# DISKRÉTNÍ MATEMATIKA
# a
# ÚVOD DO TEORIE GRAFŮ

## Řešené příklady k procvičení

Petr Kovář

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

# Úvodem

Tento text je koncipován jako pomůcka pro výuku i studium diskrétní matematiky a teorie grafů. Text je rozdělen do několika tématických okruhů, které odpovídají členění témat v předmětu Diskrétní matematika. Najdete zde jednak motivační příklady, při jejichž řešení se využijí postupy a metody diskrétní matematiky a jednak typové příklady, které mají studenta připravit na řešení klasických úloh. Do textu jsou zahrnuta i témata z oblastí, která jsou zařazena do osnov předmětu až od roku 2019.

Na webu `homel.vsb.cz/~kov16/predmety.php` je navíc k dispozici celá řada interaktivních ukázek a dále na webu `dim.vsb.cz` jsou pak typové úlohy k dispozici v multimediální formě tzv. „pencastů“.

Chtěl bych poděkovat studentům a později kolegům Pavle Kabelíkové a Tomáši Kupkovi, kteří pomáhali s přípravou některých příkladů a také Michalu Kubesovi, ktery pozorně prošel část řešených příkladů. Poděkování patří i dalším studentům a kolegům: Martinu Čermákovi, Oldřichu Vlachovi, Tereze Kovářové, Adamu Silberovi, Lukáši Rapantovi, Matěji Krbečkovi a Jirkovi Fialovi, kteří odhalili celou řadu chyb a překlepů.

## Řešené a neřešené příklady

Pro studenty jsou připraveny soubory dva. Jeden obsahuje pouze zadání příkladů a žádné výsledky, druhý soubor pak obsahuje u většiny příkladů postup řešení, nebo alespoň číselný výsledek pro kontrolu. Při studiu doporučujeme řešit především příklady ze souboru bez řešení a teprve vlastní postupy a výsledky srovnat s druhým souborem. Pro přehlednost je číslování příkladů v obou souborech totožné.

## K použitým symbolům

Příklady označené „*“ patří k náročnějším. Jejich řešení obvykle vyžaduje delší výpočet nebo pečlivější rozbor. Při řešení příkladů označených „**“ je třeba nějaký nápad nebo výsledek z jiné oblasti matematiky. Zdůrazněme ale, že hvězička neznamená nutně „to nikdy nevyřeším“.

Naproti tomu příklady označené „$^\heartsuit$“ jsou tak lehké, že jejich řešení je možné zpaměti jen s užitím základních pojmů.

V Ostravě 4. června 2018.

# Obsah

# 0 Motivační příklady

V této části uvedeme několik typických příkladů, které se během semestru naučíme řešit. Ukazují, čím se diskrétní matematika odlišuje od disciplin, se kterými se studenti už během studia setkali: od matematické analýzy, algebry a geometrie. Všimněte si, že pro řešení příkladů v této sekci sice používáme počty a digramy, avšak nikoliv metody algebry, ani analýzy ani geometrie. Příklady tak vymezují diskrétní matematiku vůči klasickým disciplínám.

0.0.1. Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal.

0.0.2. „Tři domy a tři studny." Podle pověsti žily v Temném hvozdu tři čarodejnice. Každá bydlela ve své vlastní sluji a každá potřebovala k provozování své živnosti vodu ze tří studánek: s živou vodou, s mrtvou vodou a s pitnou vodou. Jenomže cestou ke studánkám se čarodejnice nesmí potkat, ani zkřížit vyšlapanou cestičku jiné čarodejnice. Jak mohla vypadat mapa lesa se slujemi, studnami a cestičkami? Pokud řešení neexistuje, pečlivě zdůvodněte.

0.0.3. „Sedm mostů města Královce" Městem Královec (nyní Kaliningrad na území Ruska) teče řeka Pregola, která vytváří dva ostrovy. V 18. století byly ostrovy spojeny s oběma břehy i navzájem celkem sedmi mosty. Otázka zní, zda je možné všechny mosty přejít tak, aby ten, kdo se o to pokouší, vstoupil na každý most pouze jednou.

0.0.4. „Dokonalý kompresní algoritmus" Najděte alespoň jeden příklad dokonalého bezztrátového kompresního a dekompresního algoritmu, (máte najít dva algoritmy):

1. postup, jak z libovolné posloupnosti bajtů $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sestavit kratší posloupnost $c_1, c_2, \ldots, c_m$, kde $m < n$, a současně
2. postup, jak z posloupnosti $c_1, c_2, \ldots, c_m$ sestavit zpět posloupnost $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

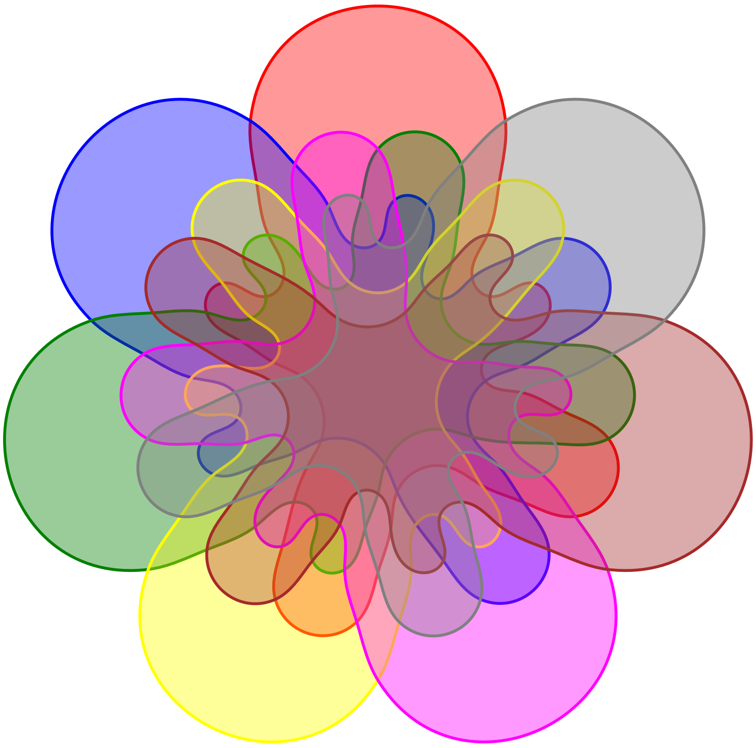
Pokud takový algoritmus neexistuje, pečlivě zdůvodněte.

0.0.5. „Lámání čokolády" Tabulka čokolády se skládá z $m \times n$ čtverečků. Chceme ji nalámat na jednotlivé čtverečky. Najděte (a dokažte) jaký je *nejmenší* počet zlomů, abychom čokoládu $m \times n$ rozdělili na jednotlivé čtverečky?

0.0.6. „Handshaking problem" Máme skupinu $n$ lidí ($n \geq 2$) z nichž někteří si podali ruce. Ukažte, že ve skupině jsou alespoň dva lidé, kteří podali ruku stejnému počtu lidí ve skupině.

0.0.7. „Krabice" Mějme $n$ krabic poskládaných do jednoho vysokého sloupce. Nyní máme za úkol tento sloupec rozložit na menší hromádky, přičemž za každé rozložení sloupce o výšce $a + b$ na dva menší sloupce o výškách $a$, $b$ dostáváme $a \cdot b$ bodů. Postup končí, jakmile žádné dvě krabice neleží na sobě. Cílem je zvolit takový postup rozkládání sloupců krabic, aby součet bodů za všechny kroky by co největší.

## Část I
# Základy diskrétní matematiky



Kolik různých oblastí na obrázku najdete?

# 1 Množiny, součty a součiny, zaokrouhlování

Nejprve připomeneme, že známý vztah pro součet prvních $n$ kladných celých čísel je

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1). \qquad (1)$$

Podrobněji si o základních kombinatorických pojmech přečtete v úvodní kapitole skript [ZDM].

## 1.1 Sumy a produkty

1.1.1. Vypočtěte $\sum_{i=-3}^{4} \frac{3+i}{2}$.

1.1.2. Najděte obecný vztah pro součet prvních $k$ lichých čísel.

1.1.3. Najděte obecný vztah pro součet prvních $k$ sudých kladných čísel.

1.1.4. Zapište a zjednodušte součet $12 + \frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \frac{12}{10000} + \cdots$

1.1.5. Ukažte, že aritmetický průměr libovolného sudého počtu po sobě jdoucích čísel není celé číslo.

## 1.2 Funkce horní a dolní celé části

1.2.1. Upravte na celočíselný zlomek $31,2\overline{71}$.

1.2.2.* Zapište funkci $\lfloor\rfloor$ pomocí $\lceil\rceil$.

1.2.3.* Zapište funkci $\lceil\rceil$ pomocí $\lfloor\rfloor$.

1.2.4. Upravte na celočíselný zlomek $1,\overline{23}$.

1.2.5.* Ukažte, že $\lfloor 1.\overline{9} \rfloor = 2$

1.2.6.* Ukažte, že $\lceil 1.\overline{9} \rceil = 2$

1.2.7. Ukažte, že $\lceil \lceil x \rceil \rceil = \lceil x \rceil$

1.2.8. Jak vyjádříte klasické zaokrouhlení pomocí $\lfloor\rfloor$?

1.2.9.* Jak vyjádříte klasické zaokrouhlení pomocí $\lceil\rceil$?

1.2.10. Nakreslete graf funkcí $\lfloor \sin x \rfloor$, $\lceil \cos x \rceil$ a $\lfloor \tan x \rfloor$.

1.2.11. Kolik prvků má $2^{\{1,2,3,4\}}$? Rozepište.

## 1.3 Množinové operace

1.3.1. Určete doplněk množiny všech sudých čísel $\mathbb{S}$

a) v množině $\mathbb{N}$,

b) v množině $\mathbb{R}$. Doplněk $\overline{S} = \mathbb{N} \setminus \mathbb{S}$ jsou všechna reálná čísla, která nejsou sudá čísla, tj. $\overline{S} = \{x : x \in \mathbb{R},\ \text{přičemž } x \neq 2k, \text{ kde } k \in \mathbb{N}\}$.

1.3.2. Rozepište potenční množinu množiny $B = \{1, 2, 3\}$.

1.3.3.$^{\heartsuit}$ Máme dány množiny $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\circ, \star\}$.

a) Kolik prvků má sjednocení $A \cup B$?

b) Kolik prvků má průnik $A \cap B$?

c) Kolik prvků má rozdíl $A \setminus B$?

d) Kolik prvků má kartézský součin $A \times B$?

e) Kolik prvků má součin $A \times 2^B$?

f) Rozepište kartézský součin $A \times B$.

g) Rozepište kartézský součin $B \times A$.

h) Rozepište rozdíl $A \setminus B$.

i) Rozepište rozdíl $B \setminus A$.

j) Rozepište součin $A \times 2^B$.

1.3.4. Určete doplněk množiny $B$ v množině $A$, kde $A = \mathbb{R}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 2\}$.

1.3.5. Určete průnik a sjednocení množin $A = \mathbb{N}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \geq 3\}$.

1.3.6. Určete rozdíly $A \setminus B$, $B \setminus A$, kde $A = \mathbb{N}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \geq -7\}$.

1.3.7.$^\heartsuit$ Kdy platí

a) $A \cap B = A$?

b) $A \cup B = A$?

c) $A \cup B = A \cap B$?

1.3.8.* Dokažte matematickou indukcí, že $|2^A| = 2^{|A|}$.

## 1.4 Příklady k procvičení

1.4.1. Vypočítejte následující sumy nebo produkty.

a) Vypočtěte $\sum_{i=2}^{5} \frac{1}{2j}$.

b) Vypočtěte $\sum_{j=2}^{5} \frac{1}{2j}$.

c) Vypočtěte $\sum_{i=1}^{4} i^3$.

d) Vypočtěte $\prod_{i=0}^{n} \frac{i}{i+1}$.

e) Vypočtěte $\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$.

1.4.2. Existuje taková posloupnost $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n (-a_i)$? Pokud ano, uveďte příklad!

1.4.3. Existuje taková posloupnost $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i > 0$ a $\prod_{i=1}^n a_i < 0$? Pokud ano, uveďte příklad!

1.4.4. Existuje taková posloupnost *kladných* čísel $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i > \prod_{i=1}^n a_i$? Pokud ano, uveďte příklad!

1.4.5.$^\heartsuit$ Zapište funkci součet prvků množiny $A = \{18, 25, 31, 67, 202, 301, 356\}$ pomocí sumy.

1.4.6.$^\heartsuit$ Vypočítejte

a) $\lfloor 2.7 \rfloor$.

b) $\lfloor -2.7 \rfloor$.

c) $\lfloor \frac{22}{10} \rfloor$.

d) $\lfloor -\frac{22}{10} \rfloor$.

e) $\lfloor -\pi \rfloor$.

f) $\lfloor -e \rfloor$.

g) $P = \lfloor \frac{n+1}{n} \rfloor$, pro $n \in \mathbb{N}$

1.4.7.$^{\heartsuit}$ Je některá množina podmnožinou každé množiny? Pokud ano, uveďte příklad.

1.4.8. Upravte, čemu se rovná

a) $A \cap (B \cup C) = ?$

b) $A \cup (B \cap C) = ?$

c) $\overline{A \cap B} = ?$ ($\overline{X}$ značí doplněk množiny $X$)

1.4.9. Kdy je potenční množina $2^A$

a) jednoprvková?

b) dvouprvková

c) tříprvková

d) prázdná

1.4.10. Kdy je kartézský součin dvou množin $A \times B$ prázdný?

1.4.11. Je možno najít dvě takové množiny $A$, $B$, aby současně platilo $A \subset B$ i $A \in B$?

1.4.12. Je možno najít dvě takové neprázdné množiny $A$, $B$, aby současně platilo $A \subset B$ i $A \in B$?

1.4.13. Dělové koule si dělostřelci stavěli do pyramid.

a) Pyramida buď měla čtvercovou základnu např. $4 \times 4$ koule, na ní dali vrstvu $3 \times 3$ koule, pak $2 \times 2$ koule a na vrchol 1 kouli. Tato pyramida měla celkem 30 koulí. Kolik celkem koulí by měla pyramida o základně $n \times n$ koulí?

b) Pyramida mohla mít založenou podstavu ve tvaru rovnoramenného trojúhelníku z 15 koulí, na ní byla další vrstva 10 koulí, další vrstva měla 6 koulí, pak 3 koule a na vrcholu byla 1 koule. Celkem měla taková pyramida 35 koulí. Kolik celkem koulí by měla pyramida o základně s hranou z $n$ koulí?

# 2 Výběry prvků s opakováním i bez opakování prvků

Podrobněji si o základních o kombinatorických výběrech přečtete ve skriptech [ZDM].

## 2.1 Výběry bez opakování

2.1.1.♡ Pro jaké hodnoty $n$ a $k$ je více $k$-prvkových podmnožin z $n$ prvkové množiny než $(n-k)$-prvkových podmnožin?

2.1.2. Pro jaké hodnoty $n$ a $k$ je více $k$-prvkových variací z $n$ prvkové množiny než $(n-k)$-prvkových variací?

2.1.3. Vyjádřete bez kombinačních čísel $\binom{3n}{3}$

2.1.4. Tenisový turnaj se hraje systémem každý s každým. Kolik se bude hrát zápasů, jestliže

a) se turnaje zúčastní 8 hráčů?

b) se turnaje zúčastní 21 hráčů?

2.1.5. Máme prázdnou množinu $\emptyset$.

a) Kolika způsoby můžeme seřadit prvky $\emptyset$ do posloupnosti?

b) Kolika způsoby můžeme vybrat $\emptyset$ z nějaké množiny?

c) Jak by se tyto počty změnily, kdyby $0! \neq 1$?

2.1.6. Tenisového turnaje se účastní 8 hráčů. Kolik je různých pořadí na stupních vítězů?

2.1.7. Upravte a porovnejte $\binom{6n}{3}$ a $\binom{3n}{6}$.

2.1.8.♡ Kolik způsoby se může postavit pět artistů na sebe?

