Důkaz.*

„⇒“ První implikaci ukážeme nepřímo. V turnaji $D$ najdeme krále $v$ dle Věty 12.9. Jestliže král $v$ není imperátorem, tak v $D$ existuje alespoň jedna hrana $uv$. Podle Lemmatu 12.10. najdeme v turnaji $D$ ještě jiného krále.

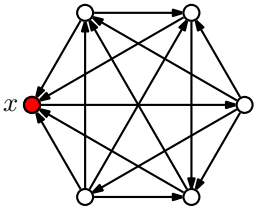
„⇐“ Opačná implikace plyne ihned z definice imperátora a krále. □

Následující tvrzení je zajímavé nejen na první pohled. Pokud v turnaji $D$ není imperátor, tak podle Věty 12.9. sice v $D$ najdeme krále, ale dvojvládí nemůže nikdy nastat! Králů proto musí existovat více než dva.

**Věta 12.12.** *Žádný turnaj nemá právě dva krále.*

Důkaz je ponechán jako Cvičení 12.3.6. Dále ve Cvičení 12.3.7. ukážeme, že v každém turnaji bez imperátora s více než dvěma vrcholy existují alespoň tři králové. Kolik? To závisí na struktuře daného turnaje. A konečně ve Cvičení 12.3.11. pak ukážeme, že libovolný počet králů v turnaji (až na dvě malé výjimky) je možný.

Je dobré si také uvědomit, že král turnaje nemusí nutně odpovídat vrcholu s velkým odchozím stupněm. Například v turnaji na Obrázku 12.18. je vrchol $x$ králem (třebaže ne jediným králem), i když jeho skóre je 1 a ve sportovní terminologii bychom řekli, že uzavírá tabulku.




Obrázek 12.18.: *Turnaj $D$, ve kterém je vrchol $x$ králem a přitom* $\operatorname{odeg}(x) = \delta^-(D)$.

Naše pozorování můžeme shrnout tak, že ačkoliv zavedení pojmu krále bylo přirozené, nepodařilo se tím najít pěknou charakteristiku „nejlepších“ hráčů turnaje. Vlastnost „býti nejlepší“ není snadno uchopitelná a snad právě proto ani nějaká všeobecně uznávaná charakteristika neexistuje. V řadě soutěží tak zůstává prostor pro diskuze, jak by se pořadí nejlepších týmů změnilo při jiném uspořádání soutěže. Na druhou stranu je tu příležitost pro různé playoff systémy s atraktivními zápasy.

**Odkazy:**

- http://mathworld.wolfram.com/Tournament.html
- král a matice sousednosti http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/graph.htm
- článek rozebírající omezení pojmu krále http://www.jstor.org/pss/2689952

## Cvičení

*12.3.1. Najděte izomorfismus obou turnajů na Obrázku 12.14.*

*12.3.2. Dokažte Větu 12.6.*

*12.3.3. Najděte příklad silně souvislého digrafu, ve kterém neexistuje král.*

*12.3.4. Ukažte, že vyvážený turnaj s $n$ vrcholy existuje právě tehdy, když $n$ je liché.*

*12.3.5. Dokažte Lemma 12.10., že ke každému vrcholu $v$ s kladným příchozím stupněm najdeme v turnaji $D$ alespoň jednoho krále $u$, že $uv \in A(D)$.*

*12.3.6. Dokažte Větu 12.12., že žádný turnaj nemá právě dva krále.*

*12.3.7. Mějme takový turnaj $D$, že $\delta^-(D) > 0$ (každý vrchol je koncovým vrcholem nějaké orientované hrany). Ukažte, že turnaj $D$ obsahuje alespoň tři krále.*

*12.3.8. Ukažte, že neexistuje turnaj na čtyřech vrcholech, ve kterém je každý vrchol králem.*

*12.3.9. Pro každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$, kde $n \neq 2, 4$, najděte příklad turnaje s $n$ vrcholy, ve kterém je každý vrchol králem.*

*12.3.10. Najděte příklad turnaje, ve kterém existuje král $x$ s $\operatorname{odeg}(x) = 1$ a vrchol $y$ s $\operatorname{odeg}(y) > 1$, který není králem.*

*12.3.11. Mějme dvě přirozená číslo $k, n \in \mathbb{N}$, kde $n \geq k$, $k \neq 2$ a neplatí současně $n = k = 4$. Najděte příklad turnaje s $n$ vrcholy, který má právě $k$ králů.*

*12.3.12. Sestavte algoritmus, který v daném turnaji $D$ s $n$ vrcholy najde hamiltonovskou cestu. Složitost algoritmu by měla být nejvýše $O(n^2)$.*

*12.3.13.♡ Kolik existuje neizomorfních turnajů se třemi vrcholy, kde každý vrchol je králem?*

*12.3.14. Kolik existuje turnajů s právě třemi králi, jestliže rozlišujeme vrcholy?*

*12.3.15. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení: každý tranzitivní digraf (ne nutně turnaj) je současně acyklický.*

*12.3.16. Ukažte, že orientovaný graf je acyklický právě tehdy, když jeho vrcholy mohou být tak seřazeny, že odpovídající matice sousednosti orientovaného grafu je horní trojúhelníková matice s nulami na hlavní diagonále.*

*12.3.17. Ukažte, že turnaj je acyklický právě tehdy, když má každý vrchol jiný odchozí stupeň.*

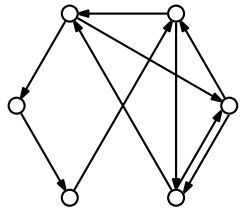
*12.3.18. Existuje příklad turnaje, kde králem je vrchol s odchozím stupněm 1 a přitom jiný vrchol s vyšším odchozím stupněm krále není? Pokud ano, najděte jej, pokud ne, dokažte to.*

*12.3.19.* Existuje takový turnaj, ve kterém pro každou trojici hráčů $x$, $y$, $z$ existuje soupeř $w$, který všechny tři porazil?*

## 12.4. Orientované eulerovské grafy

Podobně jako v Kapitole 11.1. jsme definovali neorientované eulerovské grafy, můžeme definovat i orientované eulerovské grafy.

**Definice** *Orientovaný (uzavřený nebo otevřený) eulerovský tah* je takový orientovaný tah, který obsahuje všechny vrcholy a orientované hrany daného digrafu. *Orientovaný eulerovský graf* nebo *eulerovský digraf* je takový digraf, ve kterém existuje uzavřený eulerovský orientovaný tah.



Obrázek 12.19.: *Orientovaný eulerovský graf.*

Nejprve ukážeme, že i pro digrafy platí analogie Eulerovy věty (Věta11.1.).

**Věta 12.13.** *Digraf je eulerovský právě tehdy, když je vyvážený a jeho symetrizace je souvislý graf.*

*Důkaz.*
„⇒“ Orientovaný eulerovský graf $D$ je jistě souvislý a souvislá je proto i jeho symetrizace. Protože každý vrchol digrafu je koncovým vrcholem jedné hrany a počátečním vrcholech následující hrany uzavřeného eulerovského tahu, tak počet příchozích a odchozích hran každého vrcholu je stejný. To znamená, že digraf $D$ je vyvážený.
„⇐“ Mějme vyvážený orientovaný graf $D = (V, A)$, jehož symetrizace je souvislý graf. Označme $T = v_0, e_1, v_1, e_2$, nějaký nejdelší tah v digrafu $D$, jeho délka je $k$. Je lehké zdůvodnit, že tah je uzavřený, tj. $v_0 = v_k$, neboť jinak do vrcholu $v_k$ přichází *více* orientovaných hran tahu $T$, než z něj odchází, a protože $\mathrm{odeg}(v_k) = \mathrm{ideg}(v_k)$, bylo by možné tah $T$ prodloužit. To by byl spor.

Označme $V'$ množinu všech vrcholů tahu $T$ a $A'$ množinu všech hran tahu $T$. Sporem ukážeme, že platí $V' = V$ a $A' = A$ a že nalezený tah je eulerovský. Rozlišíme dva případy:

1) Jestliže $V' \neq V$, tak v digrafu $D$ jistě najdeme hranu $e = v_i x$, kde $v_i \in V'$ a $x \in (V \setminus V')$, protože digraf $D$ má souvislou symetrizaci. Pak ale tah

$$v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \ldots, v_k, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_i, e, x$$

je delší tah v digrafu $D$, než tah $T$, což je spor.
2) Pokud $A' \neq A$, tak zvolme libovolnou hranu $e \in (A' \setminus A)$, kde $e = v_i v_j$. Pak opět dostáváme spor, protože v digrafu $D$ najdeme tah

$$v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \ldots, v_k, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_i, e, v_j,$$

který je delší než je tah $T$.

Ukázali jsme, že tah $T$ je uzavřený a obsahuje všechny vrcholy i orientované hrany digrafu $D$ a jedná se proto o eulerovský tah a $D$ je orientovaný eulerovský tah. □

**Otázky:**

- Proč je v tvrzení Věty 12.13. požadavek, aby symetrizace digrafu byla souvislá?
- Jak by se změnily vlastnosti orientovaného eulerovského grafu, kdybychom v definici orientovaného eulerovského tahu nepožadovali, aby obsahoval všechny vrcholy?
- Musí být eulerovský digraf silně souvislý?

Eulerovy větu pro orientované grafy (Větu 12.13.) můžeme přeformulovat do následujícího tvrzení. Důkaz je ponechán jako Cvičení 12.4.2.

