5 Domácí úkol – příprava na písemku

5.1. Máme dánu množinu čísel $[1, 10]$. S využitím Dirichletova principu ukažte, že

(a) když vybereme kterýchkoliv šest z nich, tak mezi vybranými čísly bude alespoň jedna dvojice čísel, která dává součet 11,

(b) když vybereme kterýchkoliv sedm z nich, tak mezi vybranými čísly budou alespoň dvě dvojice čísel, které dává součet 11,

(c) když vybereme nějakých pět z nich, tak dvojice se součtem 11 mezi vybranými čísly nemusí existovat.

5.2. Nechť n, r jsou přirozená čísla. Dokažte matematickou indukcí následující rovnost pro každé $n \geq r$.

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

5.3. Dokažte matematickou indukcí, že součet prvních $n, n \geq 1$, přirozených sudých čísel (máme tedy na mysli součet $2 + 4 + \cdots + 2n$) je $2\binom{n+1}{2}$.

5.4. Je známo, že součet prvních n přirozených lichých čísel je n^2. Abychom tvrzení dokázali, stačí ukázat, že $1 + 3 + \cdots + (2n + 1) = n^2$. Ale již pro $n = 1$ vztah nefunguje, neboť člen $2n + 1$ na levé straně nabývá hodnoty 3, a tedy pro $n = 1$ je levá strana $1 + 3 = 4$ a pravá $n^2 = 1^2 = 1$. Nalezněte chybu v úvaze a opravte ji.

5.5. Dokažte matematickou indukcí, že platí $2^n > 2n + 1$ pro každé $n > 2$.

5.6. Pro která přirozená čísla n platí $2^n > n^2$? Své tvrzení dokažte. (Při dokazování matematickou indukcí využijte tvrzení z předcházejícího příkladu.)

5.7. Dokažte, že každé přirozené číslo větší než 7, s výjimkou čísla 11, lze získat jako součet čtyřek a pětek, přičemž v součtu může býti použit libovolný počet sčítanců a nemusíme nutně použít obě čísla.

5.8. Vyjádřete vzorcem s proměnnou n, $n \geq 2$, bez použití sumy následující výrazy: $\sum_{i=2}^{n} i(i-1)$ a $\sum_{i=2}^{n} i^2$. (Návod: Využijte skutečnosti, že (1) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ a vzorce (2) $\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ pro $r = 2$.)

5.9. Dokažte, že pro každé přirozené $n \geq 1$ platí

(a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n+1}{2}$.

(b) $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.

5.10. Dokažte, že pro každé přirozené $k \geq 0$ (bereme $k \in \mathbb{N}_0$) a $n \geq k + 1$ platí

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

5.11. Dokažte matematickou indukcí tvrzení

(a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, pro přirozená čísla $n \geq 1$,

(b) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$, pro přirozená čísla $n\geq 1$,

(c) $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$, pro přirozená čísla $n\geq 0$,

(d) $n!\geq 2^n$, pro přirozená čísla $n\geq 4$,

(e) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$, pro přirozená čísla $n\geq 0$.

5.12. Dokažte, že součet lichého počtu lichých přirozených čísel je lichý.