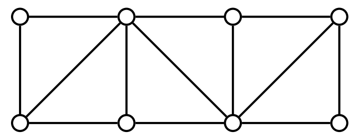
11 Podgrafy, isomorfismus grafů

11.1. Určete v grafu G na obrázku



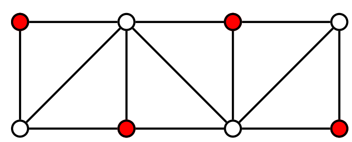
Obrázek 11.1: Graf G.

(a) největší nezávislou množinu vrcholů. Řekneme, že $X \subseteq V(G)$ je největší nezávislá množina, pokud obsahuje největší možný počet vrcholů grafu G takových, že mezi žádnými dvěma není hrana.

(b) podgraf nejdelší cesty a nejdelšího cyklu.

(c) nejdelší indukovanou cestu a nejdelší indukovaný cyklus. Řekneme, že indukovaný cyklus resp. cesta je indukovaný podgraf grafu G isomorfní s nějakým cyklem resp. cestou.

(a) Cyklus délky 8 obsahuje nejvýše 4 nezávislé vrcholy (viz Obrázek 11.2).



Obrázek 11.2: *Nezávislá množina grafu G.*

(b) Graf G obsahuje (nejdelší možnou) hamiltonovskou cestu a (nejdelší možný) hamiltonovský cyklus.

Obrázek 11.3: *Nejdelší cesta a cyklus v grafu G.*

(c) Do indukované cesty můžeme z každého trojúhelníku vybrat nejvýše jednu hranu. Nejdelší indukovaná cesta má délku 4 (viz Obrázek 11.4).

Každý cyklus v grafu délky alespoň 4 má chordálu (hrana mezi vrcholy cyklu, které nejsou v cyklu sousední), proto má nejdelší indukovaný cyklus délku 3.

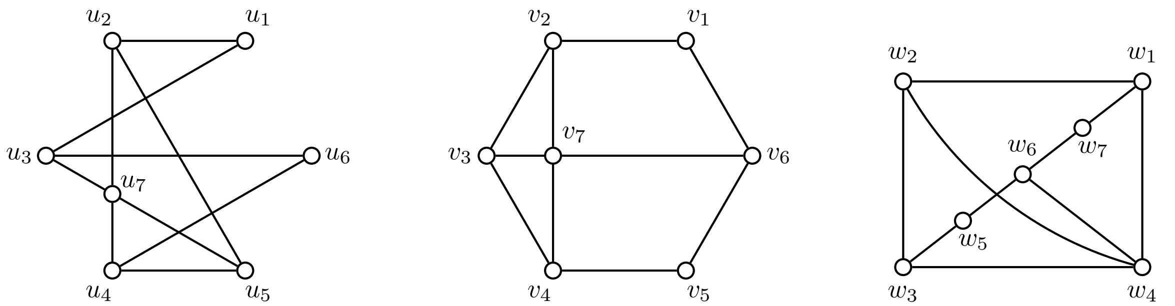
Obrázek 11.4: *Nejdelší indukovaná cesta a cyklus v grafu G.*

11.2. Máme dány grafy G, H a I na Obrázku 11.5.

(a) Jsou grafy G a H isomorfní? Pokud ano popište isomorfismus mezi nimi.

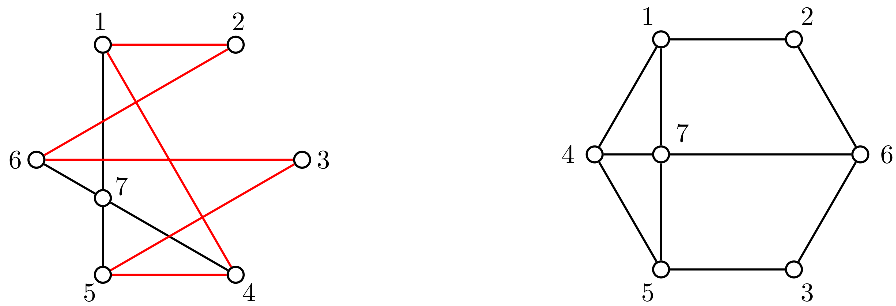
(b) Jsou grafy G a I isomorfní? Pokud ano popište isomorfismus mezi nimi.

(c) Jsou grafy H a I isomorfní? Pokud ano popište isomorfismus mezi nimi.



Obrázek 11.5: Grafy G, H a I.

