5 Domácí úkol – Kapitola 3

5.1. Dokažte nepřímo následující tvrzení (Zobecněný Dirichletův princip). Jestliže $|\bigcup_{i=1}^{m} A_i| > m \cdot n$, pak existuje $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ takové, že $|A_i| > n$.

5.2. Připomeňme, dvě množiny X, Y se rovnají, pokud pro každý prvek x platí $x \in X \Leftrightarrow x \in Y$. Dokažte následující tvrzení. Jestliže $2^X = 2^Y$, pak $X = Y$.

5.3. Dokažte následující tvrzení. Jestliže $2^X \neq 2^Y$, pak $X \neq Y$.

5.4. Dokážete dvě tvrzení ze cvičení (2) a (3) této kapitoly zapsat jedinou větou?

5.5. Nechť n, r jsou přirozená čísla. Dokažte matematickou indukcí následující rovnost pro každé $n \geq r$.

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

5.6. Dokažte matematickou indukcí, že součet prvních $n, n \geq 1$, přirozených sudých čísel (Máme tedy na mysli součet $2 + 4 + \ldots + 2n$) je $2\binom{n+1}{2}$.

5.7. Je známo, že součet prvních n přirozených lichých čísel je n^2. Abychom tvrzení dokázali, stačí ukázat, že $1 + 3 + \ldots + (2n + 1) = n^2$. Ale již pro $n = 1$ vztah nefunguje, neboť člen $2n + 1$ na levé straně nabývá hodnoty 3, a tedy pro $n = 1$ je levá strana $1 + 3 = 4$ a pravá $n^2 = 1^2 = 1$. Nalezněte chybu v úvaze a opravte ji.

5.8. Dokažte matematickou indukcí, že platí $2^n > 2n + 1$ pro každé $n > 2$.

5.9. Pro která přirozená čísla n platí $2^n > n^2$? Své tvrzení dokažte. (Při dokazování matematickou indukcí využijte předešlého tvrzení ze cvičení (8).)

5.10. Dokažte, že každé přirozené číslo větší než 7, s výjimkou čísla 11, lze získat jako součet čtyřek a pětek, přičemž v součtu může býti použit libovolný počet sčítanců a nemusíme nutně použít obě čísla.

5.11.* Mějme $n, n \geq 2$, vzájemně různoběžných přímek a označme je $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Tyto přímky nám rozdělí rovinu obecně na m oblastí. Přidejme další přímku p_{n+1}, která je různoběžná s každou přímkou $p_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Přibude tímto v rovině dalších $n + 1$ oblastí? Pokud ne, co je třeba dodat, aby tomu tak bylo. Svá rozhodnutí vždy pečlivě zdůvodněte! (Splývající přímky považujeme za rovnoběžné.)

5.12. Vyjádřete vzorcem s proměnnou $n, n \geq 2$, bez použití sumy následující výrazy: $\sum_{i=2}^{n} i(i-1)$ a $\sum_{i=2}^{n} i^2$.

(Návod: Využijte skutečnosti, že (1) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ a vzorce (2) $\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ pro $r = 2$.)

5.13.* Vyjádřete jednoduchým vzorcem bez použití sumy výraz: $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\binom{n}{k}$ pro $n \geq m$.

(Návod: Zkusme zformulovat slovní úlohu takto: Máme n lidí z nichž vybereme k členný výbor a z tohoto k členného výboru jeho m členné předsednictvo. Kolik máme možností? Jak tato úloha souvisí s naším problémem? Nedala by se naše úloha nějak výhodně přeformulovat?)

5.14. Dokažte pomocí matematické indukce tvrzení: Mějme v rovině n, $n \geq 2$, přímek takových, že žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři nemají společný průsečík. Pak nám tyto přímky rozdělí rovinu na přesně $\binom{n+1}{2} + 1$ oblastí.

Návod: Využijte poznatky ze cvičení (11).

5.15. Dokažte pomocí matematické indukce *de Moivreovu větu* o umocňování komplexních jednotek v goniometrickém tvaru: $(\cos\alpha + i \sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$, kde i je tzv. imaginární jednotka, tedy $i^2 = -1$. Uvažujte $n \geq 1$.