15 Stromy

15.1. Může jakákoliv konečná posloupnost se stejným počtem nul a jedniček, která navíc začíná nulou a končí jedničkou, být kódem nějakého kořenového stromu? Své rozhodnutí zdůvodněte.

Ne každá posloupnost 0 a 1 začínající 0 a končící 1 je platným kódem kořenového stromu. Pokud by posloupnost například začínala trojicí 011, tak se nejedná o platný kód, neboť při sestavování kódu vždy spojujeme části, které začínají nulou a končí jedničkou. Zejména to znamená, že každé jedničce někde předchází odpovídající nula do páru a proto nemůže žádný začínající úsek kódu obsahovat více jedniček než nul. Taková posloupnost, která v nějakém úseku na začátku obsahuje více jedniček než nul, není platným kódem kořenového stromu.

15.2. Jsou následující posloupnosti minimálním kódem nějakého kořenového stromu?

(a) 00001100111001011100111,

(b) 110010000111011010011001,

(c) 000110011111011010011011,

(d) 000110010001010010011011.

Své rozhodnutí zdůvodněte.

(a) 00001100111001011100111 není minimálním kódem kořenového stromu, protože má délku 23, a tedy neobsahuje stejný počet nul a jedniček.

(b) 110010000111011010011011 není minimálním kódem kořenového stromu, protože začíná jedničkou.

(c) 000110011111011010011011 není minimálním kódem kořenového stromu, protože se liší počet nul a jedniček: obsahuje 14 jedniček a pouze 10 nul.

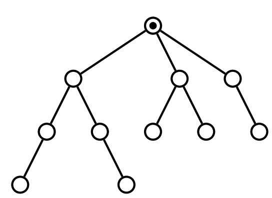
(d) 000110010001010010011011 není minimálním kódem kořenového stromu, protože se liší počet nul a jedniček: obsahuje 14 nul a pouze 10 jedniček.

15.3. Nakreslete kořenový strom s minimálním kódem

(a) 000011001110010110011 1,

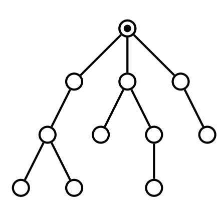
(b) 00001011100100111001 11.

(a) Odpovídající kořenový strom je na Obrázku 15.1.



Obrázek 15.1: *Strom T.*

(b) Odpovídající kořenový strom je na Obrázku 15.2.



Obrázek 15.2: *Strom T.*

15.4. Určete minimální kód

(a) kořenového stromu (T_1, r_1) na Obrázku 15.3 vlevo,

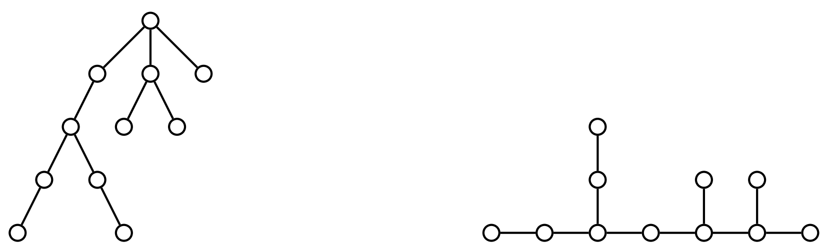
(b) kořenového stromu (T_2, r_2) na Obrázku 15.3 vpravo.

Obrázek 15.3: Stromy (T_1, r_1) a (T_2, r_2).

(a) Minimální kód kořenového stromu (T_1, r_1) je 0000011001111001011011.

(b) Minimální kód kořenového stromu (T_2, r_2) je 000001101101100001110111.

15.5. Určete minimální kódy stromů T a T' na Obrázku 15.4. Kořen zvolte v centru(!) a pak rozhodněte o jejich izomorfismu.