(a) Při hledání isomorfismu se můžeme pokusit překreslit graf G tak, aby byl kopií grafu H. Využijeme toho, že v grafu G i v grafu H je vždy jediný vrchol stupně 4, které se v případném isomorfismu musí zobrazit na sebe navzájem. Očíslujeme vrcholy (viz Obrázek 11.6).



Obrázek 11.6: *Grafy G a H.*

Potom očíslujeme vrcholy grafu H tak, že kopie vrcholů v G a H mají stejná čísla (viz Obrázek 11.6) a popíšeme isomorfismus $f : V(G) \to V(H)$ tak, že $f(i) = i$ pro $i = 1, 2, \ldots, 7$.

Jiné řešení:

Grafy G a I jsou isomorfní, existují dva různé isomorfismy, jeden z nich je $f : V(G) \to V(H)$ daný předpisem

$$f(u_1) = v_1, \quad f(u_2) = v_2, \quad f(u_3) = v_6, \quad f(u_4) = v_4, \quad f(u_5) = v_3, \quad f(u_6) = v_5, \quad f(u_7) = v_7.$$

Druhý isomorfismus je

$$f(u_1) = v_5, \quad f(u_2) = v_4, \quad f(u_3) = v_6, \quad f(u_4) = v_2, \quad f(u_5) = v_3, \quad f(u_6) = v_1, \quad f(u_7) = v_7.$$

(b) Grafy G a I jsou isomorfní, existují dva různé isomorfismy, jeden z nich je $f : V(G) \to V(I)$ daný předpisem

$$f(u_1) = w_7, \quad f(u_2) = w_1, \quad f(u_3) = w_6, \quad f(u_4) = w_3, \quad f(u_5) = w_2, \quad f(u_6) = w_5, \quad f(u_7) = w_4.$$

Druhý isomorfismus je

$$f(u_1) = w_5, \quad f(u_2) = w_3, \quad f(u_3) = w_6, \quad f(u_4) = w_1, \quad f(u_5) = w_2, \quad f(u_6) = w_7, \quad f(u_7) = w_4.$$

(c) Grafy H a I jsou isomorfní, existují dva různé isomorfismy, jeden z nich je $f : V(H) \to V(I)$ daný předpisem

$$f(v_1) = w_7, \quad f(v_2) = w_1, \quad f(v_3) = w_2, \quad f(v_4) = w_3, \quad f(v_5) = w_5, \quad f(v_6) = w_6, \quad f(v_7) = w_4.$$

Druhý isomorfismus je

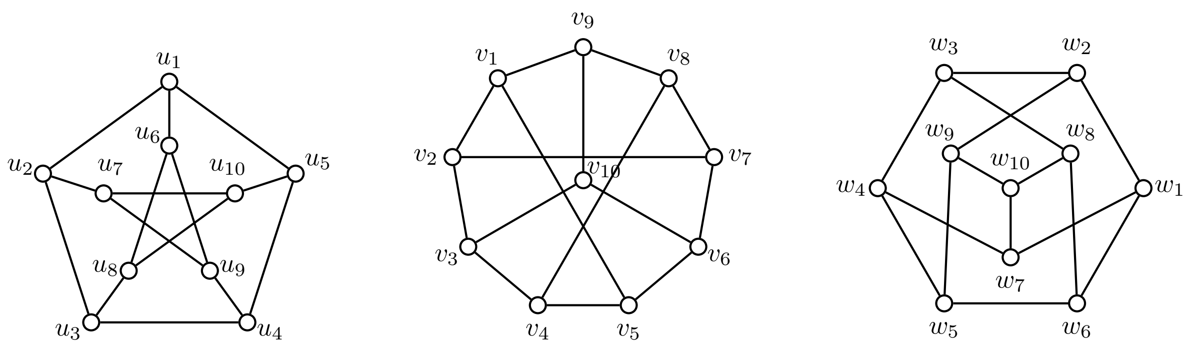
$$f(v_1) = w_5, \quad f(v_2) = w_3, \quad f(v_3) = w_2, \quad f(v_4) = w_1, \quad f(v_5) = w_7, \quad f(v_6) = w_6, \quad f(v_7) = w_4.$$

11.3. Máme dány grafy G, H a I na Obrázku 11.7.

(a) Jsou grafy G a H isomorfní? Pokud ano popište isomorfismus mezi nimi.

(b) Jsou grafy G a I isomorfní? Pokud ano popište isomorfismus mezi nimi.

