6 Princip inkluze a exkluze, kombinatorické identity

6.1. Ptali jsme se lidí, jak otevírají běžné dveře s klikou. Zjistili jsme, že někteří je otevírají pravou, někteří levou rukou a někteří bez použití rukou. Dále jsme získali tyto bližší informace: 33 lidí otvírá pravou, 30 lidí levou, 12 lidí bez použití rukou, 16 pravou i levou, 4 pravou i bez použití rukou, 9 levou a bez použití rukou a 3 všemi třemi způsoby. Kolika lidí jsme se ptali?

Množinu všech dotazovaných lidí, kteří otvírají dveře pravou rukou resp. levou rukou resp. bez použití rukou označíme P resp. L resp. N.

Ze zadání víme, že $|P| = 33, |L| = 30, |N| = 12, |P \cap L| = 16, |P \cap N| = 4, |L \cap N| = 9, |P \cap L \cap N| = 3$. Počet dotazovaných lidí je $|P \cup L \cup N|$. Ale z principu inkluze a exkluze víme, že $|P \cup L \cup N| = |P| + |L| + |N| - |P \cap L| - |P \cap N| - |L \cap N| + |P \cap L \cap N| = 33 + 30 + 12 - 16 - 4 - 9 + 3 = 49$.

6.2. Byli jsme tři, kouřili před školou a trápili se představou, že kouření může přinášet vážné zdravotní komplikace. Tu přistoupil vysílený muž a rozdal nám 5 různých reklamních letáčků tak, aby měl každý z nás alespoň jeden. Kolika způsoby to mohl provést? Pokud někdo dostal více letáků, tak nerozlišujeme pořadí, ve kterém je dostal.

Libovolné přidělení pěti letáčků třem lidem si umíme představit, jako nějaké zobrazení pětiprvkové množiny do tříprvkové množiny. Takových zobrazení je 3^5. Některá z nich ovšem nepřidělí některému ze 3 lidí žádný letáček. Kolik je tedy takových zobrazení, které každému ze tří lidí přidělí alespoň jeden letáček? To zjistíme tak, že od počtu všech možných zobrazení odečteme počet „špatných“ zobrazení. „Špatná“ zobrazení jsou taková, která na alespoň jeden prvek tříprvkové množiny nezobrazí žádný prvek pětiprvkové množiny.

Označme L množinu všech reklamních letáčků a $K = \{1, 2, 3\}$ množinu všech nás kuřáků. Dále definujme množinu K_i, $i = 1, 2, 3$ tak, že je to množina všech zobrazení L do K, kde prvek $i \in K$ není obrazem žádného prvku z L. Není těžké si uvědomit, že počet „špatných“ zobrazení je dán číslem $|\bigcup_{j=1}^{3} K_j|$. My ale víme dle principu inkluze a exkluze, že $|\bigcup_{j=1}^{3} K_j| = |K_1| + |K_2| + |K_3| - |K_1 \cap K_2| - |K_1 \cap K_3| - |K_2 \cap K_3| + |K_1 \cap K_2 \cap K_3|$.

Chceme-li zjistit např $|K_1|$ resp. $|K_1 \cap K_3|$ resp. $|K_1 \cap K_2 \cap K_3|$ stačí si uvědomit, že to je počet všech zobrazení L do dvouprvkové (v K chybí 1) resp. jednoprvkové (v K chybí 2 a 3) resp. prázdné množiny (v K chybí všechny prvky). Tedy $|K_1| = |K_2| = |K_3| = 2^5$, $|K_1 \cap K_2| = |K_1 \cap K_3| = |K_2 \cap K_3| = 1^5$ a $|K_1 \cap K_2 \cap K_3| = 0^5 = 0$.

Proto s využitím principu inkluze a exkluze $|\bigcup_{j=1}^{3} K_j| = 3 \cdot 2^5 - 3 \cdot 1^5 + 1 \cdot 0 = 96 - 3 = 93$. Konečný výsledek tedy bude $3^5 - 93 = 243 - 93 = 150$.