2.1.9. Kolika způsoby je možné napsat číslo $k$ jako součet $n$ sčítanců 1 a 2? (počet sčítanců $n$ je pěvně dán) Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.

2.1.10. Máme $n$ lidí. Jak velké skupinky vybírat, aby byl počet možností co největší?

2.1.11. Ukažte několika způsoby, že $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2.1.12. Ukažte několika způsoby, že $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

2.1.13.* Hokejový trenér má k dispozici 13 útočníků a 9 obránců. Kolika způsoby vybereme pětku (2 obránce + 3 útočníci), jestliže jeden konkrétní útočník může hrát i v obraně?

2.1.14. Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá z deseti číslic vyskytuje nejvýše jednou. Kolik z nich je menších než 50 000?

2.1.15. Na konferenci vystoupí šest přednášejících: A, B, C, D, E, F. Určete počet

a) všech možných pořadí jejich vystoupení;

b) všech pořadí, v nichž vystoupí A po E;

c) všech pořadí, v nichž vystoupí A ihned po E.

2.1.16. Kolika způsoby můžeme $n$ lidí posadit

a) do řady

b) do řady, v níž je člověk A na kraji;

c) do řady tak, aby lidé A a B neseděli vedle sebe;

d) kolem kulatého stolu (dvě rozesazení považujeme za různá, pokud se alespoň jednomu člověku změní soused po pravé či levé ruce).

2.1.17. Kolika způsoby můžeme ze sedmi mužů a čtyř žen vybrat šestičlennou skupinu, tak aby v ní byly

a) právě dvě ženy;

b) alespoň dvě ženy;

c) nejvýše dvě ženy;

2.1.18. Vlajka má být sestavena ze tří různobarevných vodorovných pruhů. K dispozici jsou látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.

a) Kolik různých vlajek můžeme sestavit?

b) Kolik z nich má modrý pruh?

c) Kolik jich má modrý pruh uprostřed?

d) Kolik jich nemá uprostřed červený pruh?

## 2.2 Výběry s opakováním

2.2.1. Kolika způsoby můžeme postavit šest artistů do pyramidy $3+2+1$? Rozlišujeme pouze kdo stojí na zemi, kdo v první vrstvě a kdo nahoře, ale už nerozlišujeme, komu stojí další řada na levém a komu na pravém rameni.

2.2.2. Kolik sčítanců dostaneme po umocnění trojčlenu $(a+b+c)^7$? Úlohu řešte kombinatorickou úvahou, nikoliv rozepisováním binomického rozvoje.
Pokud roznásobíme všech 7 závorek a sečteme odpovídající členy, bude každý člen obsahovat sedm součinitelů, každý se může opakovat v libovolném počtu kopií (0 až 7). Nebude však hrát roli pořadí, v jakém bylo sedm součinitelů ze tří možností vybráno, proto počet členů je roven počtu kombinací tříprvkové množiny $\{a,b,c\}$ s možností opakování. Existuje celkem $C^*(3,7) = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8}{2} = 36$ různých členů.
**Poznámka:**
Obdobně pro druhou mocninu dostaneme známý vztah $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$ se šesti členy, neboť $C^*(3,2) = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$.
**Poznámka:**
Pokud rozlišujeme i všechny sčítance se stejnými členy, například členy $a^4b^2c^1$ a $a^3b^2ac^1$ považujeme za různé, tak se jedná o výběr, kdy ze tří součinitelů vybíráme sedmkrát s možností opakování, přičemž rozlišujeme pořadí součinitelů. Takových sčítanců je $V^*(3,7) = 3^7 = 2187$.

2.2.3. Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI?

2.2.4. Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI, které neobsahují IIII?

2.2.5. Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI, které neobsahují II?

2.2.6. Na patnáct stožárů v řadě budou pověšeny vlajky pěti zemí, každá třikrát. Kolik existuje možností?

## 2.3 Příklady k procvičení

2.3.1. Vypočítejte, kolika způsoby lze na klasické šachovnici ($8\times 8$ polí) vybrat

a) trojici libovolných políček,

b) trojici políček tak, že žádné dvě neleží v témže sloupci,

c) trojici políček tak, že žádné dvě neleží v témže sloupci ani v téže řadě,

d) trojici políček, která jsou všechna téže barvy.

2.3.2. Kolika způsoby je možné napsat $k$ jako součet $n$ sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.

2.3.3. Kolika způsoby můžeme na šachovnici rozestavit všech 32 figur? Započítáme i ty možnosti, které nemohou nastat během regulérní hry (pěšec v první řadě, dva králové na sousedních polích, dva bílí střelci na černých polích, ...).

2.3.4. Kolika způsoby je možné napsat číslo 7 jako součet právě čtyř přirozených sčítanců? (dovolíme i nulové sčítance!) Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.

2.3.5. Kolika způsoby je možné napsat číslo 7 jako součet právě čtyř kladných přirozených sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.

2.3.6. Kolika způsoby je možné napsat $k$ jako součet $n$ kladných sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.

2.3.7. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit?

2.3.8. Máme 7 *různých* figurek a tři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit?

2.3.9. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak některé figurky obarvit?

2.3.10. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit, přičemž od každé barvy by měla být alespoň jedna figurka?

2.3.11. Kolika způsoby můžeme posadit $n$ lidí kolem kulatého stolu? Ve dvou rozdílných rozesazeních má některý člověk jiného souseda po levé nebo po pravé ruce.

2.3.12. Kolika způsoby můžeme posadit $n$ manželských párů kolem kulatého stolu tak, aby manželé seděli vždy vedle sebe? Ve dvou rozdílných rozesazeních má některý člověk jiného souseda po levé nebo po pravé ruce.

2.3.13. Dříve byly státní poznávací značky osobních automobilů tvořeny uspořádanou sedmicí, jejíž první tři členy byly písmena a další čtyři číslice. Kolik poznávacích značek bylo možno sestavit, jestliže pro první část značky bylo možno použít každé z 26 písmen (každá možnost povolena nebyla).

2.3.14. Určete počet všech *nejvýše* $k$-prvkových podmnožin $n$-prvkové množiny.

2.3.15. Kolik je všech pěticiferných přirozených čísel? Kolik z nich je menších než 50 000?

2.3.16. Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel dělitelných 9, v jejichž dekadickém zápisu mohou být pouze číslice 0, 1, 2, 5, 7.

2.3.17. V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky (kuličky téže barvy jsou nerozlišitelné). Určete, kolika způsoby lze vybrat pět kuliček, jestliže v sáčku je

a) aspoň pět kuliček od každé barvy;

b) pět červených, čtyři modré a čtyři zelené kuličky.

2.3.18.* Kolika způsoby je možné napsat číslo $k$ jako součet sčítanců 1 a 2? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.

2.3.19.* Jaký je počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a každá jejich strana má velikost vyjádřenou některým z čísel $n+1, n+2, n+3, ...2n$, kde $n$ je přirozené číslo.

2.3.20. Kolik přímek lze proložit 7 body, jestliže žádné tři body neleží v přímce?

2.3.21. Kolik přímek lze proložit 7 body, jestliže právě tři body leží v přímce?

2.3.22. Máme dány dvě mimoběžky. Na jedné je $m$ bodů, na druhé $n$ bodů. Kolik lze sestrojit čtyřstěnů s vrcholy v daných bodech?

2.3.23. Kolika způsoby můžete seřadit v poličce pět učebnic angličtiny, čtyři učebnice matematiky a dvě učebnice českého jazyka, jestliže mají zůstat rozděleny do skupin po jednotlivých předmětech?

2.3.24. Na hlídku půjdou 4 vojáci z čety. Kolik vojáků má četa, jestliže výběr je možno provést 210 způsoby?

2.3.25. Palindrom je slovo, které se píše stejně jako pozpátku. Anglická abeceda má 26 písmen. Kolik existuje palindromů (i nesmyslných) délky $n$ z písmen anglické abecedy?

2.3.26. Házíme třikrát kostkou. Kolik existuje takových možností, kdy v každém dalším hodu padají větší a větší čísla?

2.3.27. Byli jsme čtyři, seděli v baru a popíjeli. Trápilo nás špatné svědomí, že místo abychom v životě dělali něco pořádného, jsme závislí na alkoholu. Tu k nám přistoupil rozjařený barman a namíchal nám sedm různých drinků tak, aby každý dostal alespoň jeden. Kolika způsoby to mohl provést, jestliže rozlišujeme pořadí drinků, které jsme vypili.

2.3.28. Počítač Kecálek ve filmu Rumburak dostal za úkol najít všechny dvojice slov složené z dvanácti písmen (mezeru nepočítáme). Kolik takových slov z 26 písmen existuje?

2.3.29. Zaklínadlo pro přesun do říše pohádek ve filmu Rumburak zní HUBERO KORORO. Kolik existuje anagramů tohoto zaklínadla složených ze dvou šestipísmených slov?

2.3.30. Zaklínadlo pro změnu počasí ve filmu Rumburak zní RABERA TAREGO. Kolik existuje anagramů tohoto zaklínadla složených ze dvou šestipísmených slov?

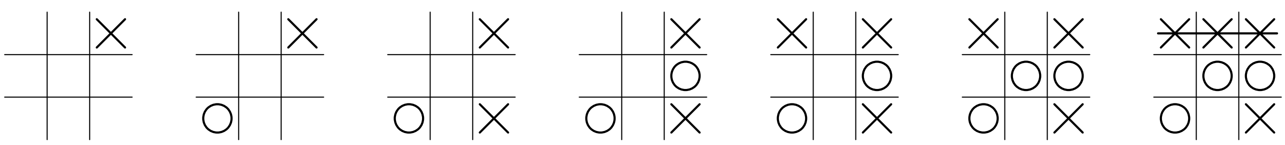
2.3.31. Na běžných dominových kostkách se vyskytují oka v počtu $0, 1, \ldots 6$. Každá dvojice počtu ok se s sadě vyskytuje na právě jedné kostce. Všechny kostky domina je možné položit do jediné řady tak, aby navazující kostky sdílely stejný počet ok. Nyní $n$-dominem budeme rozumět takovou sadu kostek, která obsahuje všechny dvojice počtů ok z rozsahu $0, 1, \ldots, n$. Pro jaká přirozená čísla $n$ lze všechny kostky $n$-domina položit do jediné řady?

2.3.32. Máme čtverečkovanou síť $m \times n$ čtverečků. Kolik různých obdélníků najdeme v síti?

2.3.33. Keltský druid Travedik vaří lektvary ze sta různých bylin. Mezi nimi je i šalvěj třeskutá, což je druidova nejmocnější bylinka. Při vaření lektvarů může použít jednu, dvě, tři, či libovolný větší počet bylin. Kterých lektvarů je více, těch, které šalvěj třeskutou obsahují a nebo těch, které ji neobsahují?

2.3.34. Keltský druid Travedik vaří lektvary ze sta různých bylin. Mezi nimi jsou i šalvěj třeskutá a puchejřníček smradlavý, což jsou dvě Travedikovy nejmocnější bylinky. Při vaření lektvarů může použít jednu, dvě, tři, či libovolný větší počet bylin. Kterých lektvarů je více, těch, které obsahují šalvěj třeskutou a puchejřníček smradlavý a nebo těch, které alespoň jednu z těchto bylin neobsahují?

2.3.35. Hra *Tic-tac-toe* je hra s tužkou a papírem pro dva hráče X a O. Hráči střídavě zapisují křížky a kolečka do čtvercové sítě políček $3 \times 3$. Obvykle začíná X, jako na Obrázku 2.1. Hráč, který jako první umístí tři své symboly v jedné řadě, sloupci nebo diagonále, vyhraje.



Obrázek 2.1: *Jedna hra Tic-tac-toe.*

a)$^{\heartsuit}$Kolik existuje různých rozmístění křížků a koleček (pět křížků a čtyři kolečka) na herním plánu?

b) Kolik existuje různých rozmístění křížků a koleček na herním plánu, jestliže rozlišujeme pořadí tahů, křížky a kolečka se střídají?

c) Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje X v pátém tahu?

d) Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje O v šestém tahu?

e) Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje X v sedmém tahu?

f) Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje O v osmém tahu?

g)* Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, kdy vyhraje X v devátém tahu?

h) Kolik existuje různých her Tic-tac-toe, které končí remízou?

i) Kolik existuje všech různých her Tic-tac-toe?

# 3 Diskrétní pravděpodobnost

Pokud není řečeno jinak, tak v příkladech této kapitoly předpokládáme, že balíček karet obsahuje 32 karet, od sedmičky po eso ve čtyřech různých barvách (srdce, piky, káry a kříže). Dále předpokládáme, že klasická šestistěnná kostka je vyrobena tak, že součet ok na protilehlých stěnách je vždy sedm.

Všimněte si, že i v případě, kdy máme zamíchaný celý balíček karet, nemusíme někdy uvažovat šech 32! pořadí. Pokud se zajímáme o nějaký výběr, stačí pracovat s nějakým náhodným výběrem.

Podrobněji si o diskrétní pravděpodobnosti můžete přečíst ve skriptech [ZDM].

## 3.1 Motivační příklady

3.1.1. Na jednom Americkém televizním kanálu běžela *Montyho Show*. Soutěžící měli možnost získat automobil, jestliže si vyberou ze tří dveří ty dveře, za kterými se automobil nachází. Soutěžící si jedny dveře zvolil a potom Monty šel a otevřel některé ze dvou zbývajících dveří. Vždy otevřel ty dveře, za kterými nestál automobil, ale koza. Nyní měl soutěžící možnost změnit svou volbu a vybrat si libovolné ze dvou stále zavřených dveří. Předpokládáme, že pořadatelé vyberou na začátku náhodně jedny ze tří dveří, za které zaparkují automobil a za další dvě postaví kozy. Je lepší změnit svoji volbu, nebo zůstat u původního tipu a nebo je to jedno? S jakou pravděpodobností získá soutěžící výhru jestliže změní svoji volbu? Svou odpověď vysvětlete.

## 3.2 Konečný pravděpodobnostní prostor

3.2.1. Hodíme kostkou.

a) Jaká je pravděpodobnost, že padne sudé číslo?

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne prvočíslo?

c) Jaká je pravděpodobnost, že padne jednička nebo dvojka?

d) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 7?

e) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 3?

3.2.2. Hodíme kostkou, která není spravedlivá, různá čísla padají s různou pravděpodobností. Čísla 1, 2 padnou s pravděpodobností $\frac{1}{5}$, čísla 4, 5 a 6 padnou s pravděpodobností $\frac{1}{7}$. Pravděpodobnost čísla 3 není udána.

a) Jsou uvedené pravděpodobnosti konzistentní?

b) S jakou pravděpodobností padne číslo 3?

c) Jaká je pravděpodobnost, že padne sudé číslo?

d) Jaká je pravděpodobnost, že padne prvočíslo?

e) Jaká je pravděpodobnost, že padne jednička nebo dvojka?

f) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 7?

g) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 3?

3.2.3. Hodíme dvěma kostkami.

a) Je pravděpodobnější, a) že padne 5 a 6 nebo b) že padnou dvě 3?

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne součin 12?

c) Jaká je pravděpodobnost, že padne součin 4?

d) Jaká je pravděpodobnost, že padne součin 14?

e) Jaká je pravděpodobnost, že padne součet 10?

3.2.4. Sestavte funkci $P(n)$, která bude udávat pravděpodobnost, že při současném hodu $n \geq 1$ kostkami

a) padne součet $n$.

b) padne součet 3.

3.2.5. Hodíme současně sedmi kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že

a) padne součet 12?

b) padne součet 13?

3.2.6. Hodíme $n$-stěnnou kostkou očíslovanou $1, 2, \ldots, n$. Jaká je pravděpodobnost, že padne liché číslo?

3.2.7. Hodíme $n$-stěnnou prvočíselnou kostkou (stěny jsou očíslované užitím prvních $n$ prvočísel). Jaká je pravděpodobnost, že padne liché číslo?