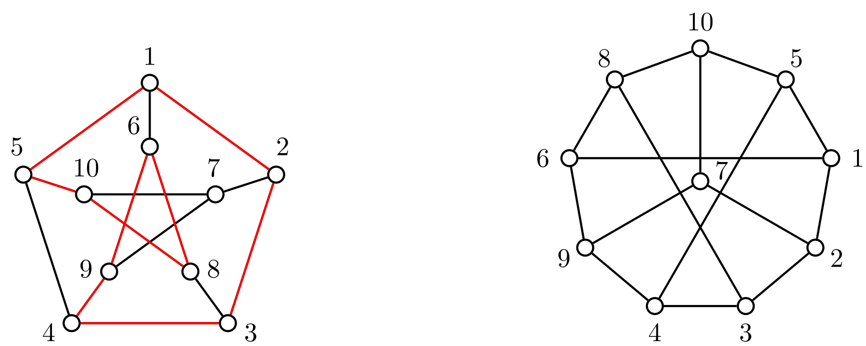
(c) Jsou grafy H a I isomorfní? Pokud ano popište isomorfismus mezi nimi.



Obrázek 11.7: Grafy G, H a I.

(a) Při hledání isomorfismu se můžeme pokusit překreslit graf G tak, aby byl kopií grafu H. Očíslujeme vrcholy (viz Obrázek 11.8).

Potom očíslujeme vrcholy grafu H tak, že kopie vrcholů v G a H mají stejná čísla (viz Obrázek 11.8) a stanovíme isomorfismus $f : V(G) \to V(H)$ tak, že $f(i) = i$ pro $i = 1, 2, \dots, 10$.



Obrázek 11.8: *Grafy G a H.*

Jiné řešení:

Grafy G a H jsou isomorfní. (Dokonce je možno dokázat, že existuje 120 různých isomorfismů.) Jeden z nich je $f : V(G) \to V(H)$ daný předpisem

$$f(u_1) = v_1, \quad f(u_2) = v_2, \quad f(u_3) = v_7, \quad f(u_4) = v_8, \quad f(u_5) = v_9,$$

$$f(u_6) = v_5, \quad f(u_7) = v_3, \quad f(u_8) = v_6, \quad f(u_9) = v_4, \quad f(u_{10}) = v_{10}.$$

(b) Grafy G a I jsou isomorfní. (Existuje 120 různých isomorfismů.) Jeden z nich je $f : V(G) \to V(I)$ daný předpisem

$$f(u_1) = w_3, \quad f(u_2) = w_4, \quad f(u_3) = w_7, \quad f(u_4) = w_1, \quad f(u_5) = w_2,$$

$$f(u_6) = w_8, \quad f(u_7) = w_5, \quad f(u_8) = w_{10}, \quad f(u_9) = w_6, \quad f(u_{10}) = w_9.$$

(c) Grafy H a I jsou isomorfní. (Existuje 120 různých isomorfismů.) Jeden z nich je $f : V(H) \to V(I)$ daný předpisem

$$f(v_1) = w_3, \quad f(v_2) = w_4, \quad f(v_3) = w_5, \quad f(v_4) = w_6, \quad f(v_5) = w_8,$$

$$f(v_6) = w_{10}, \quad f(v_7) = w_7, \quad f(v_8) = w_1, \quad f(v_9) = w_2, \quad f(v_{10}) = w_9.$$

11.4. Nalezněte alespoň dva neisomorfní grafy se stupňovou posloupností

(a) $(3,3,3,3,3,3)$

(b) $(3,3,2,2)$.

(c) $(4,4,3,3,3,3)$

(d) $(4,4,4,3,3)$

(e) $(2,2,2,2,2)$

(f) $(3,3,3,3,2,2)$

Je to ve všech uvedených případech možné? Vysvětlete!

(a) Dva neisomorfní grafy s uvedenou stupňovou posloupností existují. Grafy G a H na Obrázku 11.9 jsou neisomorfní, neboť H obsahuje trojúhelník a G ne.

Jiné řešení:

Grafy G a H nejsou isomorfní, protože doplňkem grafu G je $2C_3$, zatímco doplňkem H je graf C_6. A protože mají G a H různé (neisomorfní) doplňky, nejsou isomorfní.