Jiné řešení:

Zkusme ještě tento příklad vyřešit za použití obecnějšího pohledu, a tedy méně lopotně.

Výraz $|K_1| + |K_2| + |K_3| - |K_1 \cap K_2| - |K_1 \cap K_3| - |K_2 \cap K_3| + |K_1 \cap K_2 \cap K_3|$ můžeme vyjádřit úsporněji takto

$$\sum_{j=1}^{3} (-1)^{j-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,3\}}{j}} \left| \bigcap_{i \in I} K_i \right|.$$

Množina $\binom{\{1,2,\ldots,n\}}{j}$ je množina všech j-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Množina I má vždy j, $1 \leq j \leq 3$, prvků a my chceme určit $|\bigcap_{i \in I} K_i|$. To je ovšem počet všech zobrazení L do K takových, že na nějakých j prvků v K se nezobrazí nic. Takových zobrazení, pro pevně zvolených j prvků, ale je $(3-j)^5$. Dále oněch j prvků jsme schopni vybrat $\binom{3}{j}$ způsoby. Takže všech zobrazení L do K, která na nějakých j prvků nezobrazí nic, je $\binom{3}{j}(3-j)^5$. Z toho dostáváme $\sum_{I \in \binom{\{1,2,3\}}{j}} \left|\bigcap_{i \in I} K_i\right| = \sum_{j=1}^{3} \binom{3}{j}(3-j)^5$. A tedy

$$\sum_{j=1}^{3} (-1)^{j-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,3\}}{j}} |\bigcap_{i \in I} K_i| = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j-1} \binom{3}{j} (3-j)^5.$$

Všimněte si, že uvedený výraz má jen tři sčítance, na rozdíl od předchozího řešení. Víme tedy že zobrazení L do K, které nejsou surjekce, je $\sum_{j=1}^{4} (-1)^{j-1} \binom{3}{j} (3-j)^5$ a všech zobrazení L do K je 3^5. Proto surjekcí L na K je $3^5 - \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j-1} \binom{3}{j} (3-j)^5 = \sum_{j=0}^{3} (-1)^j \binom{3}{j} (3-j)^5 = 3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 1^5 - 1 \cdot 0 = 243 - 96 + 3 - 0 = 150$.

6.3. Kolik existuje surjekcí n-prvkové množiny na $(n-1)$-prvkovou množinu?

Vyjdeme ze vztahu pro princip inkluze a exkluze. Od počtu všech zobrazení $(n-1)^n$ odečteme počet těch, které vynechají některý prvek, přičteme počet všech zobrazení, které vynechají některé dva prvky, odečteme počet všech zobrazení, které vynechají některé tři prvky, ...

$$(n-1)^n - \binom{n-1}{1}(n-2)^n + \cdots + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}1^n$$

a dostaneme

$$\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i\binom{n-1}{i}(n-1-i)^n.$$

6.4. Kolik existuje surjekcí n-prvkové množiny na dvouprvkovou množinu?

Vyjdeme ze vztahu pro princip inkluze a exkluze.

$$\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\binom{2}{i}(2-i)^n$$

Dostaneme

$$\binom{2}{0}2^n - \binom{2}{1}1^n = 2^n - 2.$$

Jiné řešení:

Označme první množinu N, $|N| = n$ a druhou $M = \{x_1, x_2\}$. Celkově máme 2^n zobrazení množiny N do M. Z toho pouze dvě zobrazení nejsou surjekce, a to ta, která všechny prvky z N zobrazí pouze na x_1 resp. x_2. Proto je $2^n - 2$ všech surjekcí N na M.

6.5. Ukažte, že platí následující kombinatorické identity.

a) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$

Obě strany rovnosti vyjadřují počet všech podmnožin n-prvkové množiny. Zatímco na levé straně rovnosti sčítáme počty podmnožin všech možných velikostí, tak pravá strana udává všechny možnosti, kdy pro každý z n prvků vybíráme ze dvou možností: zda bude nebo nebude do podmnožiny zařazen. Takových výběrů je $V^*(2, n) = 2^n$. Protože obě strany vyjadřují počet všech podmnožin, tak se obě strany rovnají.