3.2.8. Máme zamíchaný balíček 32 hracích karet. Jaká je pravděpodobnost, že

a) první karta v balíčku je eso?

b) třetí karta v balíčku je desítka?

c) třetí karta v balíčku je desítka, víme-li, že první dvě karty jsou dáma a král?

d) třetí karta v balíčku je desítka, víme-li, že první dvě karty jsou sedmička a desítka?

3.2.9. Házíme dvěma kostkami: šestistěnnou a dvanáctistěnnou. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne stejné číslo?

3.2.10. Házíme třemi kostkami: čtyřstěnnou, šestistěnnou, desetistěnnou. Jaká je pravděpodobnost, že na všech padne stejné číslo?

3.2.11. Házíme třemi šestistěnnými kostkami.

a) Je lepší vsadit si, že nepadne žádná šestka, nebo že padne alespoň jedna šestka?

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne právě jedna šestka?

c) Jaká je pravděpodobnost, že padnou alespoň dvě šestky?

3.2.12. Házíme desetistěnnou kostkou.

a) Hodíme jednou. Jaká je pravděpodobnost, že padne prvočíslo?

b) Házíme dvakrát. Jaká je pravděpodobnost, že padne lichý součet?

c) Házíme dvakrát. Jaká jsou pravděpodobnosti jednotlivých součtů?

3.2.13. Házíme čtyřikrát mincí. Jaká je pravděpodobnost, že

a) padne čtyřikrát za sebou hlava?

b) padne nejprve hlava, potom orel, znovu orel a nakonec hlava?

c) padne dvakrát hlava a dvakrát orel (v libovolném pořadí)?

d) padne alespoň jednou hlava?

3.2.14. Hodíme třemi stejnými kostkami.

a) Jaká je pravděpodobnost, že padne $2, 4, 6$?

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne $2, 4, 4$?

3.2.15. Ve třídě je 25 žáků. Předpokládejme, že nikdo nemá narozeniny 29. února (v přestupném roce) a že každý den v roce se rodí přibližně stejně dětí. a) S jakou pravděpodobností budou alespoň dva spolužáci slavit narozeniny ve stejný den? b) Kolik nejméně musí být ve třídě žáků, aby byla pravděpodobnost společného data narozenin dvou spolužáků větší než $\frac{1}{2}$?

## 3.3 Disjunktní a nezávislé jevy

3.3.1. Dva hráči hází kostkou. Jsou jejich hody nezávislé? I když někdo hodí tři šestky za sebou?

3.3.2. Mějme dva různé elementární jevy.

a) Jsou různé elementární jevy vždy disjunktní?

b) Jsou různé elementární jevy vždy nezávislé?

3.3.3. Mějme dva disjunktní jevy.

a) Mohou být dva disjunktní jevy nezávislé?

b) Je prázdný jev nezávislý s libovolným jevem?

3.3.4. Udejte příklad dvou různých jevů, které nejsou disjunktní.

3.3.5. Hodíme dvěma kostkami.

a) Jsou jevy $A$: *padl součet* 4 a $B$: *padl součin* 4 disjunktní?

b) Jsou jevy $A$: *padl součet* 6 a $B$: *padl součin* 6 disjunktní?

3.3.6. Mějme tři jevy $A, B, C$. Víme, že jevy $A$ a $B$ jsou nezávislé, jevy $B$ a $C$ jsou nezávislé a jevy $A$ a $C$ jsou nezávislé.

a) Jsou jevy $A, B, C$ nezávislé jako trojice?

b) Mohou být ve speciálním případě nezávislé? Kdy?

3.3.7. Máme zamíchaný balíček 32 karet.

a) Rozdáme dvěma hráčům po třech kartách. Jsou výběry karet nezávislé?

b) Dáme prvnímu hráči tři karty a zbylé karty zamícháme. Potom druhý hráč dostane také tři karty. Jsou výběry karet nezávislé?

c) Dáme prvnímu hráči tři karty. On si je zapamatuje a vrátí do balíčku. Potom karty zamícháme a druhý hráč dostane tři karty. Jsou výběry karet nezávislé?

d) Hráč dostane pět karet, potom karty vrátí a po zamíchání dostane znovu pět karet. Jaká je pravděpodobnost, že měl pokaždé fullhouse (3+2 stejné hodnoty)?

e) Hráč dostane pět karet, schová si je dostane dalších pět karet. Jaká je pravděpodobnost, že měl královský poker (4 esa a další karta stejné hodnoty) dvakrát za sebou?

3.3.8. Hodíme dvěma kostkami, jednou zelenou a jednou červenou. Jsou jevy $A$: „na obou padne stejné číslo“ a $B$: „na zelené kostce padne šestka“ nezávislé?

3.3.9. Hoďme dvěma kostkami. Jsou jev *„padl součet* 6*“* a jev *„padl součin* 8*“* nezávislé?

3.3.10. Mějme pravděpodobnostní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ s uniformní pravděpodobností (házíme osmistěnnou kostkou). Jsou jevy $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{5, 6, 7, 8\}$ nezávislé?

3.3.11. Mějme pravděpodobnostní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ s uniformní pravděpodobností (házíme osmistěnnou kostkou). Jsou jevy $A = \{1, 2, 3, 4\}$ (padlo malé číslo) a $B = \{1, 3, 5, 7\}$ (padlo liché číslo) nezávislé?

3.3.12. Mějme pravděpodobnostní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ s uniformní pravděpodobností (házíme šestistěnnou kostkou). Jsou jevy $A = \{1, 2, 3\}$ (padlo malé číslo) a $B = \{1, 3, 5\}$ (padlo liché číslo) nezávislé?

3.3.13. Házíme $n$-stěnnou kostkou. Nadefinujeme jev $A$, že padne malé číslo $1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ a jev $B$, že padne liché číslo. Pro jaká $n$ jsou jevy $A$ a $B$ nezávislé?

## 3.4 Podmíněná pravděpodobnost

3.4.1. Jaká je pravděpodobnost při hodu klasickou kostkou, že padne číslo větší než 3 víme-li, že padlo liché číslo.

3.4.2. V krabici je 5 koulí, 3 jsou bílé a 2 černé. Vytáhneme postupně dvě koule. Jaká je pravděpodobnost, že první je bílá a druhá černá?

3.4.3. V krabici je 5 koulí, 3 jsou bílé a 2 černé. Vytáhneme postupně dvě koule. Počítejme: Všechny možnosti, jak mohou dopadnout losování jsou: bílá-bílá, bílá-černá, černá-černá a černá-bílá. Pouze jedna z nich je příznivá: bílá-černá. Dostaneme pravděpodobnost $P = \frac{1}{4}$. Srovnejte s řešením Příkladu 2. Co je špatně? Vysvětlete!

3.4.4. V krabici je 5 koulí, 3 jsou bílé a 2 černé. Vytáhneme postupně dvě koule. Počítejme: Všech možností, jak může dopadnout losování je $\binom{5}{2} = 10$. Příznivé jsou ty, kdy vybereme nejprve bílou a potom černou: Dostaneme pravděpodobnost $P = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1}}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 2}{10} = \frac{3}{5}$. Srovnejte s řešením Příkladu 2. Co je špatně? Vysvětlete!

3.4.5. Z celkové produkce závodu jsou 4% zmetků. Z dobrých výrobků je 75% standardních. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je standardní.

## 3.5 Střední hodnota

3.5.1. Házíme kostkou, která není spravedlivá, různá čísla padají s různou pravděpodobností. Čísla 1, 2 padnou s pravděpodobností $\frac{1}{5}$, čísla 4, 5 a 6 padnou s pravděpodobností $\frac{1}{7}$. Pravděpodobnost čísla 3 není udána. Jaký je střední počet počtu ok, která na kostce padnou?

3.5.2. Jaká je střední hodnota počtu šestek, které padnou při hodu pěti kostkami?

3.5.3. Máme šestistěnnou kostku.

a) Jaký je průměrný součet čísel na horní a spodní stěně kostky vyrobené tak, že 1 je naproti 6, 2 naproti 5 a 3 naproti 4?

b) Jaký je průměrný součet čísel na horní a spodní stěně kostky vyrobené tak, že 1 je naproti 2, 3 naproti 5 a 4 naproti 6?

3.5.4. Máme dva sáčky s kuličkami. V prvním sáčku jsou dvě kuličky s číslem 2 a tři kuličky s číslem 3. Ve druhém sáčku jsou 3 kuličky s číslem 4 a 2 kuličky s číslem 5. Taháme z obou sáčků po jedné kuličce. Jaký je průměrný součet tažených čísel?

3.5.5. Uměli byste rozmístit čísla 1 až 6 na spravedlivou kostku tak, aby střední hodnota součtu horní a spodní stěny byla jiná než 7?

3.5.6. Najděte vhodná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_6$ a rozmístěte je na spravedlivou kostku tak, aby střední hodnota součtu horní a spodní stěny byla jiná než průměr hodnot $a_1$ až $a_6$ vynásobený dvěma.

3.5.7. Najděte vhodná celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_6$ a rozmístěte je na spravedlivou kostku tak, aby střední hodnota součinu horní a spodní stěny byla jiná než průměr hodnot $a_1$ až $a_6$ umocněný na druhou.

3.5.8.* Najděte vhodná různá celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_6$ a rozmístěte je na spravedlivou kostku tak, aby střední hodnota součinu horní a spodní stěny byla stejná jako průměr hodnot $a_1$ až $a_6$ umocněný na druhou.

3.5.9. Kolik je třeba průměrně hodů mincí, aby vyšly dva stejné výsledky?

3.5.10.* Kolik je třeba průměrně hodů mincí, kde hlava má pravděpodobnost $p$ ($p$ nemusí být $\frac{1}{2}$), aby vyšly dva stejné výsledky?

3.5.11.* Kolik je třeba průměrně hodů spravedlivou mincí, aby padla první hlava?

3.5.12.* Kolik je třeba průměrně hodů mincí, kde hlava má pravděpodobnost $p$ ($p$ nemusí být $\frac{1}{2}$), aby padla první hlava?

3.5.13. Jaká je střední hodnota počtu políček, o které se vaše figurka přesune v jednom kole hry „Člověče, nezlob se!“, pokud se

a) po třetí šestce za sebou již znovu nehází?

b) opakovaně hází dokud padají šestky?

3.5.14. Při objednávání obědů u terminálu vedle jídelny nevíte, která jídla jsou k dispozici a která ne. Jestliže tři z pěti jídel již není možné objednat. Jaký je střední počet pokusů než si objednáme jídlo, které se ještě vaří?

3.5.15. Při objednávání obědů u terminálu vedle jídelny nevíte, která jídla jsou k dispozici a která ne. Je-li v menu výběr z $n$ jídel a jestliže $k \leq n$ je počet jídel z pěti, která je možno objednat, jaký je střední počet pokusů než si objednáme jídlo, které se ještě vaří?

## 3.6 Náhodné výběry

3.6.1. Máme sedmiprvkovou množinu $A$.

a) S jakou pravděpodobností vybereme náhodně jednu konkrétní pětiprvkovou podmnožinu mezi všemi pětiprvkovými podmnožinami?

b) S jakou pravděpodobností vybereme náhodně jednu konkrétní pětiprvkovou podmnožinu mezi všemi podmnožinami?

c) S jakou pravděpodobností vybereme náhodně některou pětiprvkovou podmnožinu mezi všemi podmnožinami?

3.6.2. S jakou pravděpodobností vybereme náhodně jednu $k$-prvkovou podmnožinu $n$-prvkové množiny?

3.6.3. S jakou pravděpodobností vybereme náhodně $k$-prvkovou podmnožinu mezi všemi podmnožinami $n$-prvkové množiny?

3.6.4. Jaká je pravděpodobnost, že náhodná podmnožina $n$-prvkové množiny obsahuje jeden pevně zvolený prvek?

3.6.5. Máme náhodnou posloupnost čtyř bitů.

a) S jakou pravděpodobností se jedná o „0011“?

b) S jakou pravděpodobností obsahuje dvě jedničky a dvě nuly?

3.6.6. S jakou pravděpodobností obsahuje více jedniček než nul?

3.6.7. Máme náhodnou permutaci pětiprvkové množiny.

a) Jakou pravděpodobnost má jedna náhodná permutace?

b) Jakou pravděpodobnost má permutace, kde číslo 1 následuje bezprostředně za číslem 2?

c) Jakou pravděpodobnost má permutace, kde číslo 1 následuje za číslem 2?

d) Jakou pravděpodobnost má permutace, kde čísla 1, 2 jsou vedle sebe?

## 3.7 Příklady k procvičení

3.7.1. Házíme opakovaně spravedlivou mincí.

a) Jaká je pravděpodobnost, že při šesti hodech mincí padne hlava i orel stejněkrát?

b) Jaká je pravděpodobnost, že při $n$ hodech mincí padne hlava i orel stejněkrát?

3.7.2. Máme zamíchaný balíček 32 karet. Vytáhneme postupně dvě karty. Jaká je pravděpodobnost, že

a) obě karty budou esa?

b) obě karty budou devítka a desítka (v tomto pořadí)?

c) obě karty budou devítka a desítka (v libovolném pořadí)?

d) ani jedna karta nebude král?

e) obě karty budou stejné barvy?

3.7.3. Kuchař upustil omylem do polévky dva různé prsteny. Všechna polévka byla rozdělena mezi 25 hostů, z toho 8 žen. Jaká je pravděpodobnost, že

a) oba prsteny dostane jedna osoba?

b) prsteny budou mít v polévce dva muži?

c) prsteny nebude mít v polévce žádný muž?

d) prsteny budou mít v polévce jeden muž a jedna žena?

e) prsteny budou mít v polévce dvě ženy?

f) Jak se pravděpodobnosti změní, jestliže prsteny budou stejné?

3.7.4. Hodíme dvěma šestistěnnými kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že větší číslo bude $m$?

3.7.5. V šuplíku máme rozházených po 6 ponožkách od každé z barev černá, šedá a bílá. Kolik ponožek musíme průměrně vytáhnout (postupně a poslepu), abychom dostali jednobarevný pár? Nerozlišujeme levou a pravou ponožku.

3.7.6. V šuplíku máme rozházených po $p$ ponožkách od každé z $b$ barev. Kolik ponožek musíme průměrně vytáhnout (postupně a poslepu), abychom dostali jednobarevný pár? Nerozlišujeme levou a pravou ponožku.

3.7.7.* Magnet má dva póly, které se přitahují. Barevné dětské magnetky mají na sobě umělohmotnou čepičku. Čepička zakrývá celý jeden pól magnetu, proto přitahovat se mohou pouze jedním pólem. Magnetky jsou balené po 40 kusech, 10 od každé ze čtyř barev. Předpokládejme, že zakryté póly těchto magnetků jsou zvoleny náhodně s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Jaká je pravděpodobnost, že těchto 40 magnetků lze pospojovat do $5 \times 4$ stejnobarevných dvojic tak, že každá dvojice se navzájem přitahuje opačnými nezakrytými póly?

3.7.8. Hra *Tic-tac-toe* je hra s tužkou a papírem pro dva hráče X a O, kteří střídavě zapisují křížky a kolečka do čtvercové sítě políček $3 \times 3$, viz Cvičení 2.3.35. Při řešení využijte výsledku Cvičení 2.3.35.

a) Jaká je střední hodnota počtu tahů do vítězství, jestliže remízy nebudeme uvažovat (předpokládáme, že remíza nemůže nastat). Předpokládejme, že každá hra má stejnou pravděpodobnost (což nemusí být pravda).

b)* Jaká je střední hodnota počtu tahů do prvního vítězství, jestliže remízy započítáme jako 9 tahů a další hra pokračuje dalším (desátým) tahem. Předpokládejme, že každá hra má stejnou pravděpodobnost (což nemusí být pravda).