**Důsledek 12.14.** *Digraf je eulerovský právě tehdy, když je vyvážený a silně souvislý.*

## Cvičení

*12.4.1. Ukažte, že pro každý neorientovaný sudý graf (má všechny vrcholy sudého stupně) existuje jeho vyvážená orientace.*

*12.4.2. Dokažte Větu 12.14., tj. dokažte, že digraf je eulerovský právě tehdy, když je vyvážený a silně souvislý.*

*12.4.3. Zformulujte a dokažte nutnou a postačující podmínku pro to, aby digraf bylo možno nakreslit jedním otevřeným orientovaným eulerovským tahem.*

*12.4.4. Ukažte, že vyvážený digraf je slabě souvislý právě tehdy, když je silně souvislý.*

*12.4.5. Sejf se otvírá digitální klávesnicí, přičemž sejf se otevře při zadání správné posloupnosti bez ohledu na předchozí stisknuté klávesy. Je-li například* 1234 *heslo otvírající sejf, tak pro otevření můžeme zadat* **1234**, *nebo* 8**1234** *nebo klidně* 6382543**1234**.

*K prolomení kódu můžeme postupně zadat všechna čísla od* 0000 *do* 9999. *Avšak to bychom museli naťukat celkem* $4 \cdot 10000 = 40000$ *cifer, což by trvalo zbytečně dlouho. Jaký je nejmenší počet cifer, který zajistí prolomení kódu? Jak sestrojit příslušnou posloupnost čísel?*

*12.4.6. Zobecněte a vyřešte úlohu ze Cvičení 12.4.5. i pro* $n$*-ciferná čísla s číslicemi* $1, 2, \ldots, q$.

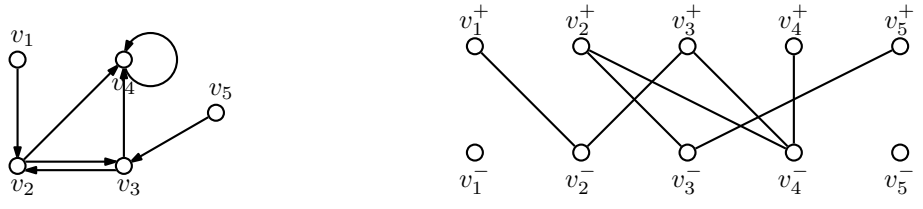
## 12.5. Doplňková témata

### Split digrafu

Abychom uměli rozpoznat, zda posloupnost je nebo není digrafovovou posloupností jednoduchého(!) digrafu, využijeme tzv. splitu. Podobná myšlenka se využila v důkazu první Petersenovy věty (Věta 6.7.) pro neorientované grafy.

**Definice Split digrafu**
Mějme digraf $D = (V, A)$ s $n$ vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$. *Split digrafu* $D$ je bipartitní graf $G$ jehož partity $V^+ = \{v_1^+, v_2^+, \ldots, v_n^+\}$ a $V^- = \{v_1^+, v_2^+, \ldots, v_n^+\}$ jsou kopiemi $V$. Za každou orientovanou hranu $v_iv_j$ digrafu $D$ obsahuje split hranu $v_i^+v_j^-$.

Split každého digrafu (i se smyčkami) je jednoduchý bipartitní graf (Obrázek 12.20.). A naopak, z každého bipartitního grafu $G = (U \cup W, E)$ se stejně velkými partitami je možno sestavit odpovídající digraf. Má-li každá partita bipartitního grafu $n$ vrcholů, označíme vrcholy digrafu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a přidáme orientovanou hranu $v_iv_j$ za každou hranu $u_iw_j$ bipartitního grafu. Vznikne digraf, ve kterém se mohou vyskytovat smyčky.




Obrázek 12.20.: *Digraf* $D$ *a jeho split* $G$.

Posloupnost odchozích stupňů odpovídá posloupnosti stupňů v partitě $V^+$ a posloupnost příchozích stupňů odpovídá posloupnosti stupňů v partitě $V^-$.

Existence digrafu (se smyčkami) je proto ekvivalentní otázce existence bipartitního grafu, který je jeho splitem.

**Bigrafová posloupnost**

Mějme dvě posloupnosti nezáporných celých čísel $P = p_1, p_2, \ldots, p_m$ a $Q = q_1, q_2, \ldots, q_n$. Dvojice posloupností $(P, Q)$ se nazývá *bigrafová*, jestliže existuje bipartitní graf, ve kterém posloupnost stupňů vrcholů jedné partity je $P$ a posloupnost stupňů vrcholů druhé partity je $Q$. Lze ukázat tvrzení, které udává nutnou a postačující podmínku, aby daná dvojice posloupností byla bigrafová.

**Věta 12.15.** *Dvojice netriviálních posloupnosti nezáporných celých čísel $(P, Q)$ je bigrafová právě tehdy, když je bigrafová dvojice posloupností $(P', Q')$, přičemž $P'$ získáme z $P$ vynecháním nejvyšší hodnoty $\Delta$ a $Q'$ získáme z $Q$ snížením $\Delta$ nejvyšších prvků o jedničku.*

Důkaz ponecháme jako Cvičení 12.5.1.

Je dobré si uvědomit, že ne každý bipartitní graf může být splitem nějakého digrafu. Z definice splitu digrafu je zřejmé, že obě partity musí mít stejnou velikost a navíc musí být jednoznačně určeno, které dvojice vrcholů z jedné a druhé partity odpovídají jedinému vrcholu digrafu.

## Cvičení

*12.5.1. Dokažte Větu 12.15., tj. ukažte, že dvojice netriviálních posloupnosti nezáporných celých čísel $(P, Q)$ je bigrafová právě tehdy, když je bigrafová dvojice posloupností $(P', Q')$, přičemž $P'$ získáme z $P$ vynecháním nejvyšší hodnoty $\Delta$ a $Q'$ získáme z $Q$ snížením $\Delta$ nejvyšších prvků o jedničku.*

# Kapitola 13. Problémy a úlohy

## 13.1. Úlohy se známým řešením

Následující úlohy nejsou zařazeny do žádného z tématických celků. Některé úlohy zůstaly nezařazené, protože není možno jednoznačně stanovit, do které kapitoly patří a nebo naopak proto, aby téma kapitoly „nenutilo“ čtenáře zvolit jeden z několika možných způsobů řešení.

### Cvičení

*13.1.1. Úloha Hanojských věží*[40]*. Máme tři kolíky a sadu osmi disků různých velikostí. Na začátku je všech osm disků seřazeno podle velikosti na prvním kůlu. Úkolem je přemístit všechny disky na jiný kůl za dodržení následujících podmínek:*

*1) vždy se přesunuje pouze jeden disk,*
*2) nikdy nesmí ležet větší disk na menším.*

*Zformulujte úlohu hanojských věží pomocí teorie grafů a vyřešte ji pro věž ze tří disků. Najděte nejmenší možný počet přesunů, které jsou nutné pro přemístění celé věže.*

*Obrázek 13.1.: Hanojské věže*[41]*.*

*13.1.2. Trianglie je malá ostrovní země, ve které žádná cesta nekončí jinak, než křižovatkou ve tvaru Y. Mladý princ se vydal na cesty po ostrově. Nasedl na koně a chystá se odjet. Když projíždí cestou pod okny paláce, volá na něj královna z balkónu:*

*„Ale princi, jak najdeš cestu zpět do paláce?“*

*„Neboj matko,“ odpovídá princ.*

*„Vždy na každé druhé křižovatce odbočím vpravo a jinak budu odbočovat vlevo. Takto jistě dříve nebo později přijedu zpět před palác.“*

*Má princ pravdu?*

**Poznámka 13.1.** Cvičení 13.1.2. by bylo možno zobecnit na $r$-pravidelné grafy („Multianglie“), kde se podle nějaké permutace střídá volba odboček od první až do odbočky $(r-1)$.

*13.1.3. Máme dán konvexní n-úhelník a v něm všechny úhlopříčky. Žádné tři úhlopříčky se neprotínají v jednom bodě (uvnitř n-úhelníku). Vypočítejte počet oblastí uvnitř n-úhelníku, které takto vzniknou.*

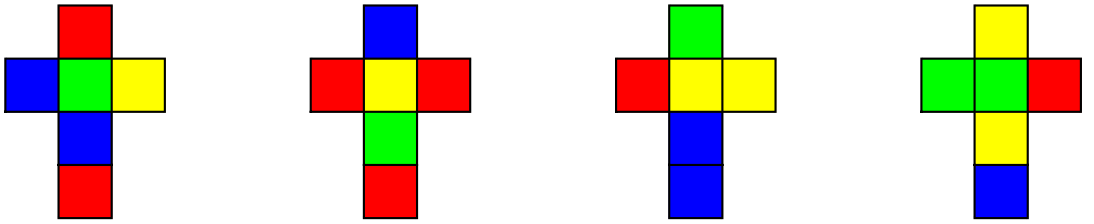
*13.1.4. Hlavolam nazvaný „Instant insanity“* [42] *jsou čtyři kostky, které mají stěny obarvené čtyřmi barvami, viz Obrázek 13.2. (existuje více variant hlavolamu, které se liší obarvením stěn). Úkolem*

[40] Úloha Hanojských věží je připisována Édouardovi Lucasovi

[42] Doslovný překlad by mohl být „bezprostřední šílenství“. Hlavolam vymyslel Frank Armbruster. V letech 1966–1967 prodali Parker Brothers více než 12 miliónů kusů.

