1 Domácí úkol – Kapitola 0

1.1. Čemu se rovná $\prod_{i=1}^{5} i^2$?

1.2. Čemu se rovná $\sum_{i \in J} i$, kde $J = \{2^n : n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 8\}$? Své rozhodnutí zdůvodněte!

1.3. Platí rovnost $\sum_{i=1}^{n}(i-3) = \sum_{i=1}^{n} i - 3$? Pokud ne, upravte pravou stranu tohoto vztahu netriviálním způsobem tak, aby rovnost platila. Své rozhodnutí zdůvodněte!

1.4. Platí rovnost $\prod_{i=1}^{n}(i-1) = \prod_{i=1}^{n} i - 1$? Své rozhodnutí zdůvodněte!

1.5. Čemu je roven výraz $\sum_{i=1}^{n} j$?

1.6. Čemu je roven výraz $\prod_{i=1}^{n} a$?

1.7. Určete množinu $A \times B$, pokud $A = \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor : n \in \mathbb{N}, 5 \leq n \leq 11\}$ a $B = \{\pi, e\}$. Patří do této množiny uspořádané dvojice $(6, \pi)$ a $(e, 2)$?

1.8. Platí $A \times B = B \times A$? Své rozhodnutí zdůvodněte!

1.9. Určete množinu A^2, pokud $A = 2^X$ a $X = \{0, 1\}$.

1.10. Platí obecně $|A \cup B| = |A| + |B|$? Své rozhodnutí zdůvodněte!

1.11. Platí obecně $|A \cap B| = |A \cup B| - |A \setminus (A \cap B)| - |B \setminus (A \cap B)|$?

1.12. Určete množiny $\bigcup_{i=1}^{4} A_i$ a $\bigcap_{i=1}^{4} A_i$, kde $A_i = \{im : m \in \mathbb{N}, i-1 \leq m \leq i+2\}$ pro každé přirozené kladné i.

1.13. Nechť $a, b, m, z \in \mathbb{N}, z \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Potom $a \equiv b \pmod{m}$ (čteme a je kongruentní s b modulo m) právě tehdy, když existují přirozená čísla p, q tak, že $a = mp + z$ a $b = mq + z$. Jinými slovy, a je kongruentní s b modulo m, pokud a i b při dělení číslem m dávají tentýž zbytek z.

(a) Zapište výraz $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ a $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ bez použití symbolu "dolní celá část" resp. "horní celá část" pro $n \in \mathbb{N}$, $n \equiv 0 \pmod{3}$.

(b) Zapište výraz $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ a $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ bez použití symbolu "dolní celá část" resp. "horní celá část" pro $n \in \mathbb{N}$, $n \equiv 1 \pmod{3}$.

(c) Zapište výraz $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ a $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ bez použití symbolu "dolní celá část" resp. "horní celá část" pro $n \in \mathbb{N}$, $n \equiv 2 \pmod{3}$.

1.14. Pro která přirozená čísla n platí, že jejich zápis v desítkové soustavě má $\lceil \log n \rceil$ číslic? Své rozhodnutí zdůvodněte.

1.15. Platí rovnost $\lfloor \frac{n+k}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ pro $n, k \in \mathbb{N}$? Pokud ne, stanovte podmínky pro n a k tak, aby rovnost platila.