3.7.9. Krabice dřevěných dětských vláčků obsahuje jednu lokomotivu a tři vagónky. Vagónky a lokomotiva se spojují pomocí magnetů. Lokomotiva má jeden magnet a každý vagónek má magnety dva – na každém konci jeden. Póly magnetů jsou otočeny tak, aby bylo možno zapojit do vláčku všechny vagónky a to v libovolném pořadí.

a) S jakou pravděpodobností by se dal sestavit vláček s vagónky v libovolném pořadí, pokud by v továrně orientaci magnetů přiřazovali náhodně?

b)* Uměli byste předchozí úlohu zobecnit pro $n$ vagónků?

c) S jakou pravděpodobností by se dal sestavit vláček s vagónky v alespoň jednom pořadí, pokud by v továrně orientaci magnetů přiřazovali náhodně?

d)* Uměli byste předchozí úlohu zobecnit pro $n$ vagónků?

3.7.10. V balíčku je 8 karet, dvě od každé barvy. Balíček pečlivě rozmícháme. S jakou pravděpodobností dostaneme takové rozmíchání, ve kterém nejsou žádné dvě karty stejné barvy vedle sebe?

3.7.11. Jaký je střední počet hodů šestistennou kostkou než padne každá stěna alespoň jednou?

3.7.12. Čtyřicet sportovců bude rozděleno na čtyři stejně početné skupiny. Jaká je pravděpodobnost, že dva konkrétní sportovci $A$ a $B$ budou ve stejné skupině?

3.7.13. S jakou pravděpodobností bude přijato binární slovo délky 8 znaků, které obsahuje čtyři nuly, jestliže zdroj signálu generuje 7krát více nul než jedniček?

# 4 Důkazy v diskrétní matematice

Podrobněji si o důkazech můžete přečíst ve skriptech [ZDM].

## 4.1 Motivační příklady

4.1.1. Tabulka čokolády se skládá z $m \times n$ čtverečků. Chceme ji nalámat na jednotlivé čtverečky. Najděte a dokažte jaký je *nejmenší* počet zlomů, abychom čokoládu $m \times n$ rozdělili na jednotlivé čtverečky?

4.1.2. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $n$ přímek rozdělí rovinu na nejvýše $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ oblastí.

4.1.3. Máme sloupeček $n$ krabic. Budeme hrát následující hru (pro jednoho/libovolný počet hráčů):

Z jednom kroku vždy rozdělíme nějaký sloupec $z$ krabic ($z \geq 2$) na dva menší sloupce s $x$ a $y$ krabicemi. Za tento krok získáme počet bodů, který je dán součinem $x \cdot y$.

Hra končí, jakmile máme $n$ sloupců každý s jedinou krabicí. Začínáme s nulovým počtem bodů a chtěli bychom dosáhnout co největšího počtu bodů. Hráč s největším počtem bodů vyhrál. a) Jakou strategii zvolit, abychom získali co největší skóre? b) Dokažte, že žádná jiná strategie nevede k vyššímu skóre.

4.1.4. Dva zloději ukradli náhrdelník. Náhrdelník je sestaven z drahokamů (rubínů a diamantů) po řadě spojených řetízkem do kruhu. Svůj lup by si chtěli rozdělit tak, aby každý dostal stejný počet diamantů i rubínů. Ukažte, že pokud náhrdelník obsahuje sudý počet diamantů ($2d$) a sudý počet rubínů $2r$, je vždy možné rozdělit náhrdelník na *dvě* části tak, aby každá část obsahovala polovinu rubínů i polovinu diamantů.

## 4.2 Základní logické symboly

4.2.1. Sestavte negaci výroku „Všechna auta jsou červená.“

4.2.2. Sestavte negaci výroku „Každý student u zkoušky uspěje.“

4.2.3. Sestavte negaci výroku „Jednou jsem vyhrál ve sportce.“

4.2.4. Sestavte negaci výroku „Kdo neskáče, není Čech.“

4.2.5. Sestavte negaci výroku $\forall n : 2^n > n^2$.

4.2.6. Sestavte negaci výroku $\forall x > 1 : x^2 > x$.

4.2.7. Sestavte negaci výroku $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ln |x| < 0$.

4.2.8. Pokud je to možné, zapište všechny možné různé binární operátory užitím negace, konjunkce a disjunkce.

4.2.9. Pokud je to možné, zapište všechny možné různé binární operátory užitím negace, konjunkce a XOR.

4.2.10. Pokud je to možné, zapište všechny možné různé binární operátory užitím NAND a XOR.

4.2.11. Víme, že výrok $A$ a jeho negace $nonA$ nemohou být současně pravdivé nebo současně nepravdivé. Označíme $A$ výrok „Tato věta neobsahuje zápor,“ který je nepravdivý. Avšak jeho negace „Tato věta obsahuje zápor“ je také nepravdivá. Vysvětlete!

4.2.12.* Najděte podobné věty jako v předchozím příkladu tak, aby obě tvrzení $A$ a $nonA$ byly pravdivé.

4.2.13. Kolik různých binárních operátorů existuje (může existovat)? Sestavte jejich pravdivostní tabulky.

## 4.3 Pojem matematického důkazu

Celé číslo $a$ se nazývá sudé, existuje-li $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby $a = 2k$. V opačném případě se číslo $a$ nazývá liché.

4.3.1. Dokažte že pro $\forall a \in \mathbb{Z}$, je-li $a$ liché, potom $a^2$ je liché.

4.3.2. Najděte chybu v následujícím důkazu. Ukážeme, že 13 je prvočíslo. Předpokládejme, že všechna lichá čísla jsou prvočísla. Protože $13 = 2 \cdot 6 + 1$ je liché číslo, tak 13 je prvočíslo.

4.3.3. Najděte chybu v následujícím důkazu. Mějme výrok $V$, který říká $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > x$. Protože jistě $0 > -1$, tak přičtením $x$ dostaneme $x > x - 1$. Nyní z nerovností $x^2 > x > x - 1$ dostaneme $x^2 > x - 1$. Nerovnice $x^2 - x + 1 > 0$ má řešení pro všechna reálná čísla (vyřešte si podrobně sami), proto náš předpoklad je pravdivý pro všechna reálná čísla.

4.3.4. Najděte chybu v následujícím důkazu. Mějme celé číslo $a$. Jistě platí $a = a$. Umocněním předpokladu $a = a$ dostaneme $a^2 = a^2$, neboli $0 = a^2 - a^2 = (a + a)(a - a)$. Nyní $0 \cdot (a - a) = 0 = (a + a)(a - a)$ a zkrácením výrazem $a - a$ dostaneme $a + a = 0$, tj. $a = -a$.

4.3.5. Najděte chybu v následujícím důkazu. Mějme celá čísla $a, b$. Pokud platí $a = b$, tak umocněním dostaneme $a^2 = b^2$, neboli $0 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Nyní zkrácením výrazem $a - b$ dostaneme $0 = a + b$, tj. $a = -b$.

4.3.6. Dokažte že pro $\forall a \in \mathbb{Z}$, je-li $a^2$ liché, potom $a$ je liché.

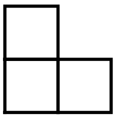
## 4.4 Princip matematické indukce

4.4.1. Dokažte matematickou indukcí, že součet prvních $n$ lichých čísel je $n^2$.

4.4.2. Dokažte kombinatoricky (jinak než přímo nebo indukcí), že součet prvních $n$ lichých čísel je $n^2$.

4.4.3. Dokažte přímo (jinak než indukcí nebo kombinatoricky), že součet prvních $n$ lichých čísel je $n^2$.

4.4.4. Máme šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n$ políček ($n \geq 1$), na které chybí jedno (libovolné) políčko. K dispozici máme neomezený počet dílků, z nich každý sestává ze tří políček šachovnice ve tvaru L. Ukažte, že šachovnici je možno pokrýt dílky tak, aby se žádné dílky nepřekrývaly a přitom byla celá šachovnice (až na chybějící políčko) pokrytá.



Obrázek 4.1: *Dílek se třemi políčky šachovnice ve tvaru L.*

4.4.5. Ukažte, že každé poštovné větší nebo rovno 12 Kč může být zaplaceno užitím známek v hodnotě 4 Kč a 5 Kč.

4.4.6. Dokažte, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
Základ indukce: Pro $i = 1$ je tvrzení snadné:

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1}{6}1(1+1)(2+1).$$

Indukční krok: Dále předpokládáme platnost pro $1, 2, \ldots, n$, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Pro $n + 1$ chceme ukázat, že platí

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).$$

Pro $n + 1$ dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).$$

4.4.7. Dokažte $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \binom{n+1}{2}^2$.

4.4.8. Najděte chybu v následujícím důkazu. Indukcí podle $n$ dokážeme, že každých $n$ čísel je sobě rovných: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Pro $n = 1$ jistě platí $x_1 = x_1$. Nechť tvrzení platí pro obecné $n$. Ukážeme, že platí i pro $n+1$ čísel: $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Dle indukčního předpokladu je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, a současně $x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1}$. Nyní z tranzitivity rovnosti vyplývá $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1}$.

4.4.9. Najděte chybu v následujícím důkazu. Indukcí podle $n$ dokážeme, že každých $n \geq 2$ různoběžných přímek má právě jeden společný bod. Pro $n = 2$ tvrzení jistě platí: dvě různoběžky $p_1$ a $p_2$ mají společný právě jeden bod. Nechť tvrzení platí pro $n$ přímek. Ukážeme, že platí i pro $n+1$ přímek: $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$. Dle indukčního předpokladu mají přímky $p_1, p_2, \ldots, p_n$ jediný společný bod, a současně přímky $p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ mají jediný společný bod. Označíme $P$ společný bod přímek $p_2$ a $p_3$. Podle indukčního předpokladu je tento bod společný pro prvních $n$ přímek i pro posledních $n$ přímek a je proto společný pro všech $n+1$ přímek.

4.4.10. Ukažte, že každé poštovné nebo rovno $(h_1-1)(h_2-1)$ Kč může být získáno užitím známek v hodnotě $h_1$ Kč a $h_2$ Kč.

4.4.11. Dokažte Bernoulliho nerovnost: Pro každé přirozené $n$ a reálné $x > -1$ platí nerovnost $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

4.4.12. Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$

4.4.13. Ukažte matematickou indukcí, že pro každé přirozené číslo $n$ platí rovnost $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

4.4.14. Ukažte matematickou indukcí, že pro všechna přirozená čísla platí nerovnost $a_n \leq 2^{n-1}$, kde $a_n$ je $n$-tý člen posloupnosti určené rekurentně: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ a pro $n \geq 4$ je $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$.

## 4.5 Vztahy s kombinačními čísly

4.5.1. Upravte výraz $\binom{2n}{n-2} + \binom{2n}{n+3}$ na jediné kombinační číslo.

4.5.2. Upravte výraz $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4}$ na jediné kombinační číslo.

4.5.3.* Upravte výraz $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i}$ na jediné kombinační číslo.

4.5.4. Pro jaká $n$ platí $C(n-1,3) + C(n+2,3) + 10 = P(n,3)$?

4.5.5. Ukažte, že platí
$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

4.5.6. Ukažte, že platí
$$\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} = n^3$$

4.5.7. Zdůvodněte (kombinatoricky, bez výpočtu kombinačních čísel), že platí
$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

4.5.8.* Sečtěte $1 + 2\binom{n}{1} + \cdots + (k+1)\binom{n}{k} + \cdots + (n+1)\binom{n}{n}$.

4.5.9.* Ukažte, že platí
$$\binom{n}{1} + 3\binom{n}{3} + 5\binom{n}{5} + \cdots = 2\binom{n}{2} + 4\binom{n}{4} + 6\binom{n}{6} + \cdots$$

4.5.10. Vypočítejte
$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

4.5.11. Vypočítejte $\sum_{k=1}^{n} (k^2+1)k!$

4.5.12. Vypočítejte $\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} k(k+1)!$

4.5.13. Vypočítejte $\sum_{i=0}^{k} \binom{2n-k}{n-i}\binom{k}{i}$ kde $k \le n$

## 4.6 Důkazy počítáním

4.6.1. Existují na VŠB–TUO dva studenti se stejným posledním čtyřčíslím rodného čísla?

4.6.2. Ukažte, že na Zemi žijí dva lidé se stejným počtem vlasů.

4.6.3. V místnosti je $n$ lidí. Každý z nich má v místnosti několik známých (třeba i žádného). Předpokládáme, že relace „mít známého“ je symetrická. Ukažte, že někteří dva lidé mají v místnosti stejný počet známých.

4.6.4. Máte 4 různá čísla od 1 do $n$ ($n \ge 4$). Ukažte, že některá dvě dávají sudý součet. Kolik nejméně čísel zaručí sudý součet?

4.6.5. Máte 4 různá čísla od 1 do $n$ ($n \ge 4$). Ukažte, že na rozdíl od Příkladu 4 nemusí žádná dvě dávat lichý součet.

4.6.6. Máte $k$ různých čísel od 1 do $n$ ($n \ge k \ge 2$). Pro jaké nejmenší $k$ máme zaručeno, že některá dvě dávají lichý součet.

4.6.7. Na čtrnáctidenní dovolenou jelo 20 lidí. Každé odpoledne hrají stolní tenis. U každého ze dvou stolů se hraje postupně šest zápasů, vždy proti sobě hrají dva hráči. Ukažte, že někteří dva lidé spolu během celé dovolené nehráli.

4.6.8. V Plzni se v městský dopravních prostředcích štípají lístky. Po Plzni jezdí 150 tramvají, 90 trolejbusů a 120 autobusů. Ukažte, že pokud se štípe vždy 3, 4 nebo 5 políček z devíti, tak musí být v některých vozech stejné kombinace.

4.6.9.* Ukažte, že vyřízneme-li z šachovnice dva protilehlé rohy, potom není možné šachovnici pokrýt dominovými kostkami.

4.6.10.* Ze šachovnice odebereme dvě políčka různé barvy. Ukažte, že je možno pokrýt dominem.

4.6.11. Ukažte, že neexistuje univerzální bezztrátový kompresní algoritmus, tj. taková kompresní funkce, která libovolnou posloupnost $n$ bajtů zkompresuje na posloupnost délky menší než $n$.

## 4.7 Příklady k procvičení

4.7.1. Dokažte, že pro každé přirozené $n$ je číslo $n^3 - n$ dělitelné šesti.

4.7.2. Dokažte, že platí
$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n-1}{r} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

4.7.3. Dokažte, že pro všechna přirozená $n \ge 1$ platí
$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) \cdot 3^i = (n-1) \cdot 3^{n+1} + 3.$$

4.7.4. Najděte všechna řešení nerovnice $\binom{n}{2} > \binom{n}{3}$.

4.7.5.* Dokažte, že platí
$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

4.7.6. Ukažte, že aritmetický průměr dvou nezáporných reálných čísel je nejvýše roven geometrickému průměru, tj. $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$.

4.7.7. Ukažte, že při hodu $n \geq 1$ kostkami je stejná pravděpodobnost, že součet bude sudý nebo lichý.

4.7.8. Ukažte, že počet všech zobrazení $m$ prvkové množiny do $n$ prvkové je $n^m$.

4.7.9. Ukažte, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo.

4.7.10. Hra *Tic-tac-toe* je hra s tužkou a papírem pro dva hráče X a O, kteří střídavě zapisují křížky a kolečka do čtvercové sítě políček $3 \times 3$, viz Cvičení 2.3.35.

a) Existuje vítězná strategie pro prvního hráče? Pokud ano, najděte ji, pokud ne, dokažte to.

b) Existuje vítězná strategie pro druhého hráče, jestliže první tah prvního hráče nesmí být na prostřední pole? Pokud ano, najděte ji, pokud ne, dokažte to.

4.7.11. Ukažte indukcí, že $k$ kružnic dělí povrch koule na nejvýše $k^2 - k + 2$ částí.

4.7.12. Ukažte přímo, že $k$ kružnic dělí povrch koule na nejvýše $k^2 - k + 2$ částí.

4.7.13. Máme řetěz s $n$ očky v řadě. Najděte a dokažte jaký je nejmenší počet oček řetízku, které je třeba cviknout, aby potom bylo možno bez dalšího cviknutí odpočítat (ne nutně spojit) libovolný počet oček od 1 do $n$.