*je poskládat všechny čtyři kostky do řady tak, aby se na každé straně, která sestává ze čtyř kostek, objevily všechny čtyři barvy. Pořadí kostek ani barev nehraje roli.*

*1) Jak vyřešit úlohu s využitím teorie grafů?*
*2) Najděte řešení hlavolamu z Obrázku 13.2.*
*3) Kolik existuje různých řešení hlavolamu z Obrázku 13.2.?*



*Obrázek 13.2.: Kostky hlavolamu „Instant insanity“.*

*13.1.5. Existuje bipartitní graf s alespoň pěti vrcholy, jehož doplněk je také bipartitní?*

*13.1.6. Dokažte nebo vyvraťte: je-li $\delta(G) \geq 2$, potom $G$ buď obsahuje hamiltonovskou cestu nebo cyklus délky alespoň $2\delta(G)$.*

*13.1.7. Dokažte, že každý konečný graf $G$ je izomorfní nějakému indukovanému podgrafu nekonečného grafu $X = (\mathbb{N}, E_{\mathbb{N}})$, kde hrana $\{m, n\}$ leží v $E_{\mathbb{N}}$, pokud $NSD(m, n) > 1$. (Jedná se o graf, kde vrcholy jsou přirozená čísla a hrany spojují soudělná čísla).*

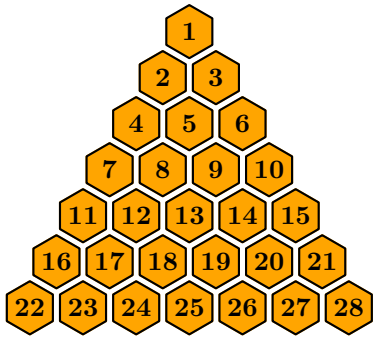
*Jiná formulace: Ukažte, že pro libovolný graf $G = (V, E)$ existuje taková prostá funkce $f : V \to \mathbb{N}$, že platí $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow NSD(f(u), f(v)) > 1$*

*13.1.8. Mějme dán netriviální strom $T$. Pro $i \in \mathbb{N}$ označme $n_i$ počet vrcholů stupně $i$ ve stromu $T$. Dokažte, že platí $n_1 - n_3 - 2n_4 - 3n_5 - \ldots - (\Delta(T) - 2)n_{\Delta(T)} = 2$.*

*13.1.9. Mnohostěny můžeme definovat v prostoru libovolné dimenze. Stěny $n$-dimenzionálního mnohostěnu tvoří $(n-1)$-rozměrné mnohostěny. Nalezněte minimální $n$, pro které existuje $n$-dimenzionální mnohostěn, jehož graf (vrcholy grafu odpovídají vrcholům mnohostěnu a dva vrcholy jsou spojeny hranou grafu právě tehdy, když odpovídající vrcholy mnohostěnu jsou spojeny hranou) není rovinný.*

*13.1.10. Hrany grafu $K_7$ jsou obarveny červeně a modře. Dokažte, že v takto obarveném grafu $K_7$ můžeme najít buď modrý podgraf $K_3$ nebo červenou cestu na třech vrcholech (ne nutně indukovanou).*

*13.1.11. V televizní soutěži AZ-kvíz odpovídají hráči (červený a modrý) střídavě na otázky a podle odpovědi vybarvují políčka hracího plánu (Obrázek 13.3.) svou barvou. Vyhraje ten, kterému se podaří obarvit pole tak, vytvořil souvislou oblast jedné barvy tak, aby spojovala všechny tři strany hracího plánu. Rohová pole jsou společná dvěma sousedním stranám hracího plánu. Může soutěž skončit remízou? Platí to i pro více hráčů?*




*Obrázek 13.3.: Hrací plán pro AZ-kvíz.*

*13.1.12. Ukažte, že pro náhodně vybraný strom na $n$ vrcholech má jeho náhodně vybraný vrchol stupeň 1 s pravděpodobností $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-2}$. Každý strom a každý jeho vrchol mají stejnou pravděpodobnost, že budou vybrány.*

*13.1.13. Podle Důsledku 9.9. víme, že rovinný graf bez trojúhelníků má nejvýše $2n-4$ hran. Ukažte, že počet hran grafu na $n$ vrcholech (ne nutně rovinného), který neobsahuje jako podgraf trojúhelník, je nejvýše $n(n-1)/3$. Návod: použijte metodu dvojího počítání.* Mějme graf $G$ na $n$ vrcholech, který neobsahuje jako podgraf trojúhelník. Spočítáme dvěma způsoby počet čtveřic $(v_1, v_2, v_3, e)$, kde $v_1, v_2, v_3$ jsou nějaké tři vrcholy grafu $G$ a $e$ je hrana grafu $G$ mezi některými dvěma vrcholy z nich, tj. $e \in (E(G) \cap \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3\})$. Počet takových čtveřic označíme $\ell$.

Různých trojúhelníků v grafu $G$ je nejvýše $\binom{n}{3}$ a každý obsahuje nejvýše dvě hrany. Proto $\ell \le 2\binom{n}{3}$. Současně každá hrana $e = xy$ se nachází alespoň v $(n-2)$ čtveřicích, které dostaneme přidáním třetího vrcholu $z$ z $(n-2)$ zbývajících vrcholů. Celkem máme

$$\begin{aligned}(n-2)|E(G)| &\le \ell \le 2\binom{n}{3}\\ |E(G)| &\le \frac{2n(n-1)(n-2)}{6(n-2)}\\ |E(G)| &\le \frac{n(n-1)}{3}.\end{aligned}$$

*13.1.14. Ukažte, že když graf $G$ obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak obsahuje lichý cyklus jako indukovaný podgraf.*

*13.1.15. Ukažte, že hrany libovolného rovinného grafu lze zorientovat tak, aby z každého vrcholu vycházely nejvýše tři hrany.*

*13.1.16. Je každý 3-souvislý graf hamiltonovský? A co $k$-souvislý? Najdete protipříklad?*

*13.1.17. Kolik existuje různých cyklů v kompletním grafu a) $K_6$, b) $K_n$. Předpokládáme, že rozlišujeme vrcholy.*

*13.1.18. Kolik existuje různých cest mezi dvěma různými vrcholy v kompletním grafu?*

*13.1.19. Vysvětlete, proč následující důkaz Věty 8.11. není správný: Mějme takové obarvení grafu $G$, že počet vrcholů obarvených barvou 1 je minimální. Nejdelší cestu začne konstruovat ve vrcholu barvy 1 a budeme ji postupně prodlužovat o vrcholy nových barev (vždy zvolíme takový vrchol, jehož barva na cestě ještě není). Dostaneme vždy cestu délky nejvýše $\chi(G)-1$ (s nejvýše $\chi(G)$ vrcholy) a proto tvrzení Věty 8.11. platí.*

*13.1.20. Na šachovnici $n \times n$ polí je $2n$ polí obarveno modře. Na jedno modré políčko umístíme věž. Věží budeme táhnou vždy pouze na jiné modré políčko tak, že budeme střídavě pohybovat věží řadě a ve sloupci (střídavě vodorovně a svisle). Ukažte, že existuje takové počáteční políčko, že vždy bude možno vhodnou volbou tahů pokračovat dalším tahem podle pravidel.*

*13.1.21. Ukažte, že je-li $G$ rovinný graf na alespoň dvou vrcholech, tak $G$ musí obsahovat alespoň dva vrcholy stupně nejvýše 5. (Jedná se o silnější tvrzení než Důsledek 9.8.). Dále ukažte, že je-li navíc graf $G$ souvislý, tak v grafu $G$ musí existovat dokonce alespoň tři vrcholy stupně nejvýše 5.*

*13.1.22.$^\heartsuit$ Rozhodněte, zda souvislý kubický (3-pravidelný) graf je hranově 2-souvislý právě tehdy, když je vrcholově 2-souvislý.*

*13.1.23. Popište všechny grafy bez sudých cyklů a dokažte, že váš seznam je úplný.*

*13.1.24. Dokažte, že v každém souvislém grafu $G$ s alespoň třemi vrcholy existují dva různé vrcholy $u$, $v$ takové, že všechny grafy $G-u$, $G-v$ a $G-\{u,v\}$ jsou souvislé.*

*13.1.25. Perfektní 1-faktorizace kubického grafu $G$ je taková trojice úplných párování $M_1$, $M_2$, $M_3$ grafu $G$, že párování jsou po dvou disjunktní a sjednocení kterýchkoliv dvou párování tvoří hamiltonovský cyklus grafu $G$. Ukažte, že hranol $C_3 \square K_2$ má perfektní 1-faktorizaci.*

*13.1.26. Perfektní 1-faktorizace kubického grafu $G$ je taková trojice úplných párování $M_1$, $M_2$, $M_3$ grafu $G$, že párování jsou po dvou disjunktní a sjednocení kterýchkoliv dvou párování tvoří hamiltonovský cyklus grafu $G$. Ukažte, že hranol $C_n \square K_2$ nemá perfektní 1-faktorizaci pro žádné $n \geq 4$.*

## 13.2. Úlohy bez řešení

### Cvičení

*13.2.1.? Jak obarvit stěny hlavolamu Instant insanity tak, aby neexistovalo řešení a přitom všechny „očividné“ podmínky řešitelnosti (jako například počet stěn každé barvy) byly splněny?*

*13.2.2.? Ukažte, že když turnaj není acyklický, tak obsahuje více než jednu orientovanou hamiltonovskou cestu.*

**Édouard Lucas (1842 – 1891)**

Édouard Lucas se narodil v Amiens ve Francii. Vystudoval školu Ecole Normale. V Prusko–Francouzských válkách sloužil u dělostřelectva a po válce byl jmenován profesorem matematiky na Lycée Saint Louis v Paříži a později na Lycée Charlemagne, také v Paříži.

Obrázek 13.4.: *Édouard Lucas a Hanojské věže*[43].

Pracoval v oblasti teorie čísel. Vydal téměř dvě stovky prací, mezi nejznámější patří čtyřdílné *Récréations Mathématiques*, Gauthier–Villars, Paříž, 1882–94. Na jeho počest se posloupnost $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$ nazývá Lucasova posloupnost. První a druhý člen jsou $2, 1$ a počínaje třetím členem je každý další součtem předchozích dvou členů podobně jako u Fibonacciho posloupnosti.