Jiné řešení:

Tvrzení plyne i z binomické věty. Pokud do binomické věty

$$(x+1)^n = \sum_{i=0^n}\binom{n}{i}x^i$$

dosadíme $x = 1$, dostaneme dokazovanou rovnost.

b) $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{2}$

Tvrzení ukážeme přímo. Nejprve si všimneme, že $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$. Opakovaným použitím rovnosti $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ dostaneme

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{2}.$$

c) $\sum_{i=1}^{n} i = \binom{n+1}{2}$

Tvrzení ukážeme přímo. Zatímco levá strana udává součet n prvních přirozených čísel $n(n+1)/2$, což je vztah odvozený v první kapitole, tak pravá strana je

$$\binom{n+1}{2} = (n+1)n/2.$$

Tvrzení platí.

d) $\binom{4}{0}\binom{3}{3}+\binom{4}{1}\binom{3}{2}+\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{4}{3}\binom{3}{0}=\binom{7}{3}$

Podáme kombinatorický důkaz. Zatímco pravá strana udává, kolika způsoby můžeme ze sedmiprvkové množiny M vybrat tři prvky, tak levá strana rovnosti poskytuje podrobnější pohled. Mějme například množinu $M=[1,7]$, tak rozebereme možnosti, kolik je vybráno sudých a kolik lichých čísel. Mezi prvními šesti přirozenými čísly jsou tři sudá a čtyři lichá čísla. Nemusíme vybrat žádné sudé číslo, pak ale vybereme tři lichá čísla. Takových výběrů je $\binom{4}{0}\binom{3}{3}$. Můžeme vybrat jedno sudé číslo, pak ale vybereme dvě lichá čísla. Takových výběrů je $\binom{4}{1}\binom{3}{2}$. Dále můžeme vybrat dvě sudá čísla, pak ale vybereme jedno liché číslo. Takových výběrů je $\binom{4}{2}\binom{3}{1}$. A konečně můžeme vybrat tři sudá čísla a žádné liché číslo. Takových výběrů je $\binom{4}{3}\binom{3}{0}$. Užitím kombinatorického pravidla součtu je celkový počet možností dán součtem počtu jednotlivých disjunktních možností, proto

$$\binom{4}{0}\binom{3}{3}+\binom{4}{1}\binom{3}{2}+\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{4}{3}\binom{3}{0}=\binom{7}{3}$$

Jiné řešení:

Můžeme obě strany vyčíslit. Zatímco levá strana je

$$\binom{4}{0}\binom{3}{3}+\binom{4}{1}\binom{3}{2}+\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{4}{3}\binom{3}{0}=1\cdot 1+4\cdot 3+6\cdot 3+4\cdot 1=35,$$

pravá strana je

$$\binom{7}{3}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2}=7\cdot 5=35.$$

Obě strany dávají stejnou hodnotu a jsou si rovny.

6.6. Zdůvodněte (kombinatoricky, bez výpočtu kombinačních čísel), že platí

$$\binom{2n}{3}=2\binom{n}{3}+2n\binom{n}{2}$$

Mějme množinu čísel $A=[1,2n]$. Vezmeme libovolné neuspořádané trojice z A. Trojic {sudé, sudé, sudé} je $\binom{n}{3}$, trojic {liché, liché, liché} také $\binom{n}{3}$. Trojic {sudé, sudé, liché} je $\binom{n}{2}\cdot\binom{n}{1}=n\binom{n}{2}$ a trojic {sudé, liché, liché} je stejný počet. Počet výběrů všech trojic bez rozlišování sudosti a lichosti můžeme jednoduše vyjádřit jako $\binom{2n}{3}$. Celkem dostáváme rovnost

$$2\binom{n}{3}+2n\binom{n}{2}=\binom{2n}{3}.$$