4.7.14. Ukažte, že pro libovolných $n + 1$ přirozených čísel z množiny $[1, 2n]$ existují taková dvě čísla, že jedno je násobek druhého.

4.7.15. Matematickou indukcí ukažte, že pro každé celé číslo $n \geq 3$ existuje $n$ takových *různých* přirozených čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ že rovnice $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1$.

4.7.16. Ukažte, že $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$.

4.7.17. Z aritmetické posloupnosti $1, 4, 7, 10, \ldots, 100$ vybereme libovolně 19 členů. Dokažte, že mezi nimi existují dvě čísla, jejichž součet je 104.

4.7.18. Ukažte, že v množině libovolných $k+1$ celých čísel existuje alespoň jedna dvojice čísel, jejichž rozdíl je dělitelný číslem $k$.

4.7.19. Je daných 33 čísel, jejichž prvočíselné dělitele jsou z množiny $\{2, 3, 5, 7, 11\}$. Dokažte, že můžeme z nich vybrat dvě taková čísla, že jejich součin je čtverec.

# 5 Relace a zobrazení

Připomeňme některé vlastnosti (binární) relací na množině $A$. Navíc zavedeme i některé nové pojmy.

- *reflexivní* pokud $\forall x \in A : (x, x) \in R$,
- *ireflexivní* pokud $\forall x \in A : (x, x) \notin R$,
- *symetrická* pokud $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$,
- *antisymetrická* pokud $\forall x, y \in A : (x, y), (y, x) \in R \Rightarrow x = y$,
- *asymetrická* pokud $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$,
- *tranzitivní* pokud $\forall x, y, z \in A : (x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$,
- *lineární* (*úplná*) pokud $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$.

Podrobněji si o relacích a permutacích můžete přečíst ve skriptech [ZDM].

## 5.1 Motivační příklady

Na první pohled se může pojem relace, který je zaveden jako podmnožina kartézské mocniny (kartézského součinu), zdát nezajímavý. Zkuste si však spočítat, kolik různých relací na konečné množině je možno definovat. Uvidíme, že formalizace pojmu relace je nezbytná i pro velmi malé množiny (na čtyřech, na deseti prvcích), neboť relací je příliš mnoho na to, abychom mohli všechny vypsat.

5.1.1.$^{\heartsuit}$ Kolik existuje relací na konečné $n$ prvkové množině $X$?

5.1.2. Máme stroječek na míchání karet. Když do stroječku vložíme seřazený balíček karet v pořadí $1, 2, \ldots, 32$, balíček zamíchá tak (udělá takovou permutaci karet), že vloží sudé karty mezi liché. Dostaneme pořadí $1, 17, 2, 18, 3, 19, \ldots, 16, 32$. Jaký je řád permutace, neboli po kolika nejméně opakovaných mícháních dostaneme opět seřazený balíček?

5.1.3. Nápověda při hledání geokeší (geocaching.cz) bývá často zašifrována následující jednoduchou šifrou:

```
A|B|C|D|E|F|G|H|I|J|K|L|M
-------------------------
N|O|P|Q|R|S|T|U|V|W|X|Y|Z
(písmena nad čarou odpovídají písmenům pod čarou a naopak)
```

Popište tuto šifru pomocí relace $g$. Jaký je řád relace $g$? Jak se liší permutace pro zašifrování a dešifrování nápovědy?

5.1.4. Patnácka, známá také jako Loydova patnáctka[1], je hlavolam, který obsahuje patnáct kamenů s čísly 1 až 15. Kameny máme za úkol seřadit posouváním kamenů.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

Obrázek 5.1: *Loydova patnáctka.*

a) Ukažte, že není možné u klasické *patnáctky* posouváním sestavit čísla tak, aby byla prohozena dvě sousední čísla.

b) Kolik existuje různých rozmíchání hlavolamu *patnáctka* (užitím legálních tahů) s prázdným políčkem v pravém dolním rohu?

[1] Loydova patnáctka se nazývá podle jejího popularizátora Sama Loyda. Loyd vypsal odměnu $1000 tomu, kdo jako první úkol vyřeší. Loyd věděl, že úloha nemá řešení a na prodeji hlavolamu vydělal nemalé peníze.

## 5.2 Pojem relace

5.2.1. Kolik existuje relací na konečné $n$ prvkové množině, které jsou

a) symetrické?

b) antisymetrické?

c) asymetrické?

5.2.2. Kolik existuje relací na konečné $n$ prvkové množině $X$ takových, které jsou symetrické i antisymetrické současně?

5.2.3. Jaké vlastnosti má relace $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,1)\}$ definovaná na množině $A = \{1,2,3\}$?

5.2.4. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

a) Relace, která není symetrická, je antisymetrická.

b) Relace, která není antisymetrická, je symetrická.

c) Relace, která není symetrická, je asymetrická.

d) Relace, která je asymetrická, je antisymetrická.

e) Relace, která je antisymetrická, je asymetrická.

f) Relace je asymetrická, právě když je antisymetrická a ireflexivní.

g) Relace, pro kterou platí $\forall x, y \in A : ((x,y) \in R \wedge (y,x) \notin R) \vee ((x,y) \notin R \wedge (y,x) \in R)$, je antisymetrická.

h) Relace, která je symetrická i antisymetrická, je také reflexivní.

i) Relace, která je lineární, je také reflexivní.

5.2.5.$^{\heartsuit}$ Sestavte na množině $\{1,2,3,4\}$ relace

a) rovnosti $R$,

b) menší $<$,

c) menší nebo rovno $\leq$.

5.2.6. Jaké vlastnosti má relace $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,1)\}$ definovaná na množině $A = \{1,2,3,4\}$?

5.2.7. Jaké vlastnosti má relace $R = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ na množině $A = \{1,2,3,4\}$?

5.2.8. Jaké vlastnosti má relace soudělnosti $R$ na $N$ (dva prvky jsou v relaci, jestliže jejich největší společný dělitel je větší než 1)?

5.2.9. Může na konečné množině existovat relace, která

a)$^{\heartsuit}$ je symetrická i antisymetrická?

b)$^{\heartsuit}$ není symetrická ani antisymetrická?

c) není symetrická ani asymetrická?

d) je symetrická i asymetrická?

e) není symetrická, antisymetrická ani asymetrická?

5.2.10. Je relace dělitelnosti na $\mathbb{Z}$ antisymetrická?

### 5.3 Uspořádání a ekvivalence

5.3.1. Nakreslete hasseovský diagram relace podmnožin množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Najděte všechny minimální, maximální, největší a nejmenší prvky.

5.3.2. Sestavte relaci $R_\equiv$ kongruence podle modulu 4 na množině $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Je $R_\equiv$ relací ekvivalence? Pokud ano, sestavte třídy rozkladu.

5.3.3. Vezmeme systém všech tříprvkových podmnožin množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Definujeme relaci $X\rho Y$, jestliže mají stejný největší prvek. Ověřte, zda se jedná o ekvivalenci. Pokud ano, kolik má tříd rozkladu a která třída má nejvíce prvků?

5.3.4. Máme dánu množinu $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ s relací dělitelnosti $|$.

a) Nakreslete hasseovský diagram relace $|$ na množině $A$. Najděte všechny minimální, maximální, největší a nejmenší prvky.

b) Jaký prvek $a \in \mathbb{N}$ je třeba přidat do $A$, aby relace dělitelnosti měla nejmenší prvek?

c) Jaký prvek $a \in \mathbb{N}$ stačí přidat do $A$, aby relace dělitelnosti měla největší prvek?

d) Jaký *nejmenší* prvek $a \in \mathbb{N}$ je třeba přidat do $A$, aby relace dělitelnosti měla největší prvek?

e) Jaké *nejmenší* číslo $a \in \mathbb{Z}$ stačí přidat do $A$, aby relace dělitelnosti měla největší prvek?

5.3.5. Popište všechny relace na množině $A$, které jsou současně relacemi ekvivalence i uspořádáním.

5.3.6. Mějme $R$ a $S$ libovolné relace ekvivalence na množině $A$. Které následující relace jsou také nutně ekvivalence?

a) $R \cap S$

b) $R \cup S$

c) $R \setminus S$

5.3.7. Mějme $R$ a $S$ libovolné relace částečného uspořádání na množině $A$. Které následující relace jsou také nutně částečného uspořádání?

a) $R \cap S$

b) $R \cup S$

c) $R \setminus S$

5.3.8. Kolik uspořádaných dvojic na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ patří do relace

a)$^\heartsuit$rovnosti?

b) menší?

5.3.9. Kolik uspořádaných dvojic na množině $A = [1, n]$, kde $1 \leq n \in \mathbb{N}$, patří do relace

a) rovnosti?

b) menší?

5.3.10. Je relace dělitelnosti relací částečného uspořádání

a) na $\mathbb{N}$?

b) na $\mathbb{Z}$?

c) na $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{N} \wedge a < b$?

5.3.11. Má smysl kreslit hasseovský diagram relace $R$, kde pro dva různé prvky platí $(x, y) \in R$ a $(y, x) \in R$?

## 5.4 Funkce a zobrazení

5.4.1. Rozhodněte, zda následující funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou injekce, surjekce, bijekce nebo žádná z nich.

a) $f : y = x^4$

b) $g : y = \ln x$

c) $h : y = e^x$

d) $k : y = \operatorname{tg} x$

e) $k : y = \operatorname{arctg} x$

f) $l : y = x^3 - x$

g) $m : y = (x-1)^3$

5.4.2. Najděte příklad funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je

a) injekce, ale není surjekcí

b) surjekce, ale není injekcí

c) (netriviální) bijekce

5.4.3. Najděte příklad funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která je

a) injekce, ale není surjekcí

b) surjekce, ale není injekcí

c) (netriviální) bijekce

5.4.4. Je-li $g \circ f$ surjekce,

a) musí být $g$ surjekce?

b) musí být $f$ surjekce?

5.4.5. Je-li $g \circ f$ prostá,

a) musí být $g$ prostá?

b) musí být $f$ prostá?

5.4.6. Je-li $g \circ f$ prostá, musí být $g$ prostá? Musí být $f$ prostá?

5.4.7. Ukažte, že přirozených čísel i celých čísel je stejně, tj. že platí $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

## 5.5 Skládání zobrazení a permutace

5.5.1. Ukažte, že zobrazení $\rho$ přiřazující číslu $x$ z množiny $\{0, 1, \ldots, 6\}$ číslo $3 \cdot x \bmod 7$ je permutace (zbytek čísla $3x$ po dělení 7). Zapište permutaci $\rho$ pomocí a) matice, b) pomocí cyklů. Jaký je řád této permutace?

5.5.2. Pro permutaci $R$ na množině $A$ definujeme symbol $R^n$ takto: $R^1 = R$, $R^{n+1} = R \circ R^n$.

a) Ukažte, že je-li $A$ konečná množina, tak musí existovat taková $r, s \in \mathbb{N}$, $r < s$, že platí $R^r = R^s$.

b) Najděte takovou permutaci $R$ na konečné množině $A$, že $R^{r+1} \neq R^r$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

5.5.3. Určete řád permutace $\sigma$, je-li

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 1 & 3 & 5 & 9 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 4 & 2 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

5.5.4. Najděte inverzní permutaci $\pi^{-1}$, je-li

a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\pi = (147)(2685)(3)$

d) $\pi = (13742685)$

5.5.5. Kolik existuje permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ s jediným cyklem?

5.5.6. Najděte složenou permutaci $\sigma \circ \pi$, je-li

a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\pi = (134)(2675)$, $\sigma = (136)(47)(25)$

e) $\pi = (1243)(675)$, $\sigma = (1342)(576)$

5.5.7. Jakého nejvyššího řádu najdete permutaci na množině $A$, je-li

a) $A = [1, 9]$

b) $A = [1, 10]$

c) $A = [1, 13]$

5.5.8. Máme dánu permutaci $\pi = (17485)(263)$. Určete $\underbrace{\pi \circ \pi \circ \ldots \circ \pi}_{542 \text{ krát}}$

5.5.9.* Máme stroječek na míchání karet. Navrhněte takovou permutaci karet, aby počet různých rozmíchání, která dostaneme opakováným použitím stroječku byl co největší.

5.5.10.** Máme stroječek na míchání karet. Když do stroječku vložíme seřazený balíček karet v pořadí $1, 2, \ldots, n = 2t$, balíček zamíchá tak (udělá takovou permutaci karet), že na sudé pozice po řadě vmíchá karty z druhé poloviny. Dostaneme pořadí $1, t+1, 2, t+2, 3, 19, \ldots, t, 2t$. Jaký je řád permutace, neboli po kolika nejméně opakovaných mícháních dostaneme opět seřazený balíček?

5.5.11.** Máme stroječek na míchání karet. Když do stroječku vložíme seřazený balíček karet v pořadí $1, 2, \ldots, n$, balíček zamíchá tak (udělá takovou permutaci karet), že vloží sudé karty mezi liché. Dostaneme pořadí $1, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, 2, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, 3, 19, \ldots, n, \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Jaký je řád permutace, neboli po kolika nejméně opakovaných mícháních dostaneme opět seřazený balíček?

5.5.12. Označme $r(n)$ funkci, která každému číslu $n$ přiřadí největší řád permutace na $n$-prvkové množině. Ukažte, že $r(n)$ je neklesající funkce.

5.5.13. Je dána permutace $\rho$ a známe složenou permutaci $\sigma \circ \rho$. Můžete určit, jak vypadá permutace $\sigma$?

5.5.14. Jsou dány dvě permutace $\rho$ a $\sigma$. Můžete určit, jak vypadá každá permutace $\rho$ a $\sigma$, jetliže víte, jak vypadá $\rho \circ \sigma$ a $\sigma \circ \rho$?

## 5.6 Příklady k procvičení

5.6.1. Najděte příklad dvojice takových tranzitivních relací $R_1$ a $R_2$, že a) $R_1 \cup R_2$, b) $R_1 \setminus R_2$ ani c) $R_1 \Delta R_2$ tranzitivní nejsou.

5.6.2. Máme množinu $X = \{(x, y) \colon a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. Ukažte, že relace $R$ definovaná tak, že $(a, b)R(c, d)$ právě tehdy, když $ad = bc$ je relací ekvivalence na množině $X$. Jakou známou množinu tvoří třídy ekvivalence?

5.6.3. Máme dva stroječky na míchání karet: jeden dělá vždy permutaci $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 7 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, druhý vždy permutaci $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 7 & 1 & 3 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Budeme střídavě míchat $\alpha$, $\beta$, $\alpha$, …Kolik různých rozmíchání dostaneme?

5.6.4. Ukažte, že hasseovský diagram nemůže obsahovat trojúhelník.

# 6 Princip inkluze a exkluze

Podrobněji si o principu inkluze a exkluze můžete přečíst ve skriptech [ZDM].

## 6.1 Užití principu inkluze a exkluze

6.1.1. Kolik čísel zůstane v množině čísel $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ po vyškrtání všech násobků $2, 3, 5$?

6.1.2. Kolik čísel zůstane v množině čísel $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ po vyškrtání všech násobků $2, 3, 5, 7$?

6.1.3. Kolika způsoby je možno vybrat pět karet z balíčku 52 karet tak, aby mezi nimi byla od každé barvy alespoň jedna karta?

6.1.4. Na večírku se sešly 3 manželské páry. Kolika různými způsoby lze posadit těchto 6 lidí kolem kulatého stolu tak, aby manželé neseděli vedle sebe?

6.1.5. Na večírku se sešly 4 manželské páry. Kolika různými způsoby lze posadit těchto 8 lidí kolem kulatého stolu tak, aby manželé neseděli vedle sebe?

6.1.6.* Na večírku se sešlo $n$ manželských párů. Kolika různými způsoby lze posadit těchto $2n$ lidí kolem kulatého stolu tak, aby manželé *neseděli* vedle sebe? Ve dvou rozdílných rozesazeních má některý člověk jiného souseda po levé nebo po pravé ruce.