Lucasovi je připisována známá úloha Hanojských věží, o které napsal jednu ze svých prací. Úloha hanojských věží je popsána v úloze 13.1.1. na straně 250.

# Rejstřík

Kurzívou jsou v rejstříku označeny stránky, kde najdete definici příslušného pojmu.


$\rho$-ohodnocení, *158*
1-faktor, 62, 141
1-faktorizace, 161
    perfektní, 161
2-faktor, 136, 142

acyklický
    digraf, *235*, 240
    graf, *81*
    turnaj, *241*
algoritmus
    dobrého vrcholového $(\Delta(G)+1)$-barvení, *165*
    hladový, 165
    nalezení hamiltonovské cesty v turnaji, 246
antiřetězec, 9
anuloid, 1, 209, 210
Argandův diagram, 28
artikulace, *113*, 125, 125, 167, 171, 221
asociativita, 27
asociovaný orientovaný graf, *238*
asymetrický graf, *107*
automat, 232
automorfismus, *107*
axiomy grupy, *27*
AZ-kvíz, 251

barevná třída, *149*, *163*
barevně $k$-kritický graf, *169*, 171
barva
    hrany, *148*
    volná, *150*
    vrcholu, *163*
barvení
    hranové, *148*
    oblastní, 185, 189
    Taitovo hranové, 194
    vrcholové, *163*
barycentrické souřadnice, *77*
    normované, *77*
Bellova čísla, 31, *32*, 35
Bellův trojúhelník, *33*, *34*
Bernoulliho lemniskáta, *198*
bezprostřední následovník, *9*
bicyklický graf, *87*
bigrafová posloupnost, *249*
bijekce, 102
biklika, *47*
binární

operace, 5, 14, 27, 201
operátor, 5, 12, 12
relace, 7, 8
bipartitní graf, *47*, 74, 87, 104, 134, 138, 165, 166, 171, 234, 248
blok, *120*, 121
designu, *57*
koncový, 125, 168, 188
blok grafu, *120*, 121, 167
blokový–artikulační graf, *122*, 125
bod projekce, *190*
Bridge-it, *90*

Cantorovo diskontinuum, 130
Catalanova čísla, 188, *199*
Catalan, E.Ch., *204*
Cayleyho grafy, 111
Cayleyho vzorec, *85*
Cayley A., *112*
celá čísla
interval, 3
celkový stupeň, *233*
centrum, *69*, 77
cesta, *46*, *64*, 166
$M$-alternující, *132*
$M$-rozšiřující, *132*
délka, 76
diametrická, *69*, 77
hamiltonovská, 227, 251
nejdelší, 170, 171
neorientovaná, 236
orientovaná, *235*
triviální, *46*, *64*
uzavřená, *64*
v grafu, 54
cesty
hranově disjunktní, *122*, 123
interně disjunktní, *122*, 123, 123
vrcholově disjunktní, *122*, 125
cirkulant, *74*
Color Madness, 197
cyklomatické číslo, *88*, 99
cyklus, *46*, 64, 87, 89, 153, 164, 164
hamiltonovský, 161, 194, *218*
lichý, 65, 87, 153
neorientovaný, 236
orientovaný, *235*
v grafu, 54, 252
cykly
prostor, *99*

částečné uspořádání, 9, 28
čísla

Bellova, 31, *32*, 35
Catalanova, 188, *199*
číslo
cyklomatické, *88*, 99
Erdősovo, *128*
klikové, *165*
komplexní, 28
průsečíkové, *206*
přirozené, 2
číslo nezávislosti
hranové, 139, 139, *152*, 153, 155, 160
vrcholové, 139, 139, 139, *152*, 153, 155, 160, 160
člen, 3

definiční obor, 13, *13*
dělitelnost, *8*
délka
cesty, *64*, 76
sledu, *64*
tahu, *64*
deorientace digrafu, *237*
design, *57*, 156
De Morganova pravidla, 5
diagram, 28, *44*
Argandův, 28
Bellových čísel, *31*, 33
Eulerův, *29*
Ferrersův, *30*, 32
hasseovský, *9*, 28, *76*
Vennův, 4, *29*, 43
diagram Bellových čísel, *31*
diametr, *69*
diametrická cesta, *69*, 77
digraf, 28, 111, *232*
acyklický, *235*, 240
deorientace, *237*
eulerovský, *247*
izomorfismus, 233
jednoduchý, *232*, 248
jednostranně souvislý, *237*
nesouvislý, *237*
opačný, *240*
posloupnost stupňů, *234*, 248
silně souvislý, *237*
slabě souvislý, *237*
split, 234, 248, *248*
symetrizace, *238*
vyvážený, *233*
Diracova věta, *220*
Dirac G.A., 220
Dirichletův princip, *16*
disjunkce, 14, 20

disjunktní sjednocení grafů, *72*
diskrétní graf, *61*
dolní celá část, *27*
dominace, *144*, 162
domino, *15*
dominující množina, *144*, 162
doplněk grafu, *47*, 61
doplněk množiny, 4
dosažitelnost, *66*
dosažitelný vrchol, 67, *236*
drak, *76*
Druhá Petersenova věta, *141*
duální graf, *185*
důkaz
    indukcí, *24*
    nepřímý, *23*
    přímý, *22*
    sporem, *23*
důkazové techniky, 20
dvanáctero způsobů počítání, 37
Dvojtorus, 212

ekvivalence, *11*, 21, 102, 236
    třída, *11*, *102*
Erdősovo číslo, *128*
Erdős P., 22, 128, *128*
Erdősův graf, *128*
eulerovský
    digraf, *247*
    graf, *214*
        orientovaný, *247*
    multigraf, 215
    otevřený tah, *214*
    tah, 142, *214*
        orientovaný, *247*
Eulerův diagram, *29*
Eulerův vzorec, *181*, 206
Euler L., 44, 181, 214, *229*
excentricita
    grafu, *69*
    vrcholu, *68*
exteriér křivky, *178*

faktor, *53*, 61, 85, 141, 142
faktorizace, 155, 161, 197
Ferrersův diagram, *30*, 32
funkce, 3

Gardner M., 197, *213*
Gaussova rovina, 28
Goldner–Hararyův graf, *224*
graciózní graf, *157*

graciózní ohodnocení, *157*
graf, 28, *44*, 102
acyklický, *81*
asymetrický, *107*
barevně $k$-kritický, *169*, 171
bicyklický, *87*
bipartitní, *47*, 74, 87, 104, 134, 138, 165, 166, 171, 234, 248
blok, *120*, 121
blokový–artikulační, *122*, 125
čtyřstěnu, 60
disjunktní sjednocení, *72*
diskrétní, *61*
doplněk, *47*, 61
drak, 76
duální, 185
dvacetistěnu, 60
dvanáctistěnu, 60
Erdősův, *128*
eulerovský, *214*
excentricita, *69*
faktor, 85
Goldner–Hararyův, *224*
graciózní, *157*
Grötzschův, 166, 186
hamiltonovský, 77, 212, *218*
hamiltonovsky souvislý, *225*
Heawoodův, 59
Herschelův, *224*
Hoffman-Singletonův, 59, *59*, 60, 76
holandský mlýn, *75*
holení, 83, 83
hranol, *72*
hranově $k$-chromatický, *150*
hranově $k$-obarvitelný, *150*
hranově tranzitivní, *108*
hustý, *48*, 55, 223
hvězda, *47*
hypohamiltonovský, *225*
implementace, 55
izomorfní, *102*
jednoduchý, *44*, 45, 46, 238
kartézská mocnina, *73*
kartézský součin, *72*, 73
$k$-kritický, *169*, 171
Kneserův, *75*, 76
kompletní, *46*, 60, 108, 154, 164
kompletní bipartitní, *47*, 60, 108, 164
kompletní multipartitní, *171*
kompozice, 73, 73, *73*
kopie, *72*
kostra, *85*, 99
kubický, *49*, 62, 127, 133, 136, 141, 143, 194, 212, 252

lichý, 160, 160
mlýn, *75*
mocnina, *227*
motýlek, *76*
multipartitní, *171*, 180
náhodný, *174*
nakreslení, 44, 181
nekonečný, 144
nesouvislý, *66*, 214
obecný, *45*
oblast, 181
obvod, 183
ohodnocený, 56
orientace, *238*, 239
orientovaný, 28, *45*, 232, *232*
osmistěnu, 60
pánev, *75*
periferie, *71*
Petersenův, 60, 62, *75*, 76, 108, 109, 111, 141, 146, 153, 166, 194, 207, 222, 225, 225
planární, 154, *176*
pokrytí, *137*
pravidelný, *49*, 142, 152, 167, 170
prázdný, *62*
pulec, *75*
regulární, *49*
    silně, *60*
rod, 209, *210*
rovinný, *176*
rozdělení, 125, *180*
rozklad, *57*, 127, 155, 208
řád, *44*
řídký, 69
samocentrický, *71*
semi-symetrický, *109*
se smyčkami, *45*
silně orientovatelný, *239*
síť, *72*
sjednocení, *72*
součet, *72*
souvislý, *66*, 67, 125, 125, 171, 212, 221
spojení, *72*
strnulý, *107*, 109
subdivize, *180*
sudý, 125, 198, 215, 217, 248
šestistěnu, 60
tahů věže, 60
tloušťka, 187, *208*
tripartitní, 225
triviální, *46*, 47, 156
unicyklický, 86, 119
uzávěr, *222*
velikost, *44*