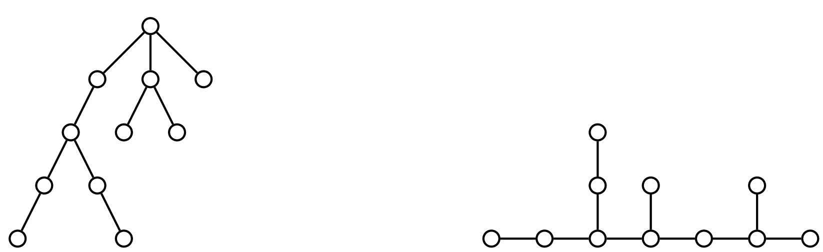
Obrázek 15.4: Stromy T a T'.

Nejprve najdeme centrum stromů T a T'. Zakreslíme kořenové stromy (T, c) a (T', c'), viz Obrázek 15.5.

Obrázek 15.5: *Kořenové stromy (T, c) a (T', c').*

Dále zjistíme jejich minimální kódy. Pro (T, c) dostáváme 0000101101100011001111 a pro (T', c') obdržíme 0000101101100011001111. Vidíme, že kódy jsou totožné, a proto jsou stromy T a T' izomorfní.

15.6. Určete minimální kódy stromů T a T' na Obrázku 15.6. Kořen zvolte v centru(!) a pak rozhodněte o jejich izomorfismu.



Obrázek 15.6: Stromy T a T'.

Nejprve najdeme centrum stromů T a T'. Zakreslíme kořenové stromy (T, c) a (T', c'), viz Obrázek 15.7.

Obrázek 15.7: *Kořenové stromy* (T', c').

Dále zjistíme jejich minimální kódy. Dostáváme pro T kód 000010110110001100111 1 a pro T' kód 0000101110001100111011. Vidíme, že kód stromu T' je odlišný od kódu stromu T, a proto stromy T a T' nejsou izomorfní.

15.7. Jaký je minimální kód kořenového stromu (T, r)*, jestliže*

(a) stromem T *je cesta* P_n *s kořenem* r *v jednom z koncových vrcholů?*

(b) stromem T *je cesta* P_{2n+1} *s kořenem* r *v centru?*

(c) stromem T *je cesta* P_{2n} *s kořenem* r *v centru?*

(d) stromem T *je graf* $K_{1,n}$ *s kořenem* r *v centru?*

(a) Minimální kód kořenového stromu (T, r), přičemž $T = P_n$ a kořen je v jednom z koncových vrcholů, je

$$\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{1\ldots1}_{n}$$

(b) Minimální kód kořenového stromu (T, r), přičemž $T = P_{2n+1}$ a kořen je v centru, je

$$0\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{1\ldots1}_{n}\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{1\ldots1}_{n}1$$

(c) Hledáme minimální kód kořenového stromu (T, r), přičemž $T = P_{2n}$ s kořenem v centru. Vzhledem k tomu, že centrem cesty P_{2n} je hrana, musíme přidat dodatečný vrchol doprostřed hrany, která je centrem. Vznikne tak cesta P_{2n+1}, jejíž minimální kód je stejný jako v předešlém případě.

$$0\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{1\ldots1}_{n}\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{1\ldots1}_{n}1$$

(d) Minimální kód kořenového stromu (T, r), přičemž $T = K_{1,n}$ s kořenem v centru, je

$$0\underbrace{01\ 01\ \ldots\ 01}_{n}1$$

15.8. Jaký je minimální kód úplného binárního stromu na 7 vrcholech? Existuje takové uspořádání potomků vrcholů tohoto kořenového stromu s kořenem v centru, aby kód nebyl minimální? Vysvětlete. (V úplném binárním stromu má každý nelistový vrchol právě dva potomky a všechny listy mají stejnou vzdálenost od kořene.)

Protože se jedná o úplný binární strom, každý nelistový vrchol má právě dva potomky a všechny listy mají stejnou vzdálenost od kořene, je kód stromu určený jednoznačně. Kód je 00010110010111.

Protože kódy potomků každého vrcholu sestavené při zjišťování kódu stromu jsou stejné (listy mají kód 01, jejich rodiče mají kód 001011 a kořen má kód 00010110010111), tak při libovolném uspořádání potomků dostaneme vždy stejný kód, který je současně minimálním kódem.