Obrázek 11.9: *Grafy G a H.*

(b) Graf se stupňovou posloupností $(3,3,3,3)$ je kompletní graf K_4 (každý vrchol má tři sousedy). Podle Věty 1.1. je počet hran v tomto grafu $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$. V grafu se stupňovou posloupností $(3,3,2,2)$ je 5 hran. Proto graf se stupňovou posloupností $(3,3,2,2)$ vznikne z K_4 vynecháním jedné (libovolné) hrany. Takový graf je (až na isomorfismus) jediný. (To je pěkně vidět i protože doplněk grafu je jediný graf se stupňovou posloupností $(0,0,1,1)$, což je jedině K_2 spolu se dvěma izolovanými vrcholy.)

(c) Graf G se stupňovou posloupností $(4,4,3,3,3,3)$ obsahuje podle Věty 1.1 deset hran. Doplněk grafu G má stupňovou posloupnost $(2,2,2,2,1,1)$. Takových doplňků existuje několik, třeba P_6, $K_2 \cup C_4$ nebo $P_3 \cup C_3$. Proto i původních grafů existuje několik.

(d) Graf se stupňovou posloupností $(4,4,4,3,3)$ je kompletní graf K_5 bez jedné (libovolné) hrany. Takový graf je (až na isomorfismus) jediný. (To je pěkně vidět i protože doplněk grafu je jediný graf se stupňovou posloupností $(0,0,0,1,1)$, což je jedině K_2 spolu se třemi izolovanými vrcholy.)

(e) Protože každý vrchol má alespoň dva sousedy, můžeme při putování po nějaké cestě z libovolného vrcholu grafu vždy pokračovat do jiného vrcholu a nejpozději po pěti krocích uzavřít cyklus. Každý graf, jehož všechny vrcholy jsou stupně alespoň 2, proto obsahuje cyklus. Každý cyklus musí být délky alespoň 3 a protože máme jen pět vrcholů, máme v grafu cyklus nejvýše jeden. Daný graf je právě cyklus C_5.

(f) Pro nalezení neisomorfních grafů můžeme někdy použít konstrukci z důkazu věty Havla-Hakimiho. (Pozor, ne všechny neisomorfní grafy můžeme dostat konstrukcí z důkazu věty Havla-Hakimiho. Tentokrát se různé grafy podaří najít.) Nejprve zredukujeme danou stupňovou posloupnost:

$$(3,3,3,3,2,2) \sim (2,2,2,2,2) \sim (2,2,2,1,1) \sim (1,1,1,1).$$

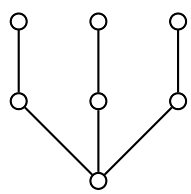
Při rekonstrukci grafu je až po posloupnost $(2, 2, 2, 2, 2)$ konstruování grafu jednoznačné (dostaneme cyklus C_5). V posledním kroku, kdy přidáváme vrchol stupně 3, můžeme vytvořit dva neisomorfní grafy (viz Obrázek 11.10).

Obrázek 11.10: *Neisomorfní grafy se stejnou stupňovou posloupností.*

Grafy nejsou isomorfní, protože v prvním grafu jsou vrcholy stupně 2 sousední zatímco v druhém grafu ne.

11.5. Nalezněte alespoň dva neisomorfní grafy se stupňovou posloupností $(5, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1)$*. Zdůvodněte, proč jsou neisomorfní.*

Opět se pokusíme použít pro konstrukci těchto dvou neisomorfních grafů větu Havla-Hakimiho. (Pozor, ne všechny neisomorfní grafy můžeme dostat konstrukcí z důkazu věty Havla-Hakimiho. Tentokrát se různé grafy podaří najít.) Zredukujme postupně posloupnost $(5, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1)$ na $(3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$, a pak na $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Přidáním vrcholu stupně 3 ke grafu se stupňovou posloupností $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ dostaneme například graf na Obrázku 11.11.



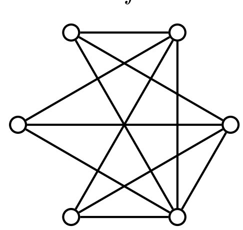
Obrázek 11.11: *Graf se stupňovou posloupností* $(3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$*.*

Dále při posledním kroku můžeme vytvořit dva neisomorfní grafy (viz Obrázek 11.11).

Obrázek 11.12: *Graf se stupňovou posloupností* $(5, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1)$*.*

Všimněme si, že G obsahuje např. dva sousední vrcholy stupně 2, ale H takové sousední vrcholy neobsahuje. Proto jsou uvedené dva grafy neisomorfní.