vlajka, *76*
vnějškově planární, *187*, 189, 189, 189, 189, 190
vnějškově rovinný, *187*
vnoření, 209, *210*
vrcholově $k$-chromatický, *164*
vrcholově $k$-obarvitelný, *164*
vrcholově tranzitivní, *108*
žebřík, *72*
grafová posloupnost, *50*
grafy
neizomorfní, 110
Grötzschův graf, 166, 186
grupa, *27*
permutací, 108, 108
triviální, 108
grupa automorfismů, *107*
grupoid, *27*
grupy
axiomy, *27*

had, 64
Hallova věta, *135*, 138
hamiltonovská
cesta, *218*, 227, 251
cesta orientovaná, *242*
hamiltonovský
cyklus, 161, 194, *218*
cyklus orientovaný, *242*
graf, 212, *218*
orientovaný cyklus, 243
hamiltonovsky souvislý graf, *225*
Hamilton W.R., *230*
Handshaking problem, 1, 52
hasseovský diagram, *9*, 28, *76*
Heawoodův graf, 59
Herschelův graf, *224*
HEX, *90*
holandský mlýn, *75*
holení grafu, 83, 83
homeomorf, 125
homeomorfní obraz, 125
homogenní souřadnice, *78*
horní celá část, *27*
hra
AZ-kvíz, 98, 251
Bridge-it, *90*, *144*
cykly v síti, *143*
čtverce na šachovnici, *143*, 144
HEX, *90*, 92, 98, *144*
podvodní šprouti, 184
šprouti, *91*, *183*, 184
hrana, *44*

kontrakce, *196*
obarvení, *148*
odchozí, *233*
opačná, *232*
orientovaná, *232*
pokrytá, *137*
příchozí, *233*
rozdělení, *180*
sudá, *184*
hranol, *72*
hranová $k$-souvislost, *116*
hranová souvislost, *116*
hranové $k$-barvení, *148*
hranové barvení, *148*
dobré, *148*
hranové číslo nezávislosti, 139, 139, *152*, 153, 155, 160
hranově disjunktní cesty, *122*, 123
hranové pokrytí, *152*, 153, 160
hranově tranzitivní graf, *108*
hranový prostor, *99*
hranový řez, *114*, 119
hrany
nezávislé, *45*, 149
závislé, *45*, 148, 150
hry a párování, 143
hry na grafech, 90, 183
hustý graf, *48*, 223
hvězda, *47*, 84, 86, 127, 161
hypergraf, *46*, 57
hyperkrychle, *73*, 108, 108, 153, 166
hypohamiltonovský graf, *225*
hypotéza, *22*
Taitova, *194*
Vizingova, 154, *162*

chordála, 188, *188*
chromatické číslo, *164*, 189
chromatický index, *150*, 212
chromatický polynom, 173, *173*
Chvátal V., 221
chybná indukce, *126*

imperátor
digrafu, *245*
turnaje, *245*
implementace grafů, 55
implikace, 14, 21
incidence, *44*, *45*, 233
incidenční zobrazení, *45*
index
Wienerův, 79, *79*
indexová množina, 10

indukce, 24
    chybá, *126*
indukční krok, 24
indukovaný podgraf, *53*
interiér křivky, *178*
interně disjunktní cesty, *122*, 123, 123
interní vrcholy, *64*
interval celých čísel, 3
inverzní prvek, 27
izolovaný vrchol, *49*
izomorfismus, 76, 87, *102*, 155, 185
    digrafů, 233
    stromů, 110
izomorfní grafy, *102*

jedním tahem, *214*, *214*
jednoduchý
    digraf, *232*, 248
    orientovaný graf, 111, *232*
jednoduchý graf, 45, 238
jednoduchý orientovaný graf, 238
jednostranně souvislý digraf, *237*
jordanovská křivka, *177*

kartézská mocnina, *73*
    grafů, *73*
    množiny, *6*
kartézský součin, *72*, 73
    množin, *6*
Kempeho řetězec, *195*
$k$-faktor, *142*
Kőnig D., 138, *146*, 153
Kirchhoff G., 85
Kirchhoffova věta, *95*, 96
Kirchhoffovy zákony, 100
Kirkman T., *63*
Kirkmanův problém patnácti školaček, 58
$k$-kritický graf, *169*, 171
klika, 46, 165
    v grafu, 54
klikové číslo, *165*
Kneserův graf, *75*, 76
kolo, *74*, 133, 154
kombinace
    bez opakování, *17*
    s opakováním, *17*
kombinatorické pravidlo součinu, *15*, 199, 201
kombinatorické pravidlo součtu, *14*
kompletní bipartitní graf, *47*, 108, 164
kompletní graf, *46*, 108, 154, 164
kompletní multipartitní graf, *171*
komplexní čísla, 28

komplexní číslo
argument, 28
komplexní jednotka, 29
komponenta, *66*, 114
lichá, *139*
kompozice grafu, 73, 73, *73*
koncový blok, 125, 168, 188
koncový bod, 176
koncový vrchol, *44*, *64*, *232*
konformní zobrazení, *190*
Königova věta, *138*
Königovo lemma, *146*
konjuknce, 20
konjunkce, 14
kontrakce hrany, *196*
kopie grafu, *72*
kořenový strom, *85*, 202
pěstovaný, *202*
kostra, *85*, 95, 96, 99
Kotzig A., 162
král
digrafu, *244*
turnaje, *244*, 245, 246, 246, 246, 246, 246, 246
kreslit jedním tahem, *214*, *214*
kružnice, *46*
křivka, *175*
exteriér, 29, *178*
interiér, 29, *178*
jordanovská, *177*
křížení hran, 175
$k$-souvislost
hranová, *116*
vrcholová, *115*
kubický graf, *49*, 62, 127, 133, 136, 141, 143, 194, 212, 252
Kuratowski K., *204*
kvantifikátor, 21

Laplaceova matice, *92*
normovaná, *92*
lemma
Königovo, *146*
Spernerovo, 91, 92, *97*
ušaté, *124*
lemniskáta, 177, 198, *198*
les, *81*, 99
lichá komponenta, *139*
lineární uspořádání, 9
list, *81*, 83
lízátko, *74*, 75, 164
logická exploze, 24, 42, *42*
logické spojky, 20
logika, 42

Loydova patnáctka, *2*

magma, *27*
matematická indukce, 33
matice
    incidenční, *55*
    Laplaceova, 92
        normovaná, 92
    sousednosti, *55*, 57
maximální
    párování, *131*
    prvek, *10*
Mengerova houba, 130
Mengerovy věty, *123*
Menger K., *129*
metrický prostor, 67
metrika, 67, 67, *67*, 70
minimální
    pokrytí, *137*
    prvek, *10*
minimaxová podmínka, *139*
minor, 96, 146, *196*
mlýn, *75*
mnohostěn, 251
množina, *2*, 29
    barev, 148, 163
    dominující, *144*, 162
    doplněk, 4
    indexová, 10
    kartézská mocnina, *6*
    mohutnost, 3
    multimnožina, 3
    nezávislých hran, *45*
    nezávislých vrcholů, *45*
    obrazů, *13*
    operace, 4, 5
    otevřená, *178*
    podmnožina, 3
    potenční, *6*, 76
    prázdná, 2
    rozklad, *10*, *58*
    vzorů, *13*
množiny
    kartézský součin, *6*
    operace, 14
    průnik, 5
    rozdíl, 5
    sjednocení, 5
    symetrická diference, 5
    systém, 6
Möbius A., 78, *79*
Möbiův list, 210, 210

Möbiův žebřík, 74, 80
mocnina grafu, *227*
mohutnost množiny, 3
mooreovské grafy, *58*
most, 62, 89, *114*, 119, 119, 119, 120, 125, 126, 127, 212
motýlek, *76*
multigraf, *45*, 215
    sudý, 215
multimnožina, 3, 17, 37
multipartitní graf, *171*, 180
Mycielskián, 171

nadgraf, *54*, 155
náhodný graf, *174*
nakreslení grafu, 44, 181
následovník, *7*, 13
navázání sledů, 65
negace, 21
neizomorfní grafy, *102*, 110
nejdelší cesta, *76*, 170, 171
nejmenší
    pokrytí, *137*
    prvek, *10*
největší
    párování, *131*, *132*
    prvek, *10*
nekonečná
    cesta, *147*
nekonečný
    graf, 144
neorientovaná
    cesta, *236*
neorientovaný cyklus, 236
neporovnatelné prvky, 9
nepřímý důkaz, *23*
nesouvislý digraf, *237*
nesouvislý graf, *66*, 214
netriviální
    strom, *81*
neuspořádaná množina, 9
neutrální prvek, 27
nezávislá množina
    maximální, 45
    největší, 45
    vrcholů, *45*
nezávislé
    hrany, *45*, 149
    vrcholy, *45*, 233
nezávislost, 233
NP-úplnost, 77
nulární operace, 14
null graph, *62*

nutná a postačující podmínka, 68, 82, 87, 104, 132, 134, 139, 215, 218, 222, 223, 240, 248
nutná podmínka, *22*, 103, 156, 156, 221, 222, 222

oblast, 29
  grafu, *181*
  roviny, *178*
oblastní barvení, 185, 189
oblouk, 175
obměna, *23*
obor
  definiční, *13*
  hodnot, *13*
obraz, 13, *13*
obsahovat, 54
obvod grafu, 59, *59*, 183, 184
odebrání
  hran, 53
  vrcholu, 53
odchozí
  hrana, *233*
  stupeň, *233*
ohnisko, 199
ohodnocení
  $\rho$, *158*
  graciózní, *157*
ohodnocený graf, 56
okolí bodu, 177
okolí množiny, *134*
  ryzí, *134*
okolí vrcholu, *50*, 134
opačná hrana, *232*
opačný digraf, *240*
operace
  binární, 5, 14, 27, 201
  na množině, 4, 5, 14
  nulární, 14
  s grafy, *72*
  unární, 14
operátor, 12, 12
  binární, 5
Oreho věta, *219*, 226
Ore O., 220
orientace
  grafu, *238*, 239, 241
  vyvážená, *233*
orientovaná
  cesta, *235*
  hamiltonovská cesta, *242*
  hrana, *232*
  smyčka, *232*
  vzdálenost, *237*
orientovaný

