6 Domácí úkol – Kapitola 4

6.1. Zopakujme, binární relace na množině A (dále jen relace) $R \subseteq A^2$ je *reflexivní* právě tehdy, když $\forall x \in A : (x, x) \in R$, *symetrická* právě tehdy, když $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$ a *antisymetrická* právě tehdy, když $\forall x, y \in A : ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow (x = y)$.

(a) Nalezněte negaci výroku $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$. Připomeňme, že pro výroky A, B platí tato pravidla: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$, $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$, $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$, $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

(b) Je definice antisymetrické relace dána negací výroku $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$?

(c) Když řekneme o relaci, že není symetrická, je to totéž, jako když řekneme, že je antisymetrická?

6.2. Definujte sami nějakou relaci ekvivalence a částečného uspořádání na množině A, přičemž A je:

(a) množina všech lidí pracujících na nádraží Ostrava–Svinov,

(b) množina všech elektronických součástek používaných při výrobě computerů,

(c) množina všech nápisů na zdech restauračních záchodků,

(d) množina všech kvetoucích tulipánů v Nizozemí,

(e) množina všech velbloudů v ZOO Liberec,

(f) množina všech jízdních kol ukradených v České republice,

(g) množina všech českých politiků, kteří obětavě slouží svým občanům,

(h) množina všech symetrických reálných matic řádu 5,

Ekvivalenci značte " $\sim$ " a částečné uspořádání " $\preceq$ ", přičemž zápis $a \preceq b$ budeme číst a předchází nebo je rovno b. Dále, odpovědi pište ve tvaru "$a \sim b \Leftrightarrow \ldots$" nebo "$a \preceq b \Leftrightarrow \ldots$" a definujte relaci.

6.3. V 1. domácí úloze, cvičení (13), jsme definovali na množině přirozených čísel relaci "být kongruentní modulo m", kterou značíme $\equiv$. Je tato relace ekvivalencí nebo částečným uspořádáním? Své rozhodnutí pečlivě zdůvodněte!

6.4.* Nechť $X = \{0, 1\}$ a nechť $A = 2^{X^2}$. Definujme na relaci takto: $\forall a, b \in A : aRb \Leftrightarrow a \subseteq b$.

(a) Je relace R částečné uspořádání? Své rozhodnutí zdůvodněte!

(b) Pokud ano, nakreslete Hasseovský diagram.

(c) Pokud to je možné, nalezněte na A s relací R minimální, největší, maximální a největší prvek.

6.5. Může se stát, že částečné uspořádání na nějaké konečné množině nebude mít minimální resp. maximální prvek? Své rozhodnutí dokažte!

6.6. Definujme na množině komplexních čísel relaci "$\approx$" takto: $\forall u, v \in \mathbb{C} : u \approx v \Leftrightarrow |u| = |v|$. Dokažte, že je tato relace relací ekvivalence.

6.7. Mějme zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = |2x - 3| - |x + 2|$. Je to zobrazení injektivní? A je surjektivní? Svá rozhodnutí zdůvodněte!

6.8. Seřaďme prvky množiny $[1, 9]$ takto $6, 7, 5, 4, 2, 3, 1, 9, 8$. Toto je nějaká permutace množiny $[1, 9]$. Zapište ji *cyklicky*, tedy použijte cyklů permutace. Jaký je řád této permutace? (Řád permutace π je takové nejmenší nenulové přirozené číslo k, že $\pi^k = \underbrace{\pi \circ \pi \circ \ldots \circ \pi}_{k}$ je identita.)

6.9. Mějme permutace $\pi_1 = (157)(2436)$ a $\pi_2 = (13)(46)(257)$. Nalezněte permutace $\pi_1 \circ \pi_2$, $\pi_2 \circ \pi_1$ a $(\pi_2)^6$. Návod: Pro určení $(\pi_2)^6$ využijte, že platí $(\pi_2)^6 = (\pi_2)^4 \circ (\pi_2)^2 = (\pi_2)^2 \circ (\pi_2)^2 \circ (\pi_2)^2$.