6 Domácí úkol – příprava na písemku

6.1. Nechť A je množina všech přímek v rovině. Na množině A je definována relace R takto: $\forall p, q \in A$: $p\ R\ q \Leftrightarrow p \parallel q$. Určete vlastnosti relace R, pokud splývající přímky považujeme za rovnoběžné.

6.2. Nechť A je množina všech přímek v rovině. Na množině A je definována relace R takto: $\forall p, q \in A$: $p\ R\ q \Leftrightarrow p$ je kolmá ke q. Určete vlastnosti relace R.

6.3. Mějme množinu všech studentů v posluchárně. Každý student je v relaci R sám se sebou a dva studenti $x, y \in S$ (v tomto pořadí) jsou v relaci R, pokud y sedí ve stejné řadě nalevo od x (vnímáno z pozice přednášejícího). Dokažte, že relace R je částečné uspořádání a určete minimální a maximální prvky v množině A.

6.4. Mějme množinu A_i s relací dělitelnosti $|$. Rozhodněte, jestli se jedná o relaci částečného uspořádání, pokud:

(a) $A_1 = [0, 9]$

(b) $A_2 = \{-2, 2, 4, 6, 8, 10\}$

Relace dělitelnosti „b dělí a“ (značíme $b \mid a$) právě tehdy, když existuje c takové že, $b \cdot c = a$ kde $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ pro část (a), případně $a, b, c \in \mathbb{Z}$ pro část (b).

6.5. Nakreslete hasseovský diagram relace inkluze množiny $2^A \setminus \emptyset$, kde $A = \{1, 2, 3\}$. Určete největší, nejmenší minimální a maximální prvky této relace.

6.6. Je relace „býti příbuzný“, která je definována na množině všech žijících lidí, ekvivalence? (Předpokládáme, že každý člověk je příbuzný sám sobě.) Své rozhodnutí zdůvodněte!

6.7. Pro každé dva (nenulové) vektory $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ položíme $(x, y)\ R\ (a, b) \Leftrightarrow$ existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že $(x, y) = k(a, b)$. (Takové dva vektory nazýváme *kolineární*.) Dokažte, že R je ekvivalence.

6.8. Pro každé dva vektory $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ platí $(x, y, z)\ R\ (a, b, c) \Leftrightarrow xa + yb + zc = 0$. Jaké vlastnosti má relace R? Zdůvodněte.

6.9. Každá dvě komplexní čísla $a + bi, x + yi$ jsou v relaci R, pokud $a = x$ a $y = -b$. Která komplexní čísla jsou v relaci R sama se sebou? Jaké vlastnosti má relace R? Zdůvodněte. Jak říkáme dvojici komplexních čísel, která jsou v relaci R?

6.10. Každá dvě komplexní čísla $a + bi, x + yi$ jsou v relaci R, pokud $\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Je R částečným uspořádáním na množině komplexních čísel? Pokud ano, nalezněte minimální prvek.

6.11. Nechť $X = \{0, 1\}$ a nechť $A = 2^{X^2}$. Definujme na relaci takto: $\forall a, b \in A : a\ R\ b \Leftrightarrow a \subseteq b$.

(a) Je relace R částečné uspořádání? Své rozhodnutí zdůvodněte!

(b) Pokud ano, nakreslete hasseovský diagram.

(c) Pokud to je možné, nalezněte na A s relací R minimální, největší, maximální a největší prvek.

6.12. Mějme zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = |2x - 3| - |x + 2|$. Je to zobrazení injektivní? A je surjektivní? Svá rozhodnutí zdůvodněte!

6.13. Může se stát, že částečné uspořádání na nějaké konečné množině nebude mít minimální resp. maximální prvek? Své rozhodnutí dokažte!

6.14. Mějme permutace $\pi_1 = (157)(2436)$ a $\pi_2 = (13)(46)(257)$.

(a) Nalezněte permutace $\pi_1 \circ \pi_2$, $\pi_2 \circ \pi_1$ a $(\pi_2)^6$.

Návod: Pro určení $(\pi_2)^6$ využijte, že platí $(\pi_2)^6 = (\pi_2)^4 \circ (\pi_2)^2 = (\pi_2)^2 \circ (\pi_2)^2 \circ (\pi_2)^2$.

(b) Nalezněte permutace π_1^4 a π_1^6. Využijte cyklický zápis permutace.

(c) Nalezněte permutace π_1^{13} a π_1^{40}. Využijte řád permutace.

6.15. Seřaďme prvky množiny $[1, 9]$ takto $6, 7, 5, 4, 2, 3, 1, 9, 8$. Toto je nějaká permutace množiny $[1, 9]$. Zapište ji *cyklicky*, tedy použijte cyklů permutace. Jaký je řád této permutace? (Řád permutace π je takové nejmenší (nenulové) přirozené číslo k, že $\pi^k = \underbrace{\pi \circ \pi \circ \ldots \circ \pi}_{k}$ je identita.)

6.16. Ptali jsme se lidí, jak otevírají běžné dveře s klikou. Zjistili jsme, že někteří je otevírají pravou, někteří levou rukou a někteří bez použití rukou. Dále jsme získali tyto bližší informace: 33 lidí otvírá pravou, 30 lidí levou, 12 lidí bez použití rukou, 16 pravou i levou, 4 pravou i bez použití rukou, 9 levou a bez použití rukou a 3 všemi třemi způsoby. Kolika lidí jsme se ptali?

6.17. Byli jsme tři, kouřili před školou a trápili se představou, že kouření může přinášet vážné zdravotní komplikace. Tu přistoupil vysílený muž a rozdal nám 5 různých reklamních letáčků tak, aby měl každý z nás alespoň jeden. Kolika způsoby to mohl provést? Pokud někdo dostal více letáků, tak nerozlišujeme pořadí, ve kterém je dostal.

6.18. Kolik existuje surjekcí n-prvkové množiny na $(n-1)$-prvkovou množinu?

6.19. Kolik existuje surjekcí n-prvkové množiny na dvouprvkovou množinu?