11.6. Máme dán graf G na Obrázku 11.13. Najděte graf se stejnou stupňovou posloupností, který s grafem G není isomorfní. Zdůvodněte proč grafy nejsou isomorfní.



Obrázek 11.13: Graf G.

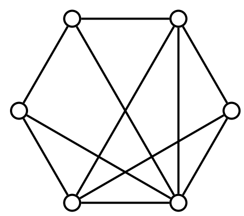
Doplněk grafu G má stupňovou posloupnost $(2, 2, 2, 1, 1, 0)$. Takovou posloupnost mají dva neisomorfní grafy, jednak $P_5 \cup K_1$, který je doplňkem G, a také $C_3 \cup P_2 \cup K_1$, který je doplňkem hledaného neisomorfního grafu H.

Jiné řešení:

Zadaný graf má stupňovou posloupnost $(5, 4, 4, 3, 3, 3)$. Užitím věty Havel-Hakimi posloupnost zredukujeme

$$(5, 4, 4, 3, 3, 3) \sim (3, 3, 2, 2, 2) \sim (2, 1, 1, 2) \sim (2, 2, 1, 1) \sim (1, 0, 1) \sim (1, 1, 0).$$

(Pozor, ne všechny neisomorfní grafy můžeme dostat konstrukcí z důkazu věty Havla-Hakimiho. Tentokrát se různé grafy podaří najít.) Zpětnou rekonstrukcí grafu podle redukovaných posloupností získáme graf H (viz Obrázek 11.14), který má stejnou stupňovou posloupnost, ale není se zadaným grafem isomorfní. Vrcholy stupně 4 jsou v H sousední, zatímco v zadaném grafu ne.



Obrázek 11.14: *Graf H.*

11.7. Nechť $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Nakreslete graf G jehož vrcholová množina jsou všechny dvouprvkové podmnožiny množiny A. Hranou jsou spojeny různé vrcholy (dvě různé dvouprvkové podmnožiny $X, Y \subseteq A$) jestliže

(a) Součet všech čtyř čísel v obou podmnožinách je lichý. Nalezněte nejdelší cestu v grafu G.

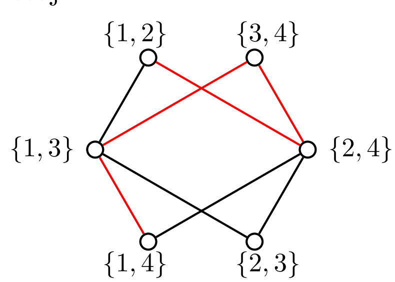
(b) Součet všech čtyř čísel v obou podmnožinách je sudý. Nalezněte nejdelší indukovanou cestu v G.

(c) Podmnožiny mají společný prvek (neprázdný průnik). Nalezněte nejdelší cyklus (kružnici) v G.

(d) Podmnožiny nemají společný prvek (jsou disjunktní). Určete $\delta(G)$, a $\Delta(G)$.

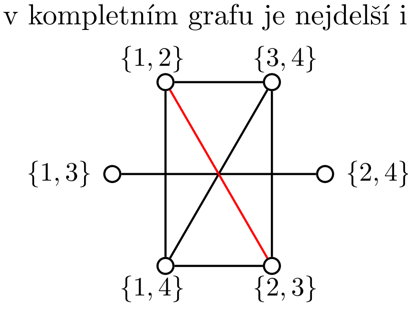
Množina A má $\binom{4}{2} = 6$ dvouprvkových podmnožin. Graf G má tedy ve všech případech šest vrcholů.

(a) Řešením je graf $K_{2,4}$. Nejdelší cesta, která je podgrafem $K_{2,4}$ je P_5 (Obrázek 11.15). Delší cesta než se 4 hranami v G neexistuje, neboť z každého vrcholu $\{1, 3\}$ a $\{2, 4\}$ mohou odcházet nejvýše dvě hrany a jiné hrany v grafu neexistují.



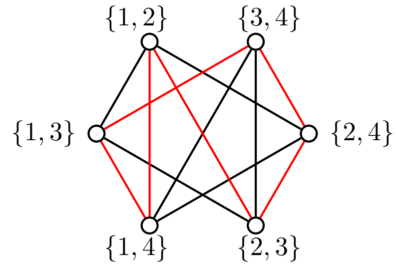
Obrázek 11.15: *Graf G s vyznačeným podgrafem P_5.*

(b) Řešením je $K_4 \cup P_2$. Nejdelší indukovanou cestou je P_2 (Obrázek 11.16). Graf sestává ze dvou komponent – kompletních grafů a v kompletním grafu je nejdelší indukovaná cesta délky 1.



