Jméno: ______________________ os. číslo: __________ skupina: ________ řada: ______ sedadlo: ______

*Přečtěte si pozorně zadání. U každého příkladu uveďte také postup výpočtu.*

1. **Kolika způsoby je možné napsat číslo 50 jako součet 30-ti sčítanců – jedniček a dvojek. Rozlišujeme pořadí sčítanců.** 4 b

Vyřešíme úlohu obecnější: Kolika způsoby je možné napsat číslo $n$ jako součet $k$ sčítanců – jedniček a dvojek.

Aby úloha měla řešení, musí být $k \le n \le 2k$ (což úloha v zadání splňuje). Hledáme počet řešení rovnice

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k,$$

kde $1 \le x_i \le 2$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, k$. Představíme si, že číslo $n$ je napsáno jako součet $n$ jedniček. Do každé proměnné $x_i$ dáme jednu z $k$ jedniček a zbývajících $n-k$ jedniček můžeme do $k$ proměnných přiřadit libovolně. Hledáme počet možností, jak vybrat $n-k$ proměnných mezi $k$ proměnnými, což je možné $\binom{k}{n-k}$ způsoby.

V úloze ze zadání existuje

$$\binom{30}{50-30} = \binom{30}{20} = \binom{30}{10} = 30045015$$

možností jak napsat číslo 50 jako součet 30-ti jedniček a dvojek.

2. **Hodíme třemi kostkami: čtyřstěnnou, osmistěnnou a dvacetistěnnou kostkou. Jaká je střední hodnota součtu ok na všech kostkách?** 3 b

Vyřešíme úlohu obecnější: Hodíme $k$-stěnnou, $l$-stěnnou a $m$-stěnnou kostkou. Jaká je střední hodnota součtu ok na všech kostkách?

Střední hodnota náhodné veličiny $X$, která udává počet ok, která padnou při hodu $n$-stěnnou kostkou se vypočítá z definice střední hodnoty jako

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Nás zajímá střední hodnota náhodné veličiny $Y$, kde $Y = X_k + X_l + X_m$.

$$E(Y) = E(X_k + X_l + X_m) \overset{V2.6.}{=} E(X_k) + E(X_l(+E(X_m) = \frac{k+1}{2} + \frac{l+1}{2} + \frac{m+1}{2} = \frac{k+l+m+3}{2}.$$

Dosazením pro úlohu ze zadání dostaneme střední hodnotu součtu ok

$$E(Y) = \frac{4+8+20+3}{2} = \frac{35}{2}.$$

3. **Kolik různých slov lze získat přeuspořádáním písmen slova "DEFENESTRACE"? Kolik z nich neobsahuje FENSTER (pětici sousedících písmen FENSTER)?** 4 b

Nejprve vypočítáme, kolik různých anagramů slova DEFENESTRACE existuje celkem. Použitá písmena jsou 1D, 4E, 1F, 1N, 1S, 1T, 1R a 1C dostaneme využitím vztahu pro permutace s opakováním počet všech anagramů

$$\frac{(1+4+1+1+1+1+1+1)!}{4!} = \frac{11!}{4!} = 1663200.$$

Pro nalezení počtu slov, která obsahují "FENSTER", si představíme slovo "FENSTER" jako jediné písmeno X. Hledáme permutace slov z písmen 1X, 1D, 2E a 1C. Takových je

$$\frac{(1+1+2+1)!}{2!} = \frac{5!}{2!} = 60.$$

Abychom našli počet hledaných slov, odečteme od počtu všech slov ty, která obsahují podslovo "FENSTER":

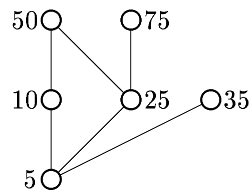
$$1663200 - 60 = 1663140.$$

4. **Ukažte, že relace dělitelnosti $|$ na množině $\{5, 10, 35, 25, 50, 75\}$ je antisymetrická. Najděte všechny minimální, nejmenší, maximální a největší prvky. Nakreslete hasseovský diagram relace.** 5 b

Relace dělitelnosti je antisymetrická pro všechna celá čísla, nejen pro čísla z množiny $A = \{5, 10, 35, 25, 50, 75\}$. Musíme ukázat, že $\forall x, y \in A : (x, y) \in | \wedge (y, x) \in | \Rightarrow x = y$.

Máme-li takovou dvojici prvků $x, y \in A : (x, y) \in | \wedge (y, x) \in |$, znamená to, že $x$ dělí $y$ a současně $y$ dělí $x$. Je proto $x \leq y$ a současně $y \leq x$, tedy $x = y$. Tím je vlastnost antisymetrie dokázána.

- minimální prvek je 5
- maximální prvky jsou 35, 50, 75
- nejmenší prvek je 5
- největší prvek neexistuje




Hasseovský diagram relace dělitelnosti na množině $\{5, 10, 35, 25, 50, 75\}$.

5. **Kolik existuje sedmiciferných čísel s číslicemi $1, 2, \ldots, 4$, která neobsahují čtyři a více stejných číslic?** 4 b

Vyřešíme úlohu obecnější: Budeme hledat taková čísla s číslicemi $1, 2, \ldots, k$, kde $1 < k < 10$. Všech sedmiciferných čísel je

$$V^*(k, 7) = k^7.$$

Od počtu všech čísel odečteme ty, které mají čtyři a více stejných číslic.

- Pokud má sedmiciferné číslo čtyři stejné číslice, můžeme tuto číslici vybrat $k$ způsoby a ostatní číslice libovolně mezi $k - 1$ číslicemi (musí být jiné). V případě, že první čtyři číslice jsou stejné a další libovolné jiné, dostaneme $k \cdot (k - 1)^3$ možností. Avšak pozice čtyř stejných číslic může být libovolná z $\binom{7}{4}$ možností. Celkem máme
$$\binom{7}{4} \cdot 7 \cdot (k - 1)^3 = 245(k - 1)^3 \text{ možností.}$$
- Podobně pokud má sedmiciferné číslo pět stejných číslic, můžeme tuto číslici vybrat $k$ způsoby a ostatní číslice libovolně mezi $k - 1$ číslicemi. Pozic pro pět stejných číslic je celkem $\binom{7}{5}$. Celkem máme
$$\binom{7}{5} \cdot 7 \cdot (k - 1)^2 = 147(k - 1)^2 \text{ možností.}$$
- Pokud má sedmiciferné číslo šest stejných číslic, dostaneme celkem
$$\binom{7}{6} \cdot 7 \cdot (k - 1)^1 = 49(k - 1) \text{ možností.}$$
- Pokud má sedmiciferné číslo sedm stejných číslic, dostaneme celkem
$$\binom{7}{7} \cdot 7 \cdot (k - 1)^0 = 7 \text{ možností.}$$

Celkem dostaneme odečtením nevyhovujících možností od počtu všech číslic

$$k^7 - 245(k - 1)^3 - 147(k - 1)^2 - 49(k - 1) - 7 \text{ možností.}$$

Pro úlohu ze zadání dostaneme pro $k = 4$

$$k^7 - 245(k - 1)^3 - 147(k - 1)^2 - 49(k - 1) - 7 = 5646.$$