6.1.7.* Na plese se sešlo $n$ manželských párů. Kolika různými způsoby může spolu tančit vždy všech $2n$ lidí tak, aby žádný manželský pár netančil spolu?

6.1.8.* (Problém šatnářky) Na shromáždění přišlo $n$ hostů, všichni v kloboucích, a odloží si své klobouky do šatny. Při odchodu dostávají své klobouky náhodně. Jaká pravděpodobnost, že žádný pán nedostane svůj klobouk zpět?

6.1.9. Na shromáždění přišlo 5 hostů, všichni v kloboucích, a odloží si své klobouky do šatny. Při odchodu dostávají své klobouky náhodně. Jaká pravděpodobnost, že žádný pán nedostane svůj klobouk zpět?

6.1.10. Máme dva zamíchané balíčky 32 karet. Z každého obrátíme shora vždy jednu kartu. Jaká je pravděpodobnost, že nikdy nebudou vytaženy dvě stejné karty?

6.1.11. Kolika způsoby rozmístíme $r$ objektů do pěti schránek tak, aby alespoň jedna byla prázdná?

6.1.12. Kolik existuje $n$ prvkových posloupností čísel $0, 1, \ldots, 9$ takových, které obsahují vždy čísla $1, 2$ a $3$? Čísla se mohou opakovat.

## 6.2 Příklady k procvičení

6.2.1. Kolik nul na konci má

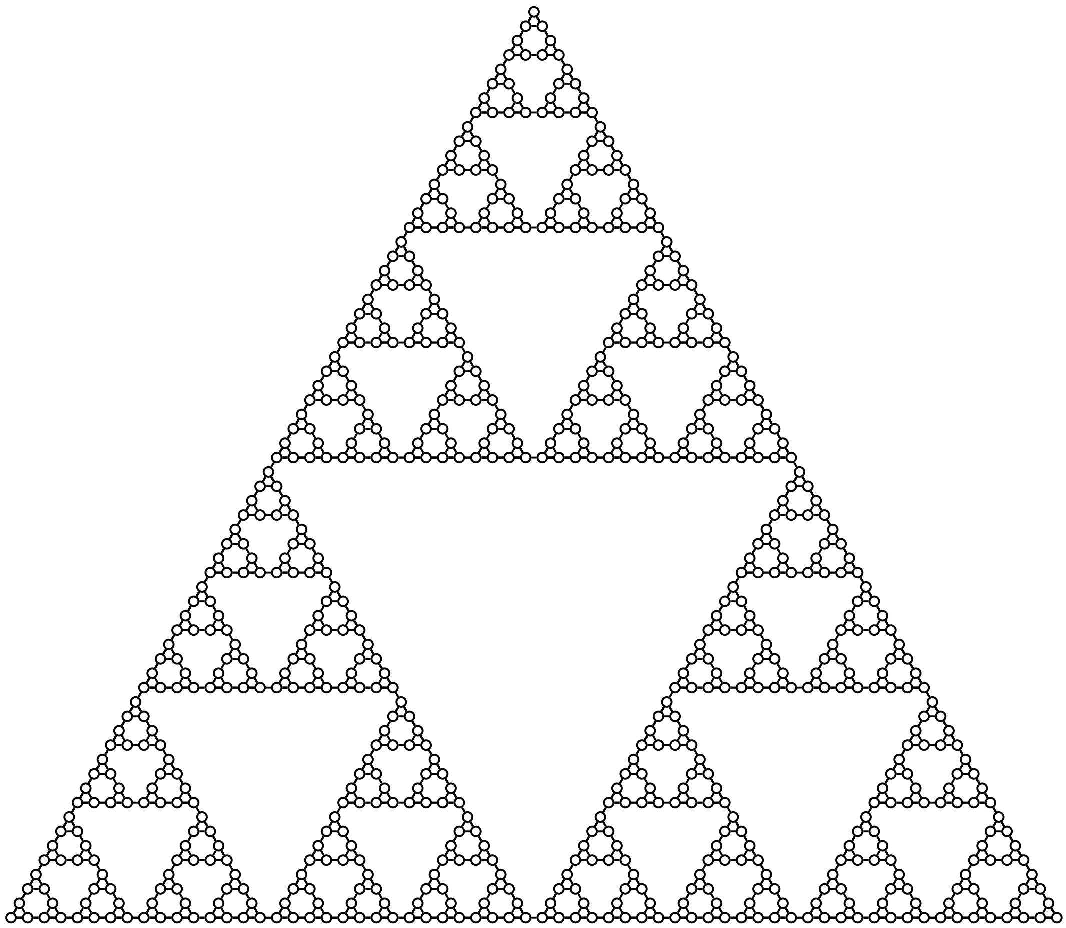
a) číslo $50!$?

b) číslo $1234!$?

6.2.2. Pomocí vhodné kombinatorické interpretace a použitím principu inkluze a exkluze spočítejte nasledující sumu pro $n, m, j$ přirozená taková, že $n \geq j \geq (m+n)$, t.j. vyjádřete tuto sumu jako nějaký výraz, který už bude bez sumy:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{m+n-i}{j-i}$$

## Část II
# Úvod do teorie grafů



Stavový graf hlavolamu „hanojské věže“.

# 1 Pojem grafu

Základní grafové pojmy jsou podrobně zavedeny ve skriptech [UTG].

## 1.1 Motivační příklady

1.1.1. Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal.

1.1.2. Máme 6 házenkářských týmů, které mají odehrát 15 zápasů, každý s každým. Je možné odehrát celý turnaj během pěti hracích dnů, kdy probíhají současně vždy 3 zápasy?

1.1.3. Máme 7 házenkářských týmů, které mají odehrát 21 zápasů, každý s každým. Ukažte, že není možné odehrát celý turnaj během šesti hracích dnů, kdy probíhají současně vždy 3 zápasy.

## 1.2 Základní třídy grafů

1.2.1.$^\heartsuit$ Nakreslete graf $G = (V, E)$, je-li dáno

a) $V = \{a, b, c, d\}$ a $E = \{ab, ac, ad\}$.

b) $V = \{k, l, m, n, o\}$ a $E = \{kl, mn, mo, ln, ko\}$.

c) $V = \{k, l, m, n, o, p\}$ a $E = \{kl, mn, mp, lo, ok, np\}$.

d) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ a $E = \{12, 13, 14, 25, 26, 57, 68\}$

1.2.2.$^\heartsuit$ Kolik hran a kolik vrcholů má $P_n$ (dle značení ve skriptech [UTG])?

1.2.3.$^\heartsuit$ Kolik hran a kolik vrcholů má $K_n$?

1.2.4.$^\heartsuit$ Kolik hran a kolik vrcholů má $K_{m,n}$?

1.2.5.$^\heartsuit$ Srovnejme grafy $K_{6,7}$ a $K_{10}$.

a) Který má více vrcholů?

b) Který má více hran?

1.2.6.$^\heartsuit$ Srovnejme grafy $K_{5,12}$ a $K_{12}$.

a) Který má více vrcholů?

b) Který má více hran?

1.2.7. Pro jaké $n$ je $K_n$ cyklem?

## 1.3 Stupně vrcholů v grafu

1.3.1. Jaký je největší a nejmenší stupeň vrcholu v grafu

a) $P_n$

b) $C_n$?

c) $K_n$?

d) $K_{m,n}$?

1.3.2.$^\heartsuit$ Napište stupňovou posloupnost grafu

a) $P_5$,

b) $C_4$,

c) $K_4$,

d) $K_{3,2}$.

1.3.3. Kolik existuje různých grafů na $n$ vrcholech. Rozlišujeme pojmenování vrcholů, tj. například pro $V = \{1, 2, 3\}$ rozlišíme grafy s $E_1 = \{12\}$ a s $E_2 = \{23\}$.

1.3.4. Kolik existuje různých bipartitních grafů na $m + n$ vrcholech. Rozlišujeme pojmenování vrcholů!

1.3.5. Pro jaké $n$ je $K_n$ cestou?

1.3.6. Pro jaké $n$ je $K_{m,n}$ cyklem?

1.3.7. Pro jaké $m, n$ je $K_{m,n}$ cestou?

1.3.8.$^\heartsuit$ Kolik hran má graf

a) s deseti vrcholy stupně 5?

b) s 11 vrcholy stupně 5?

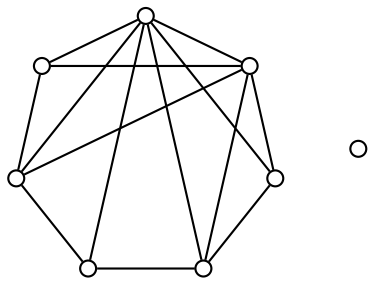
c) se stupňovou posloupností $(1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7)$

d) se stupňovou posloupností $(1, 1, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7)$

e) se stupňovou posloupností $(1, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7)$

1.3.9. Kolik vrcholů má graf, který má 15 hran, 3 vrcholy stupně 4 a zbývající vrcholy stupně 3?

1.3.10. Určete stupňovou posloupnost grafu $G$ na Obrázku 1.1. Je to jediný graf s touto stupňovou posloupností?



Obrázek 1.1: *Graf G*.

1.3.11. Nakreslete graf se stupňovou posloupností

a)$^\heartsuit$ $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$

b) $(1, 1, 1, 2, 2, 5)$

c) $(0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4)$

d) $(2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5)$

e) $(1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7)$

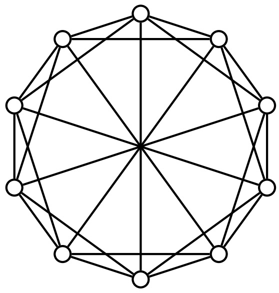
f)$^\heartsuit$ $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 5)$

g)$^\heartsuit$ $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 5)$

h) $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 5)$

1.3.12. Najděte velikost největší nezávislé množiny vrcholů v grafu $K_{5,5}$.

1.3.13. Najděte velikost největší nezávislé množiny vrcholů v grafu na Obrázku 1.2.



Obrázek 1.2: *Cirkulant* $C_{10}(1, 2, 5)$.

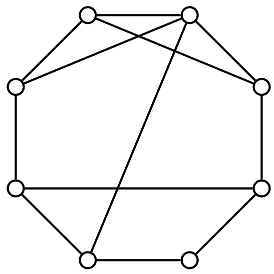
## 1.4 Podgrafy

Mějme dána kladná celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Cirkulantem $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ rozumíme graf $G = (V, E)$ na $n$ vrcholech $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$, kde hranová množina je

$$E = \{v_i v_{(i+a_j) \bmod n} : 0 \le i \le n-1 \wedge 1 \le j \le k\}.$$

Příklad cirkulantu $C_{10}(1, 2, 5)$ je na Obrázku 1.8.

1.4.1. Mějme graf $G$ na Obrázku 1.3.



Obrázek 1.3: *Graf G*.

a)$^\heartsuit$ Jaký je nejdelší cyklus obsažený jako podgraf v grafu $G$?

b)$^\heartsuit$ Jaký je nejkratší cyklus obsažený jako podgraf v grafu $G$?

c)$^\heartsuit$ Jaká je nejdelší cesta obsažená jako podgraf v grafu $G$?

d)$^\heartsuit$ Jaký je nejkratší indukovaný cyklus v grafu $G$?

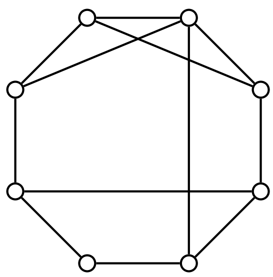
e)* Jaký je nejdelší indukovaný cyklus v grafu $G$?

f)* Jaká je nejdelší indukovaná cesta v grafu $G$?

g) Jaká je velikost největší nezávislé množiny vrcholů grafu $G$?

h) Existuje nějaký neisomorfní graf se stejnou stupňovou posloupností?

i) Ukažte, že graf $G''$ na Obrázku 1.4 je isomorfní s grafem $G$.



Obrázek 1.4: *Graf $G''$ se stupňovou posloupností* $(2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4)$.

1.4.2. Mějme grafy $G$ a $H$ na Obrázku 1.5.


Obrázek 1.5: *Grafy $G$ a $H$.*

a) Jaká je nejdelší indukovaná cesta v grafu $G$?

b) Jaký je nejdelší indukovaný cyklus v grafu $G$?

c) Jaká je nejdelší indukovaná cesta v grafu $H$?

d) Jaký je nejdelší indukovaný cyklus v grafu $H$?

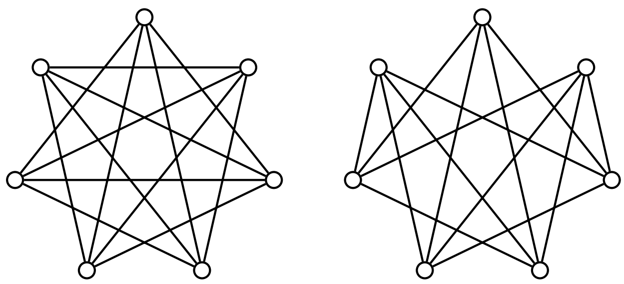
## 1.5 Isomorfismus grafů

1.5.1. Kolik existuje neisomorfních 2-pravidelných grafů

a) na 5 vrcholech?

b) na 6 vrcholech?

1.5.2. Jsou isomorfní grafy $K_7 - C_7$ a $K_7 - (C_3 \cup C_4)$?

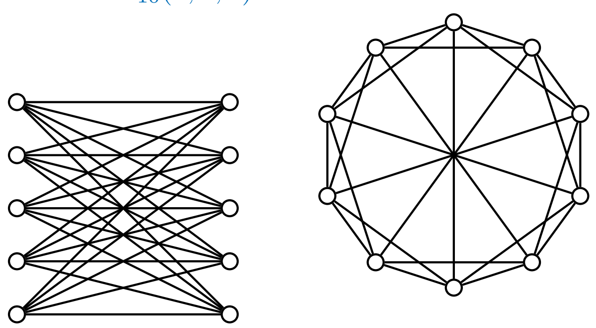


Obrázek 1.6: *Grafy $K_7 - C_7$ a $K_7 - (C_3 \cup C_4)$.*

1.5.3. Jsou následující dva grafy $G$ a $H$ isomorfní?

Obrázek 1.7: *Grafy $G$ a $H$.*

1.5.4. Jsou isomorfní $K_{5,5}$ a cirkulant $C_{10}(1, 2, 5)$ na Obrázku 1.8?



Obrázek 1.8: *Kompletní bipartitní graf $K_{5,5}$ a cirkulant $C_{10}(1, 2, 5)$.*

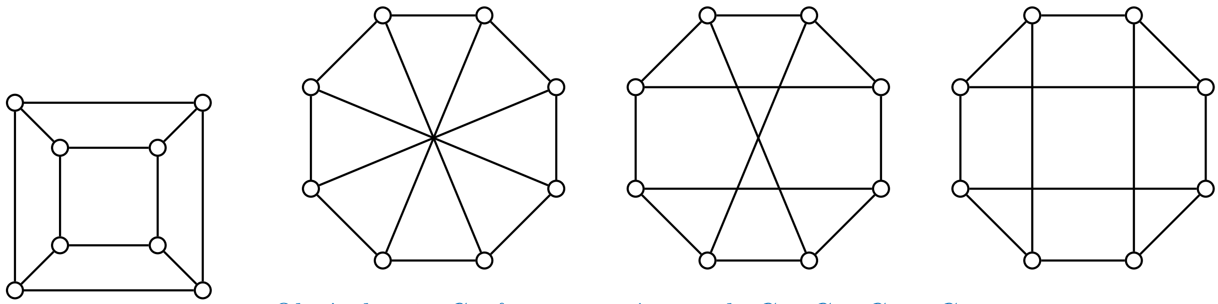
1.5.5. Kolik existuje neisomorfních 5-pravidelných grafů na osmi vrcholech?