cyklus, *235*, 243
eulerovský graf, *247*
graf, 232, *232*
asociovaný, *238*
jednoduchý, 111, *232*, 238
hamiltonovský cyklus, *242*
sled, *235*
tah, *235*
otevřená množina, *178*
otevřený eulerovský tah, *214*

pánev, *75*
párování, 131, *131*, 137, 138, 144, 148, 149, 161
maximální, *131*
největší, *131*, *132*
perfektní, *132*
úplné, *132*, 135, 139, 152
partita, *47*, 87
patnáctka, *2*
perfektní
1-faktorizace, 161, 161
párování, *132*
periferie grafu, *71*
pěstovaný kořenový strom, *202*
Petersen J., *62*
Petersenův graf, 62, *75*, 76, 108, 109, 111, 141, 146, 153, 166, 194, 207, 222, 225, 225
planární graf, 154, *176*
platónská tělesa, 71, 191, 225
počáteční vrchol, *64*, *232*
počet komponent, 66
podgraf, *53*, 69, 104, 125, 155
digrafu, 233
indukovaný, *53*
nevlastní, *53*
vlastní, *53*
podmínka
minimaxová, *139*
nutná, *22*, 103, 156, 156, 221, 222, 222
nutná a postačující, 68, 82, 87, 104, 132, 134, 139, 215, 218, 222, 223, 240, 248
postačující, *22*, 86, 142, 157, 219, 223
podmnožina, 3
vlastní, 3, 221, 225
podsled, *65*
podtah, *65*
pokrytí, 138
grafu, *137*
hranové, *152*, 153, 160
minimální, *137*
nejmenší, *137*
vrcholové, 139, 152, 153, 160
polocesta, *236*, 237
poloměr, *69*

polynom
chromatický, *173*
Pósa L., 220
poset, 10
posloupnost, *3*
bigrafová, *249*
digrafová, *234*, 248
prázdná, 3
Pósova věta, *220*
postačující podmínka, *22*, 86, 142, 157, 219, 223
potenční množina, *6*, 47, 76
povykos, 85
pracka, 75, 75, 76
pravdivostní hodnota, 20
pravidelný graf, *49*, 142, 152
prázdná
množina, 2
posloupnost, 3
suma, 4
prázdný graf, *62*
princip
Dirichletův, *16*
inkluze a exkluze, 17, *18*, 33, 38
nezávislých výběrů, *15*
sudosti, *49*, 194
problém
čtyř barev, *194*
nejdelší cesty, *76*
přiřazovací, 134
sedmi mostů města Královce, *228*
propojením, 126
prostor
cyklů, 88, 99, *99*
hranový, *99*
vektorový, 99
protínání křivek, 177
průměr grafu, 59, *69*, 77, 144
průměrný stupeň, *49*
průnik množin, 5
průsečík křivek, 177
průsečíkové číslo, *206*
prvek, 2, 3
inverzní, 27
maximální, *10*
minimální, *10*
nejmenší, *10*
největší, *10*
neutrální, 27
První Petersenova věta, *142*
předchůdce, *7*
předpoklad, *22*
příchozí

hrana, *233*
stupeň, *233*
přímý důkaz, *22*
přirozená čísla, 2
přiřazovací problém, 134
pseudograf, *45*
sudý, 215
pulec, *75*

rádius, *69*
realce, 233
regulární graf, *49*
relace, 102
antisymetrická, 8
asymetrická, 8
binární, 7, 8
částečné uspořádání, 9
dělitelnosti, *8*
dosažitelnosti, *67*
ekvivalence, *11*, 236
ireflexivní, 8
lineární, 8
mezi množinami, 7
na množině, 7
neporovnatelné prvky, 9
reflexivní, 8
symetrická, 8
tranzitivní, 8
úplná, 8
relační symbol, *7*, 12
restrikce, 13, 103
rod
grafu, 209, *210*
plochy, 209, 212
rovina, 175
oblast, *178*
rovinný graf, *176*
rozdělení grafu, 125, 146, *180*, 190, 196
rozdělení hrany, *180*
rozdíl množin, 5
rozklad
čísla, 30, 36
grafu, *57*, 127, *155*, 161, 208
množiny, *10*, 14, 35, 58, 68, 149, 163, 170
třída, 32
rozvrh, 148

řád grafu, 44
řetězec, 9
Kempeho, *195*
řez, 113
hranový, *114*, 119

vrcholový, *113*, 119
řídký graf, 69

samocentrický graf, *71*
saturované vrcholy, *131*
semi-symetrický graf, *109*
separující množina
hran, *119*
vrcholů, *119*
separující množina vrcholů, *123*
sféra, 190, 209
Schläfliův symbol, 192, 192, 192
silně orientovatelný graf, *239*
silně regulární graf, *60*
silně souvislý digraf, *237*
síť, *72*
sociální, 128
sjednocení grafů, *72*
sjednocení množin, 5
skladovací problém, 163
skóre
grafu, *50*, 244
vrcholu, *244*
slabě souvislý digraf, *237*
sled, *64*
navázání, 65
orientovaný, *235*
triviální, *64*
uzavřený, *64*
složitost, 109, 110
smyčka, *45*, 232
orientovaná, *232*
smyčky, 234
snark, 146, 196, 212, *212*
sociální síť, 128
součet, 3
grafů, *72*
součin, 4, 4
grafů, *72*, 73
sousední vrcholy, *45*
sousednost, 233
souvislost, *66*, 113
hranová, *116*
silná, 243
vrcholová, *115*
souvislý graf, *66*, 67, 125, 125, 171, 212, 221
spárované vrcholy, *131*
Spernerovo lemma, *97*
split, 248, *248*
digrafu, 234
spojení, *72*
spor, 23, 23, 42, 43, 50

steinerovské trojice, 57, *57*, 63, 156
stereografická projekce, 190, 191
Stirlingovo číslo, 34
    druhého druhu, 33, *35*, 38, 40, 40, 41
    prvního druhu, *34*
strategie, 92, 92, 143, 144
strnulý graf, *107*, 109
strom, *81*, 119, 166, 182
    kořenový, *85*, 202
        pěstovaný, *202*
    netriviální, *81*
    triviální, *81*
stupeň
    celkový, *233*
    nejmenší, *49*
    největší, *49*
    odchozí, *233*
    příchozí, *233*
    vnější, *233*
    vnitřní, *233*
    vrcholu, *49*, 165, 233
stupňová posloupnost, *50*, 166
subdivize, *180*
sudá hrana, *184*
sudý graf, 125, 198, *215*, 217, 248
sudý multigraf, *215*
sudý pseudograf, *215*
suma, 3
    prázdná, 4
sumační znaménko, *3*
supergraf, *54*
symbol
    relace, 12
    Schläfliův, 192, 192, 192
symetrická diference, 5, 132
symetrická grupa, 108, 108
symetrizace digrafu, *238*, 247
systém množin, 6
systém reprezentantů, *136*

šachovnice, 143
šachy, 88
šíp, *232*
šířka lemniskáty, 198
šprouti, 91, *183*, 184
    podvodní, 92, *184*

tah, *64*, 214
    eulerovský, 142, *214*
        orientovaný, *247*
    orientovaný, *235*
    otevřený eulerovský, *214*

uzavřený, *64*
Taitova hypotéza, *194*
Taitovo barvení, 212
Taitovo hranové barvení, 194, 197
tištěný spoj, 175
tloušťka grafu, 187, *208*
topologie, 176, 177
torus, 1, 209, 210
tranzitivní turnaj, *241*
triangulace, 97, 177, 199
tripartitní graf, 180, 225
triviální
automorfismus, *107*, 109
graf, *46*, 47, 81, 156
strom, *81*
triviální grupa, 108
trojúhelník
Bellův, 33, 34
trojúhelníková nerovnost, 70
třída
barevná, 149, 163
ekvivalence, *11*, *102*
rozkladu, 11, 32
třída 1, 152, *152*, 153, 154, 154, 156
třída 2, *152*, 153, 153, 212
turnaj, *241*
acyklický, *241*
tranzitivní, 241
Tutteova věta, *140*
Tutteův fragment, 145, 195
Tutte W., *145*
tvrzení, *22*

ucho, *124*, 125
unární operace, 14
unicyklický graf, 86, 119
univerzum, 4

úplně neuspořádaná množina, 9
úplné párování, *132*, 135, 139, 152

uspořádání
abecední, 9
antiřetězec, 9
částečné, 9, 28
lexikografické, 9, 12
lineární, 9
řetězec, 9
ušaté lemma, *124*
uzávěr grafu, *222*
uzavřená
cesta, *64*