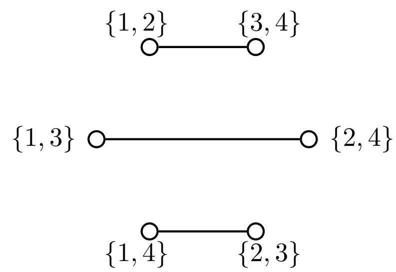
Obrázek 11.16: *Graf G s vyznačenou cestou P_2.*

(c) Řešením je K_6 bez úplného párování. Nejdelší cyklus je C_6 (Obrázek 11.17).



Obrázek 11.17: *Graf G s vyznačeným cyklem C_6.*

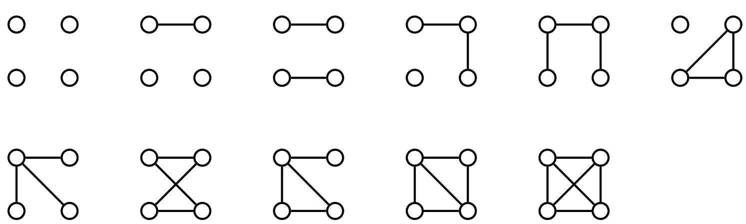
(d) Řešením je graf sestávající ze tří komponent K_2. Platí $\delta(G) = \Delta(G) = 1$ (Obrázek 11.18).



Obrázek 11.18: *Graf G.*

11.8. Kolik existuje neisomorfních grafů na 4 vrcholech?

Je jich 11 (Obrázek 11.19). Že žádné dva nejsou isomorfní je ihned vidět porovnáním počtu hran a stupňových posloupností.



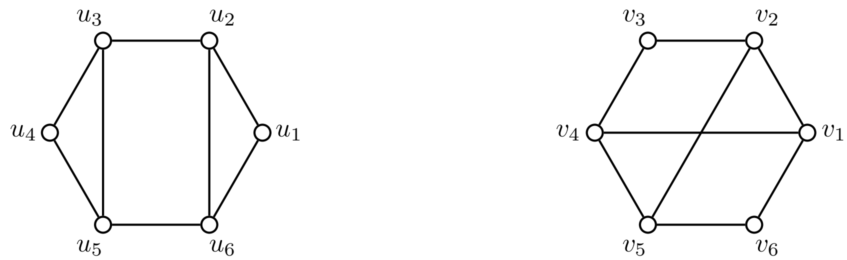
Obrázek 11.19: *Neisomorfní grafy na 4 vrcholech.*

11.9. Jsou grafy G a H zadané maticemi sousednosti isomorfní?

(a) $A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(H) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

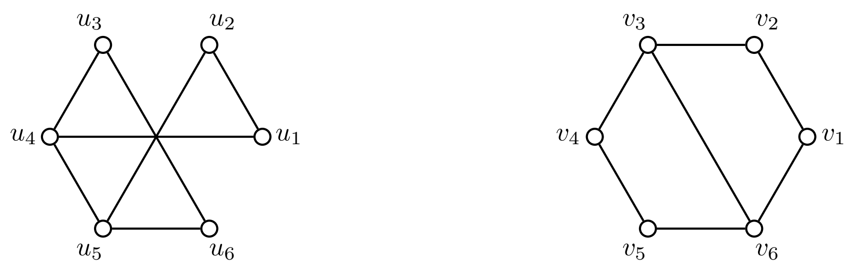
(b) $A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(H) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(a) Nakreslíme grafy G a H tak, že jejich vrcholy odpovídají po řadě sloupcům (a řádkům) matice sousednosti. Grafy G a H jsou na Obrázku 11.20. Isomorfní nejsou, protože například graf H neobsahuje podgraf C_3, zatímco graf G ano.



Obrázek 11.20: *Grafy G a H.*

(b) Nakreslíme grafy G a H tak, že jejich vrcholy odpovídají po řadě sloupcům (a řádkům) matice sousednosti. Grafy G a H jsou na Obrázku 11.21. Tyto grafy isomorfní jsou a jeden z možných isomorfismů je např. $f : V(G) \to V(H)$, kde $f(v_1) = u_1$, $f(v_2) = u_2$, $f(v_3) = u_5$, $f(v_4) = u_6$, $f(v_5) = u_3$, $f(v_6) = u_4$.



Obrázek 11.21: *Grafy G a H.*