1.5.6. Existují dva neisomorfní grafy se stupňovou posloupností

a) $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$? Najděte je nebo ukažte, že takové grafy neexistují.

b) $(2, 2, 3, 3)$? Najděte je nebo ukažte, že takové grafy neexistují.

1.5.7. Najděte mezi grafy $G_1$, $G_2$, $G_3$ a $G_4$ na Obrázku 1.9 všechny isomorfní dvojice. Pečlivě zdůvodněte.



Obrázek 1.9: *Grafy označené po řadě $G_1$, $G_2$, $G_3$ a $G_4$.*

1.5.8. Najděte všechny neisomorfní jednoduché grafy na čtyřech vrcholech.

## 1.6 Implementace grafů

1.6.1.* Naprogramujte algoritmus, jak rozmístit 8 královen na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovaly.

1.6.2. Naprogramujte algoritmus, který vygeneruje všechny grafy na $n$ vrcholech, jestliže rozlišujeme pojmenování vrcholů, tj. například pro $V = \{1, 2, 3\}$ rozlišíme grafy s $E_1 = \{12\}$ a s $E_2 = \{23\}$.

## 1.7 Příklady k procvičení

1.7.1.♡ Srovnejme grafy $K_{6,6}$ a $K_9$.

a) Který má více vrcholů?

b) Který má více hran?

1.7.2. Srovnejme grafy $K_{20,20}$ a $K_{29}$.

a) Který má více vrcholů?

b) Který má více hran?

1.7.3. Kolik hran a kolik vrcholů má $C_n$?

1.7.4. Pro jaké $m, n$ neobsahuje $K_{m,n}$ žádný cyklus?

1.7.5.♡ Kolik hran musíme odebrat z grafu $K_6$, abychom dostali $K_{3,3}$?

1.7.6. Pro která $n$ je následující stupňová posloupnost grafová?

a) $(1, 2, \ldots, n)$

b) $(0, 1, \ldots, n-1)$

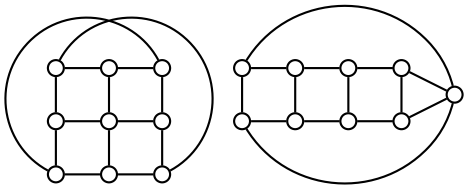
c) $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, n, n)$

1.7.7. Pro které hodnoty $n$ a $r$ existuje grafu na $n$ vrcholech, kde každý vrchol je stupně $r$? Dokažte.

1.7.8. Jsou grafy $K_{3,3}$ a cirkulant $C_6(1,3)$ isomorfní?

1.7.9. Jsou grafy $K_{4,4}$ a cirkulant $C_8(1,2)$ isomorfní?

1.7.10. Jsou následující dva grafy $G$ a $H$ isomorfní?



Obrázek 1.10: *Grafy $G$ a $H$.*

1.7.11.* Na jakém nejmenším počtu vrcholů najdete dva neisomorfní grafy se stejnou stupňovou posloupností?

1.7.12.* Strnulý graf má pouze triviální automorfismus. Najděte strnulý graf s co nejmenším počtem vrcholů.

1.7.13. Kolik existuje grafů se sedmi vrcholy stupně 2?

1.7.14. Kolik existuje grafů s deseti vrcholy stupně 2?

# 2 Souvislost grafu

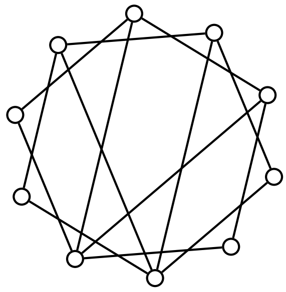
Souvislost grafu je zavedena ve skriptech [UTG].

## 2.1 Souvislost a komponenty grafu

2.1.1.[♡] Kolik komponent souvislosti má souvislý graf?

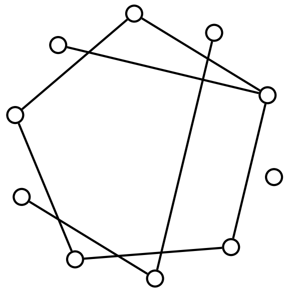
2.1.2.[♡] Kolik komponent souvislosti má nesouvislý graf?

2.1.3.[♡] Kolik komponent souvislosti má graf na Obrázku 2.1? Je souvislý?



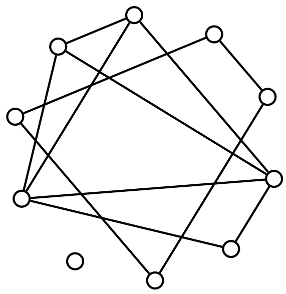
Obrázek 2.1: *Graf $G$.*

2.1.4. Kolik komponent souvislosti má graf $G$ na Obrázku 2.2? Je souvislý?



Obrázek 2.2: *Graf $G$.*

2.1.5.[♡] Kolik komponent souvislosti má graf na Obrázku 2.3? Je souvislý?



Obrázek 2.3: *Graf $G$.*

2.1.6. Kolik komponent souvislosti má cirkulant $C_{12}(3,6)$?

2.1.7. Kolik komponent má graf s deseti vrcholy stupně 5? Dokažte.

2.1.8. Kolik komponent může mít graf s deseti vrcholy a 25 hranami? Dokažte.

2.1.9. Kolik existuje různých grafů s deseti vrcholy, třemi komponentami a 25 hranami? Dokažte.

2.1.10.[♡] Kolik komponent má graf s patnácti vrcholy stupně 5? Dokažte.

2.1.11. Kolik komponent může mít graf s deseti vrcholy stupně 2? Dokažte.

2.1.12. Kolik nejvýše hran může mít graf na deseti vrcholech, který má dvě komponenty? Najdete takový graf?

2.1.13. Kolik nejvýše hran může mít graf na deseti vrcholech, který má dvě komponenty a žádný vrchol stupně většího než 3? Najdete takový graf?

2.1.14. Kolik nejméně hran může mít graf na deseti vrcholech, který má dvě komponenty?

2.1.15. Kolik nejméně hran může mít graf na $n$ vrcholech, který má $k$ komponent?

## 2.2 Prohledávání grafu

2.2.1. Jaká je složitost algoritmu (uvedeného na přednášce) pro prohledávání do šířky?

2.2.2. Jaká je složitost algoritmu (uvedeného na přednášce) pro prohledávání do hloubky?

## 2.3 Vyšší stupně souvislosti

2.3.1. Mějme kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$.

a) Jaký je hranový stupeň souvislosti $K_{m,n}$?

b) Jaký je vrcholový stupeň souvislosti $K_{m,n}$?

2.3.2. Mějme cyklus $C_n$.

a) Jaký je hranový stupeň souvislosti $C_n$?

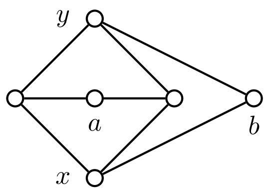
b) Jaký je vrcholový stupeň souvislosti $C_n$?

2.3.3.$^\heartsuit$ Víte, že minimální stupeň grafu $G$ je 5.

a) Co můžete říci o hranové souvislosti grafu $G$?

b) Co můžete říci o vrcholové souvislosti grafu $G$?

2.3.4. Máme dán graf $K_{3,3}$ bez jedné hrany, viz Obrázek 2.4.




Obrázek 2.4: *Graf $K_{3,3} - e$.*

a) Kolik hran musíme z grafu vynechat, aby neexistovala cesta mezi vrcholy $a$, $b$? Zdůvodněte!

b) Kolik hran musíme z grafu vynechat, aby neexistovala cesta mezi vrcholy $x$, $y$? Zdůvodněte!

2.3.5.$^\heartsuit$ Kolik musíme přidat hran do grafu $P_5$, aby byl 2-souvislý?

2.3.6. Kolik musíme přidat hran do grafu $P_6$, aby byl 3-souvislý?

2.3.7. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně $r$ a hranová i vrcholová souvislost je 1.

2.3.8. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně $r$ a hranová i vrcholová souvislost je 2.

2.3.9. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně $r$ a hranová i vrcholová souvislost je $k \leq r$.

2.3.10. Mějme libovolná přirozená čísla $a \leq b \leq c$. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně $c$ a hranová souvislost je $b$ a vrcholová souvislost je $a$.

2.3.11. Najděte příklad souvislého grafu, jehož vrcholová souvislost je menší než hranová souvislost.

2.3.12. Najděte příklad souvislého grafu, jehož hranová souvislost je menší než vrcholová souvislost.

2.3.13. Nakreslete 2-souvislý graf na co nejmenším počtu vrcholů tak, aby z něj přidáním jediné hrany vznikl 3-souvislý graf.

2.3.14.* Dokážete nakreslit 2-souvislý graf na co nejmenším počtu vrcholů a nejvýše dvěma vrcholy stupně dva tak, že přidáním jediné hrany nevznikne 3-souvislý graf?

## 2.4 Příklady k procvičení

2.4.1.$^\heartsuit$ Může existovat souvislý graf, který má více vrcholů než hran? Pokud ano, najděte příklad, pokud ne, dokažte.

2.4.2. Najděte všechny souvislé grafy, které mají více vrcholů než hran.

2.4.3. Může existovat souvislý graf, který má $n$ vrcholů a méně než $n-1$ hran? Pokud ano, najděte příklad, pokud ne, dokažte.

2.4.4. Ukažte, že není možné putovat koněm po celé šachovnici $3 \times 3$.

2.4.5. Kolik nejvíce hran může mít graf s $n \geq 2$ vrcholy a 2 komponentami?

2.4.6.* Kolik nejvíce hran může mít graf s $n$ vrcholy a $k$ komponentami? Předpokládáme, že $k \leq n$.

2.4.7. Kolik nejméně hran musí mít 3-souvislý graf

a) na 6 vrcholech?

b) na 12 vrcholech?

c) na 9 vrcholech?

2.4.8. Definujme graf $Z_2(n)$ jako graf, jehož vrcholy jsou všechny dvouprvkové podmnožiny nějaké $n$ prvkové množiny, $n \geq 2$. Dva vrcholy jsou sousední, jestliže odpovídající vrcholy jsou disjunktní.

a) Pro která $n$ je graf $Z_2(n)$ souvislý?

b) Je graf $Z_2(n)$ pravidelný?

c) Jaký je stupeň souvislosti grafu $Z_2(n)$?

2.4.9. Definujme graf $Z_2^*(n)$ jako graf, jehož vrcholy jsou všechny dvouprvkové podmnožiny nějaké $n$ prvkové množiny, $n \geq 2$. Dva vrcholy jsou sousední, jestliže odpovídající vrcholy nejsou disjunktní.

a) Pro která $n$ je graf $Z_2(n)$ souvislý?

b) Je graf $Z_2(n)$ pravidelný?

c) Jaký je stupeň souvislosti grafu $Z_2(n)$?

2.4.10.* Na množině čtyř vrcholů konstruujeme náhodný jednoduchý neorientovaný graf (bez smyček) tak, že každou dvojici vrcholů spojíme hranou s pravděpodobností $p$. Určete pravděpodobnost, že výsledný graf bude obsahovat a) alespoň jeden izolovaný vrchol, b) alespoň jeden trojúhelník.

2.4.11. Pat a Mat hrají hru: Mají daný souvislý graf $G$ a buď Pat odstraní $p$ vrcholů nebo mat odstraní $m$ hran. Kdo odstraní méně objektů (vrcholů nebo hran), vyhrál. Kdo vyhraje, jestliže

a) $G = P_n$?

b) $G = K_n$?

c) $G = C_n$?

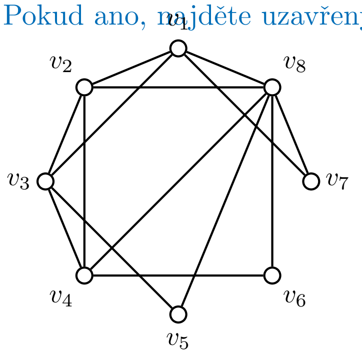
d) $G = K_{m,n}$?

# 3 Eulerovské a hamiltonovské grafy

Eulerovské a hamiltonovské grafy jsou zavedeny ve skriptech [UTG].

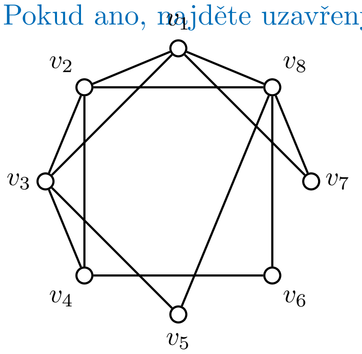
## 3.1 Eulerovské grafy

3.1.1. Je graf na Obrázku 3.1 eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.



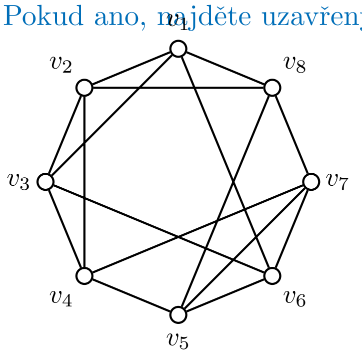

Obrázek 3.1: *Graf $G$.*

3.1.2. Je graf na Obrázku 3.2 eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.



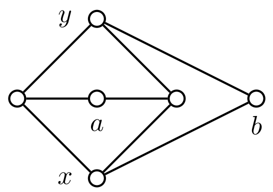

Obrázek 3.2: *Graf $G$.*

3.1.3. Je graf na Obrázku 3.3 eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.




Obrázek 3.3: *Graf $G$.*

3.1.4. Máme dán graf $K_{3,3}$ bez jedné hrany, viz Obrázek 3.4.




Obrázek 3.4: *Graf $K_{3,3} - e$.*

a) Je možno graf $K_{3,3} - e$ nakreslit jedním uzavřeným tahem? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné.

b) Je možno graf $K_{3,3} - e$ nakreslit jedním otevřeným tahem? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné.

c) Je možno graf $K_{3,3} - e$ nakreslit dvěma otevřenými tahy? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné.

d) Kolik nejméně hran je třeba přidat do grafu $K_{3,3} - e$, aby jej bylo možno nakreslit jedním otevřeným tahem?

e) Kolik nejméně hran je třeba přidat do grafu $K_{3,3} - e$, aby jej bylo možno nakreslit jedním uzavřeným tahem?

3.1.5. Je cirkulant $C_6(1,2)$ s vrcholovou množinou $V = \{v_i : i = 1, 2, \ldots, 6\}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.

3.1.6. Je cirkulant $C_6(1,3)$ s vrcholovou množinou $V = \{v_i : i = 1, 2, \ldots, 6\}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.

3.1.7. Je cirkulant $C_8(1,2)$ s vrcholovou množinou $V = \{v_i : i = 1, 2, \ldots, 8\}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.

3.1.8.$^{\heartsuit}$ Pro která $n$ je možno $K_n$ nakreslit jedním uzavřeným tahem?

3.1.9. Pro která $n$ je možno $K_n$ nakreslit jedním otevřeným a nikoli uzavřeným tahem?

3.1.10. Pro která $m, n$ je možno $K_{m,n}$ nakreslit jedním uzavřeným tahem?

3.1.11. Pro která $n$ je možno $K_{m,n}$ nakreslit jedním otevřeným tahem?

3.1.12. Dokažte, že eulerovský graf neobsahuje most.

3.1.13. Klasické domino obsahuje kostky s čísly 0 až 6. Z kostek je možno sestavit uzavřený cyklus, kdy kostky na sebe navazují stejnou hodnotou.

a) Vysvětlete, proč tomu tak je, s v využitím teorie grafů?

b) Je možno podobně sestavit cyklus pro domino s čísly 0 až 9?

3.1.14. Ukažte, že pro nesouvislé grafy nemusí platit, že graf s $2t$ vrcholy lichého stupně je možno nakreslit $t$ otevřenými eulerovskými tahy.