jordanovská křivka, *177*
uzavřený
sled, *64*
tah, *64*

variace
bez opakování, *16*
s opakováním, *16*
vektorový prostor, 99
velikost grafu, 44
Venn J., *43*
Vennův diagram, 4, *29*, 43
věta
Brooksova, *167*
Cayleyho vzorec, *85*, 95
Diracova, 220
Eulerův vzorec, *181*
Grötzschova, 186
Hallova, *135*, 138
Havla–Hakimiho, *51*, 234
Kirchhoffova, *95*, 96
Königova, *138*
Kuratowského, 180
Mengerova, *123*
Oreho, *219*, 226
o čtyřech barvách, 173, 186, *186*, 197, 198
o jordanovských křivkách, 178
o snarcích, 196
Petersenova druhá, *141*
Petersenova první, *142*
Pósova, 220
princip sudosti, 49
Tutteova, *140*
Vizingova, *150*, 212
Vizingova hypotéza, 154, *162*
Vizing V., *162*
vlajka, *76*
vlastní číslo, 92
vlastní podmnožina, 3, 221, 225
vnějšek křivky, *178*
vnější stupeň, *233*
vnějškově planární graf, *187*, 189, 189, 189, 189, 190
vnějškově rovinný graf, *187*
vnitřek křivky, *178*
vnitřní stupeň, *233*
vnitřní vrcholy, *64*
vnoření grafu, 209, *210*, 211
volná barva, *150*
vrchol, *44*
$M$-nesaturovaný, *132*
$M$-saturovaný, *132*
dosažitelný, *66*, 67, *236*

interní, *64*
izolovaný, *49*
koncový, *44*, *64*, *232*
obarvení, *163*
počáteční, *64*, *232*
stupeň, 233
vnitřní, *64*
výchozí, *232*
vrcholová $k$-souvislost, *115*
vrcholová souvislost, *115*
vrcholové $k$-barvení, *163*
vrcholové barvení, *163*
dobré, *163*
optimální, *165*
vrcholové číslo nezávislosti, 139, 139, 139, *152*, 153, 155, 160, 160
vrcholově disjunktní cesty, *122*
vrcholové pokrytí, 139, 152, 153, 160
vrcholově tranzitivní graf, *108*, 109
vrcholový řez, *113*, 119
vrcholy
nesousední, *45*, 61
saturované, *131*
sousední, *45*
spárované, *131*
vzájemně dosažitelné, 236
závislé, *45*
výběr, *14*
bez opakování, *14*
neuspořádaný, *14*
s opakováním, *14*
uspořádaný, *14*
výhonky, 91
výchozí bod, 176
výchozí vrchol, *232*
výrok, *20*
výstřednost, 68
vyvážená orientace, *233*
vyvážený digraf, *233*
vzájemně dosažitelné vrcholy, *236*
vzdálenost, 60, 60, *67*
orientovaná, *237*
vzor, 13, *13*

Wienerův index, 79, *79*

základ indukce, 24
závislé
hrany, *45*, 148, 150
vrcholy, *45*
zobrazení, 175, 177, 190
incidenční, *45*
injektivní, 37

konformní, *190*
množiny, *13*
na, 37
obraz, *13*
prosté, 37
surjektivní, 37
vzor, *13*
z množiny, *13*

žebřík, *72*
Möbiův, 74, 80

## Otázka copyrightů

Při sestavování textu jsem se snažil důsledně dodržovat autorská práva. Téměř všechny obrázky grafů jsem připravil sám v METAFONTU nebo v METAPOSTU. Oba programy jsou volně šiřitelné součásti distribuce operačního systému Linux.

Všechny fotografie, které jsem stáhnul z internetu (většinou z Wikipedie), buď mají na Wikipedii výslovně uvedeno, že jsou jejich autory volně dány k dispozici nebo se jedná o reprodukce děl staších než 70 let. Novější fotografie budov, plaket a míst je možno použít ve smyslu § 33 odst. 1 autorského zákona, který říká „*Do práva autorského nezasahuje ten, kdo kresbou, malbou nebo grafikou, fotografií nebo filmem nebo jinak zaznamená nebo vyjádří dílo, které je trvale umístěno na náměstí, ulici, v parku, na veřejných cestách nebo na jiném veřejném prostranství; do autorského práva nezasahuje ani ten, kdo takto vyjádřené, zachycené nebo zaznamenané dílo dále užije. Je-li to možné, je nutno uvést jméno autora, nejde-li o dílo anonymní, nebo jméno osoby, pod jejímž jménem se dílo uvádí na veřejnost, a dále název díla a umístění.*“

Následuje seznam fotografií a obrázků i s uvedením zdrojů, ze kterých jsem čerpal.

- J. Petersen (mladší), str. 62; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Petersen.html
- J. Petersen (starší), str. 62; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Petersen.html
- L. Euler (portrét od E. Handmanna), str. 229; http://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
- L. Euler (portrét od G. Bruckera), str. 229; http://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
- L. Euler (bankovka), str. 229; http://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
- E. Lucas, str. 253; http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/lucas.html
- hlavolam hanojské věže, str. 253; http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/lucas.html
- K. Kuratowski, str. 204; http://en.wikipedia.org/wiki/Kazimierz_Kuratowski
- kavárna Szkocka, str. 204; http://en.wikipedia.org/wiki/Scottish_Cafe
- Francis. Guthrie, str. 194; http://en.wikipedia.org/wiki/Francis_Guthrie
- Frederic. Guthrie, str. 194; http://physicsworld.com/cws/article/indepth/907
- A. De Morgan, str. 194; http://www.cs.us.es/cursos/li-2003/li-g-2-3/indice.html
- dopis Hamiltonovi, str. 194; http://www-math.cudenver.edu/~wcherowi/courses/m4010/s05/grant4color.doc
- A. Cayley, str. 112; http://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Cayley
- P. G. Tait, str. 194; http://en.wikipedia.org/wiki/Peter_Guthrie_Tait
- T. P. Kirkman, str. 63; http://www.ams.org/featurecolumn/archive/finitegeometries.html
- A. F. Möbius, str. 79; http://en.wikipedia.org/wiki/August_Ferdinand_Mobius
- Möbiuv list, str. 79; http://en.wikipedia.org/wiki/August_Ferdinand_Mobius
- osika „Pando“, str. 81; http://en.wikipedia.org/wiki/Largest_organism
- G. R. Kirchhoff, str. 100; http://cs.wikipedia.org/wiki/Gustav_Kirchhoff
- tištěný spoj, str. 113; https://cz.pinterest.com/pin/69524387967524776/
- Eisenhoverův systém dálnic, str. 113; https://en.wikipedia.org/wiki/File:Map_of_current_Interstates.svg
- sociální síť, str. 121; https://www.flickr.com/photos/pacificrisa/10877135363/sizes/l/
- Erdősovi spoluautori, str. 121; http://www.orgnet.com/Erdos.html
- D. Kőnig, str. 146; http://en.wikipedia.org/wiki/Denes_Konig
- babylonská tabulka, str. 28; http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/ybc.html (foto Bill Casselman)
- J. Venn, str. 43; http://en.wikipedia.org/wiki/File:Venn_John_signature.jpg
- vitráž, Cambridge univ., str. 43; http://en.wikipedia.org/wiki/File:Venn-stainedglass-gonville-caius.jpg
- P. Erdős, str. 129; http://en.wikipedia.org/wiki/File:Erdos_budapest_fall_1992.jpg
- E.Ch. Catalan, str. 204; http://en.wikipedia.org/wiki/File:Eugene_charles_catalan.jpg
- mapa Königsbergu z roku 1613, str. 214; http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Koenigsberg,_Map_by_Bering_1613.jpg
- mapa Königsbergu z roku 1652, str. 228; http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Image-Koenigsberg,_Map_by_Merian-Erben_1652.jpg
- Symbol pro recyklaci, str. 80; http://en.wikipedia.org/wiki/File:Recycle001.svg
- Hamiltonova hra, str. 217; http://puzzlemuseum.com/month/picm02/200207icosian.htm, způsob použití je v souladu s podmínkami na stránce http://puzzlemuseum.com/faqs/status&obj.htm
- W. R. Hamilton, str. 230; http://fermatslasttheorem.blogspot.com/2008/10/sir-william-rowan-hamilton.html

- Broom bridge v Dublinu, str. 231; http://en.wikipedia.org/wiki/File:Broombridge3.jpg
- plaketa na mostě, str. 231; http://en.wikipedia.org/wiki/File:Quaternion_Plague_on_Broom_Bridge.jpg
- graf pro určení Erdősova čísla z konce 70. let, str. 128; https://blogs.harvard.edu/michaellaw/2013/11/29/the-economics-profession-why-are-there-star-economists/
- část Erdősova grafu zachycující jeho spoluautory, str. 128; http://www.orgnet.com/Erdos.html
- Rubensova ilustrace stereografické projekce, str. 191; http://en.wikipedia.org/wiki/File:RubensAguilonStereographic.jpg
- Mercatorova mapa světa 1587, str. 191; http://en.wikipedia.org/wiki/File:Usgs_map_stereographic.PNG
- Diagram z Euklidových Základů, str. 44; http://commons.wikimedia.org/wiki/File:P._Oxy._I_29.jpg
- Optimální řešení problému obchodního cestujícího pro 13 509 měst, str. 218; http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spring11/cos126/checklist/tsp.html
- Karl Menger, str. 130; https://math.duke.edu/karl-menger-award
- Menger Sponge, str. 130; https://en.wikipedia.org/wiki/File:Menger_sponge_(Level_0-3).jpg
- Martin Gardner, str. 213; https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Martin_Gardner
- Kraje České republiky, str. 185; https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Územní_kraje.png
- Řada kostek domina, str. 25; https://en.wikipedia.org/wiki/File:Dominoeffect.png
- Willam Tutte, str. 145; https://observerxtra.com/2014/05/23/breaking-the-code-of-silence/
- Měsíční krátery, str. 191; https://en.wikipedia.org/wiki/File:LRO_WAC_North_Pole_Mosaic_(PIA14024).jpg
- obraz kružnic procházejících bodem stereografické projekce, str. 191; https://math.stackexchange.com/quest projection-theorem-that-circles-on-the-sphere-get-mapped-to-circl
- Loydova patnáctka, str. 2; https://en.wikipedia.org/wiki/15_puzzle#/media/File:Sam_Loyd_-_The_1415_Puzzle_in_Puzz

# Literatura


[F] D. Fronček, Úvod do teorie grafů, Slezská univerzita Opava, (1999), ISBN 80-7248-044-8.

[G] J.A. Gallian, Contemporary Abstract Algebra, Houghton Mifflin Company, Bostano MA (2002), ISBN 0-618-122141.

[HKS] J. Herman, R. Kučera, J. Šimša, metody řešení matematických úloh I a II, Masarykova univerzita Brno, (1996 a 2004), ISBN 80-210-1202-1 a ISBN 80-210-3528-5.

[A] P. Kovář, Algebra, učební text VŠB-TUO, (2022), on line http://homel.vsb.cz/ kov16/files/skriptum_algeb

[LR] C.C. Lindner, C.A. Rodger, Design Theory, CRC Press, Boca Raton FL, (1997), ISBN 0-8493-3986-3.

[MN] J. Matoušek, J. Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum Praha, (2000), ISBN 80-246-0084-6.

[R] K.H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications – 6th ed., McGraw-Hill, New York NY, (2007), ISBN-10 0-07-288008-2.

[T] A. Tucker, Applied Combinatorics – 3rd ed., John Wiley & Sons, (1995), ISBN-10 0-471-59504-7.

[S] I. Stewart, Jak rozkrájet dort, Dokořán, (2009), ISBN-987-80-7362-187-1.

[W] D.B. West, Introduction to graph theory – 2nd ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River NJ, (2001), ISBN 0-13-014400-2.

# Přehled použitých symbolů

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A(G)$ | matice sousednosti grafu $G$ (str. 55) | $\Delta^-(G)$ | největší příchozí stupeň v $G$ (str. 234) |
| $\mathrm{Aut}(G)$ | grupa automorfismů grafu $G$ (str. 107) | $t(G)$ | tloušťka grafu $G$ (str. 208) |
| $B(G)$ | incidenční matice grafu $G$ (str. 55) | $\iota$ | triviální automorfismus grafu (str. 107) |
| $\mathrm{Blok}(G)$ | blokový–artikulační graf $G$ (str. 122) | $\kappa(G)$ | vrcholová souvislost grafu $G$ (str. 115) |
| $c(G)$ | klikové číslo grafu $G$ (str. 165) | $\kappa'(G)$ | hranová souvislost grafu $G$ (str. 116) |
| $C(G)$ | uzávěr grafu $G$ (str. 222) | $\nu(G)$ | průsečíkové číslo grafu $G$ (str. 206) |
| $D(G)$ | orientace grafu $G$ (str. 238) | $\mu(G)$ | cyklomatické číslo grafu $G$ (str. 88) |
| $\deg(v)$ | stupeň vrcholu $v$ v grafu (str. 49) | $\tau(G)$ | počet koster grafu $G$ (str. 95) |
| $\mathrm{diam}(G)$ | průměr grafu $G$ (str. 69) | $\chi(G)$ | chromatické číslo grafu $G$ (str. 164) |
| $\mathrm{dist}(u,v)$ | vzdálenost vrcholů $u$ a $v$ v grafu (str. 67) | $\chi'(G)$ | chromatický index grafu $G$ (str. 150) |
| $\mathrm{ecc}(v)$ | excentricita vrcholu $v$ v grafu (str. 68) | $\omega(G)$ | počet komponent grafu $G$ (str. 66) |
| $\mathrm{ext}\, J$ | exteriér křivky $J$ (str. 178) | $O(n)$ | horní odhad složitosti algoritmu (str. 110) |
| $E(G)$ | množina hran grafu $G$ (str. 44) | $G^n$ | $n$-tá mocnina grafu $G$ (str. 227) |
| $\overline{G}$, $\overline{A}$ | doplněk grafu $G$ (str. 47) nebo doplněk množiny $A$ (str. 4) | $G \simeq H$ | izomorfní grafy $G$ a $H$ (str. 102) |
| | | $G \square H$ | kartézský součin grafů $G$ a $H$ (str. 72) |
| $G^\star$ | duální graf grafu $G$ (str. 185) | $G[H]$ | kompozice grafů $G$ a $H$ (str. 73) |
| $h(G)$ | počet hran grafu $G$ (str. 49) | $G \cup H$ | sjednocení grafů $G$ a $H$ (str. 72) |
| $\mathrm{int}\, J$ | interiér křivky $J$ (str. 178) | $G + H$ | součet grafů $G$ a $H$ (str. 72) (disjunktní sjednocení) |
| $k(n)$ | počet stromů s $n$ vrcholy (str. 85) | | |
| $M^*$ | největší párování grafu (str. 132) | $kG$ | disjunktní kopie grafu $G$ (str. 72) |
| $N_G(v)$ | okolí vrcholu $v$ v grafu $G$ (str. 50) | $G \vee H$ | spojení grafů $G$ a $H$ (str. 72) |
| $N_G(S)$ | okolí množiny $S$ vrcholů v $G$ (str. 134) | $G + v$ | graf $G$ s přidaným vrcholem $v$ (str. 72) |
| $o(G)$ | počet oblastí grafu $G$ (str. 181) | $G - v$ | graf $G$ bez odebraného vrcholu $v$ (str. 49) |
| $Q^*$ | nejmenší vrcholové pokrytí grafu (str. 137) | $G + uv$ | graf $G$ s přidanou hranou $uv$ (str. 125) |
| $\mathrm{rad}(G)$ | poloměr grafu $G$ (str. 69) | $G - uv$ | graf $G$ bez odebrané hrany $uv$ (str. 53) |
| $\mathrm{sym}(D)$ | symetrizace digrafu $D$ (str. 238) | | |
| $U(D)$ | deorientace digrafu $D$ (str. 237) | $\prod_{i=1}^n a_i$ | součin prvků posloupnosti $(a_i)_{i=1}^n$ (str. 4) |
| $V(G)$ | množina vrcholů grafu $G$ (str. 44) | $\sum_{i=1}^n a_i$ | součet prvků posloupnosti $(a_i)_{i=1}^n$ (str. 3) |
| $v(G)$ | počet vrcholů grafu $G$ (str. 49) | $\emptyset$ | prázdná množina (str. 2) |
| $\alpha(G)$ | vrcholové číslo nezávislosti grafu $G$ (str. 152) | $2^X$ | potenční množina množiny $X$ (str. 6) |
| | | $x \in A$ | prvek $x$ množiny $A$ (str. 2) |
| $\alpha'(G)$ | hranové číslo nezávislosti grafu $G$ (str. 152) | $A \subseteq B$ | podmnožina $A$ množiny $B$ (str. 3) |
| | | $A \subset B$ | vlastní podmnožina $A$ množiny $B$ (str. 3) |
| $\beta(G)$ | počet vrcholů nejmenšího vrcholového pokrytí grafu $G$ (str. 152) | $A \cap B$ | průnik množin $A$ a $B$ (str. 5) |
| | | $A \cup B$ | sjednocení množin $A$ a $B$ (str. 5) |
| $\beta'(G)$ | počet hran nejmenšího hranového pokrytí grafu $G$ (str. 152) | $A \setminus B$ | rozdíl množin $A$ a $B$ (str. 5) |
| | | $A \triangle B$ | symetrická diference množin $A$ a $B$ (str. 5) |
| $\gamma(G)$ | dominace grafu $G$ (str. 144) | $A \times B$ | kartézský součin množin $A$ a $B$ (str. 6) |
| $\gamma(G)$ | rod grafu $G$ (str. 210) | $\preceq$ | relace částečného uspořádání (str. 9) |
| $\delta(G)$ | nejmenší stupeň v grafu $G$ (str. 49) | $\simeq$ | relace ekvivalence (str. 11) |
| $\delta^+(G)$ | nejmenší odchozí stupeň v $G$ (str. 234) | $A \wedge B$ | logická konjunkce („$A$ a současně $B$“) |
| $\delta^-(G)$ | nejmenší příchozí stupeň v $G$ (str. 234) | $A \vee B$ | logická disjunkce („$A$ nebo $B$“) |
| $\Delta(G)$ | největší stupeň v grafu $G$ (str. 49) | $A \Rightarrow B$ | implikace („jestliže platí $A$, tak platí $B$“) |
| $\Delta^+(G)$ | největší odchozí stupeň v $G$ (str. 234) | $A \Leftrightarrow B$ | ekvivalence („$A$ platí právě, když $B$“) |

### Třídy grafů

| | |
|---|---|
| $C_n$ | cyklus s $n$ vrcholy (str. 46) |
| $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ | cirkulant s $n$ vrcholy (str. 74) |
| $D_n$ | diskrétní graf s $n$ vrcholy (str. 61) |

| | |
|---|---|
| $D_n^m$ | holandský mlýn s $m(n-1)+1$ vrcholy (str. 75) |
| $P_n$ | cesta s $n$ vrcholy (str. 46) |
| $K_n$ | kompletní graf s $n$ vrcholy (str. 46) |
| $K_{m,n}$ | kompletní bipartitní graf s $m+n$ vrcholy (str. 47) |
| $L_{m,n}$ | lízátko s $m+n$ vrcholy (str. 74) |
| $Q_n$ | hyperkrychle řádu $n$ (str. 73) |
| $T_{m,n}$ | pulec s $m+n$ vrcholy (str. 75) |
| $W_{n+1}$ | kolo s $n+1$ vrcholy (str. 74) |
| $W_n^m$ | mlýn s $m(n-1)+1$ vrcholy (str. 75) |