## 3.2 Hamiltonovské grafy

3.2.1. Nechť $V(G)$ grafu $G$ je množina všech dvouprvkových podmnožin množiny $[1,5]$ a nechť hrana $XY \in E(G)$ právě tehdy, když jsou dvouprvkové podmnožiny $X, Y$ disjunktní ($X \cap Y = \emptyset$). Nakreslete graf.

3.2.2. Je Petersenův graf hamiltonovský? Své tvrzení dokažte.

## 3.3 Příklady k procvičení

3.3.1. Je graf $K_{4,4}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.

3.3.2. Je graf $K_{4,6}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.

3.3.3. Pro které $n$ je graf $K_{2,n}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.

3.3.4. Najděte příklad souvislého grafu, který má dva vrcholy lichého stupně a všechny ostatní vrcholy sudého stupně a do kterého

a) stačí přidat jedinou hranu tak, aby byl eulerovský. Jaký je nejmenší takový graf?

b) není možné přidat jedinou hranu tak, aby byl eulerovský. Jaký je nejmenší takový graf?

3.3.5. Pro každé $t$ najděte příklad souvislého grafu, který

a) je souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit $t$ otevřenými tahy.

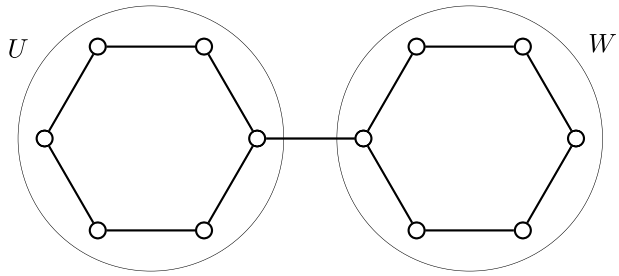
b) není souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit $t$ otevřenými tahy.

c) je souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit $t$ otevřenými tahy, ale není možné přidáním $t$ hran získat eulerovský graf.

d)* je souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit $t$ otevřenými tahy, a přidáním $t$ hran je možné získat eulerovský graf..

3.3.6. Pro libovolné sudé $r$ a libovolné $n > r$ najděte příklad $r$-pravidelného eulerovského grafu na $n$ vrcholech.

3.3.7. Máme dán graf $G$ na Obrázku 3.5.




Obrázek 3.5: *Graf $G$.*

a) Je graf $G$ eulerovský?

b) Jak přidat hrany pouze mezi vrcholy v množině $U$ nebo pouze mezi vrcholy v množině $W$ tak, aby vznikl eulerovský graf? Pokud to není možné, dokažte!

c) Jestliže dovolíme, aby alespoň jedna přidaná hrana měla jeden koncový vrchol v množině $U$ a druhý v množině $W$, může přidáním hran vzniknout eulerovský graf? Jestliže ano, kolik nejméně hran je třeba přidat? Pokud to není možné, dokažte!

3.3.8. Ukažte, že souvislý graf s $2t$ vrcholy lichého stupně je možno nakreslit $t$ otevřenými eulerovskými tahy.

# 4 Vzdálenost a metrika v grafu

Pojem vzdálenosti v grafu je popsán ve skriptech [UTG].

## 4.1 Motivační příklady

4.1.1.* Hlavolam známý jako „Hanojské věže“[2] má tři kolíky a sadu osmi disků různých velikostí. Na začátku je všech osm disků seřazeno podle velikosti na prvním kůlu. Úkolem je přemístit všechny disky na jiný kůl za dodržení následujících podmínek:

1. vždy se přesunuje pouze jeden disk,
2. nikdy nesmí ležet větší disk na menším.

Namodelujte úlohu užitím grafu a pro tři disky najděte nejkratší možné řešení.

4.1.2. Máme osmi litrovou nádobu s vínem a dvě prázdné nádoby – pětilitrovou a třílitrovou. Rozdělte osm litrů na čtyři a čtyři litry jen s užitím těchto nádob, bez použití odměrky. Úloha namodelujte grafem a najděte nejkratší řešení a popište všechna přípustná řešení.

4.1.3. Máme osmi litrovou nádobu s vínem a dvě prázdné nádoby – pětilitrovou a třílitrovou. Je možno odměřit libovolné (celočíselné) množství vína? Pokud ne, zjistěte jaké. Pokud ano, dokažte.

## 4.2 Vzdálenost v grafu

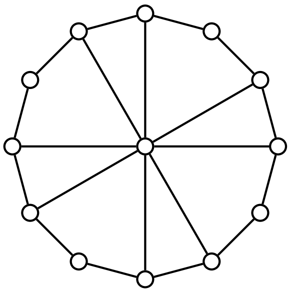
4.2.1.♡ Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu $K_4$?

4.2.2.♡ Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu $K_1$?

4.2.3.♡ Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu $C_7$?

4.2.4.♡ Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu $K_{7,8}$?

4.2.5. Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu $G$ na Obrázku 4.1?



Obrázek 4.1: *Graf $G$.*

4.2.6. Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu $K_n$?

4.2.7.♡ Jaká je největší možná vzdálenost dvou různých vrcholů v grafu $P_n$?

4.2.8. Jaká je největší možná vzdálenost dvou různých vrcholů v grafu $K_{m,n}$?

4.2.9. Jaká je největší možná vzdálenost dvou různých vrcholů v grafu $C_n$?

4.2.10. Najděte příklad grafu na osmi vrcholech, ve kterém je minimální i maximální vzdálenost dvou různých nesousedních vrcholů 2.

4.2.11. Najděte graf s co nejmenším počtem hran na osmi vrcholech, ve kterém je minimální i maximální vzdálenost dvou různých nesousedních vrcholů 2.

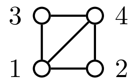
4.2.12. Najděte graf s co největším počtem hran na osmi vrcholech, ve kterém je minimální i maximální vzdálenost dvou různých nesousedních vrcholů 2.

[2] Hanojské věže vymyslel v roce 1883 Francouzský matematik Édouard Lucas.

4.2.13. Najděte graf s co největším počtem vrcholů, ve kterém je maximální vzdálenost dvou různých nesousedních vrcholů 2 a nejvyšší stupeň vrcholu je 3.

4.2.14. Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu $W_n$?

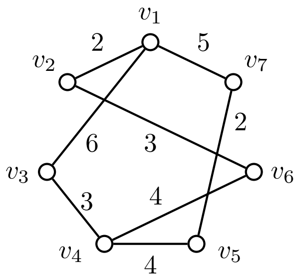
4.2.15. Vypočítejte metriku (matici udávající vzdálenosti mezi vrcholy) grafu $K_4 - e$ na Obrázku 4.2.




Obrázek 4.2: *Graf $K_4$ bez jedné hrany.*

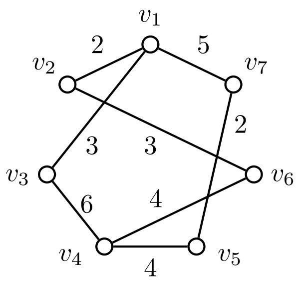
## 4.3 Vzdálenost v ohodnocených grafech

4.3.1. Máme dán graf $G$ na Obrázku 4.3. Jaká je největší možná vážená vzdálenost mezi vrcholy v grafu $G$?




Obrázek 4.3: *Graf $G$.*

4.3.2. Máme dán graf $G$ na Obrázku 4.4. Jaká je největší možná vážená vzdálenost mezi vrcholy v grafu $G$?

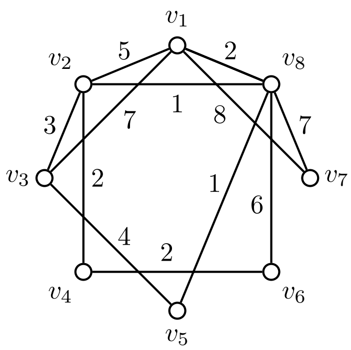



Obrázek 4.4: *Graf $G$.*

4.3.3. Jaká největší možná vážená vzdálenost může být mezi dvěma vrcholy v cyklu délky 9, který je ohodnocený všemi čísly $1, 2, \ldots, 9$, každým právě na jedné hraně v libovolném pořadí.

## 4.4 Nejkratší cesta v ohodnoceném grafu – Dijkstrův algoritmus

4.4.1. Máme dán graf jako na Obrázku 4.5.




Obrázek 4.5: *Graf $G$.*

a) Jaké jsou vzdálenosti všech vrcholů od vrcholu $v_1$?

b) V jakém pořadí budou zpracovány vrcholy při běhu Dijkstrova algoritmu s výchozím vrcholem $v_1$?

c) Jaké jsou vzdálenosti všech vrcholů od vrcholu $v_3$?

d) V jakém pořadí budou zpracovány vrcholy při běhu Dijkstrova algoritmu s výchozím vrcholem $v_3$?

e) Jaké jsou vzdálenosti všech vrcholů od vrcholu $v_5$?

f) V jakém pořadí budou objeveny vrcholy při běhu Dijkstrova algoritmu s výchozím vrcholem $v_5$?

g) Které dva vrcholy jsou nejvzdálenější? Jaká je jejich vzdálenost?

h) Ze kterého vrcholu je maximální vzdálenost do všech ostatních vrcholů nejmenší?

4.4.2. Ve kterém místě selže Dijkstrův algoritmus, jestliže připustíme i záporná ohodnocení hran?

## 4.5 Příklady k procvičení

*Hyperkrychlí řádu* $n$ budeme rozumět takový graf $G(V, E)$ na $2^n$ vrcholech, jehož vrcholovou množinu tvoří všechny binární vektory délky $n$

$$V = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

a hrana je mezi každými dvěma vrcholy, jejichž vektory se liší v jediné souřadnici

$$E = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_n) : (a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in V \wedge \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = 1\}.$$

Hyperkrychle řádu $n$ se značí $Q_n$.

4.5.1. Mějme graf $Q_3$ (hyperkrychle řádu 3). Kolik nejméně hran musíme přidat, aby největší možná vzdálenost mezi vrcholy grafu byla 2?

4.5.2.$^{\heartsuit}$ Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu $Q_n$? Dokažte

4.5.3.* Jak převést úlohu hledání nejkratší cesty i pro grafy s ohodnocenými vrcholy?

4.5.4. Kolik nejvíce vrcholů může mít graf, který má největší možnou vzdálenost mezi dvěma vrcholy rovnou 2?

4.5.5. Kolik nejvíce vrcholů může mít 3-pravidelný graf, který má největší možnou vzdálenost mezi dvěma vrcholy rovnou 2? Nakreslete příklad takového grafu.

4.5.6. V jednom okrese je 15 velkých měst a každé město je spojeno silnicí s alespoň sedmi jinými.

a) Dokažte, že z libovolného města do libovolného jiného se dá dostat buď přímou cestou nebo přes jedno jiné město.

b) Jak by se úloha změnila, kdyby každé město mělo být spojeno silnicí s právě sedmi jinými?

# 5 Stromy

Stromy a jejich základní vlastnosti jsou popsány ve skriptech [UTG].

## 5.1 Motivační příklady

5.1.1. Můžeme algoritmus hledání centra použít i pro jiné grafy než stromy? Najdete alespoň jeden takový graf? Vysvětlete!

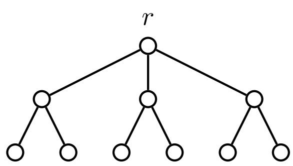
## 5.2 Základní vlastnosti stromů

5.2.1. Kolik neisomorfních lesů existuje na čtyřech vrcholech?

5.2.2. Kolik neisomorfních stromů existuje na pěti vrcholech?

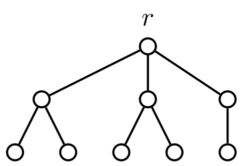
5.2.3.[♡] Najděte centra následujících stromů.

a) Strom $T$ na Obrázku 5.1.



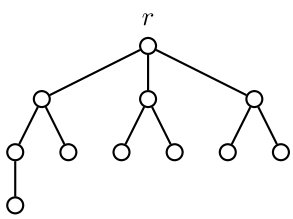

Obrázek 5.1: *Strom $T$.*

b) Strom $T$ na Obrázku 5.2.




Obrázek 5.2: *Strom $T$.*

c) Strom $T$ na Obrázku 5.3.




Obrázek 5.3: *Strom $T$.*

5.2.4. Najděte takový graf se dvěma kružnicemi, že vynecháním jediné hrany vznikne strom.

5.2.5. Kolik hran je třeba vynechat z kompletního grafu $K_n$, aby zůstala kostra?

5.2.6. Máme dán strom se 17 vrcholy.

a) Kolik odebereme vrcholů (dle algoritmu z přednášky), než najdeme centrum?

b) Kolik nejméně nastane takových kroků, kdy odstraňujeme listy?

c) Kolik nejvíce nastane takových kroků, kdy odstraňujeme listy?

5.2.7.♡ Máme dán strom se 4 vrcholy. Kolik odebereme vrcholů (dle algoritmu z přednášky), než najdeme centrum?

5.2.8.♡ Strom má 56 hran. Kolik může mít vrcholů?

5.2.9. Acyklický graf má 70 vrcholů a 60 hran. Kolik má komponent?

5.2.10. Acyklický graf má 60 vrcholů a 70 hran. Kolik má komponent?

5.2.11.♡ Najděte graf se dvěma kružnicemi, ze kterého vynecháním dvou hran vznikne strom.

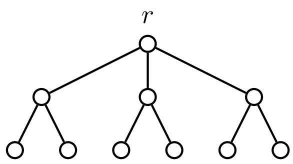
5.2.12. Najděte graf se dvěma kružnicemi, ze kterého vynecháním tří hran vznikne strom.

5.2.13. Najděte graf se třemi kružnicemi, ze kterého vynecháním tří hran vznikne strom.

5.2.14. Najděte graf se třemi kružnicemi, ze kterého vynecháním dvou hran vznikne strom.

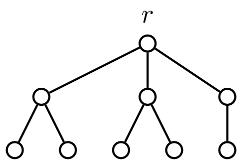
## 5.3 Kořenové a pěstované stromy

5.3.1. Najděte a zapište kód kořenového stromu $(T, r)$ na Obrázku 5.4.



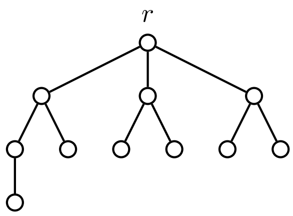

Obrázek 5.4: *Kořenový strom* $(T, r)$.

5.3.2. Najděte a zapište kód kořenového stromu $(T, r)$ na Obrázku 5.5.



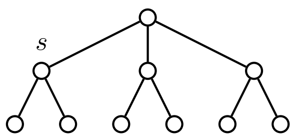

Obrázek 5.5: *Kořenový strom* $(T, r)$.

5.3.3. Najděte a zapište kód kořenového stromu $(T, r)$ na Obrázku 5.6.



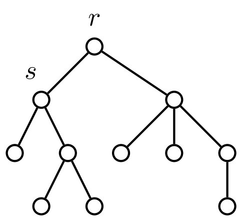

Obrázek 5.6: *Kořenový strom* $(T, r)$.

5.3.4. Najděte a zapište kód kořenového stromu $(T, s)$ na Obrázku 5.7.




Obrázek 5.7: *Kořenový strom* $(T, s)$.

5.3.5. Máme dán strom $T$ na Obrázku 5.8.



Obrázek 5.8: *Strom $T$, vyznačené vrcholy $r$, $s$.*

a) Najděte a zapište kód kořenového stromu $(T, r)$.

b) Najděte a zapište minimální kód kořenového stromu $(T, r)$.

c) Najděte a zapište kód kořenového stromu $(T, s)$.

d) Najděte a zapište minimální kód kořenového stromu $(T, s)$.

5.3.6. Nakreslete pěstovaný kořenový strom daný následujícím kódem.

a) 000000000111111111

b) 000101100101100101111

c) 0000101101001110001101111

d) 000010110100111000110111

e) 0000101101100111000110111

5.3.7. Je kód pěstovaného kořenového stromu daného následujícím kódem minimální?

a) 000000000111111111.

b) 000101100101100101111

c) 000110010110010010111

d) 000101100110010101111

e) 0000110110110001010111

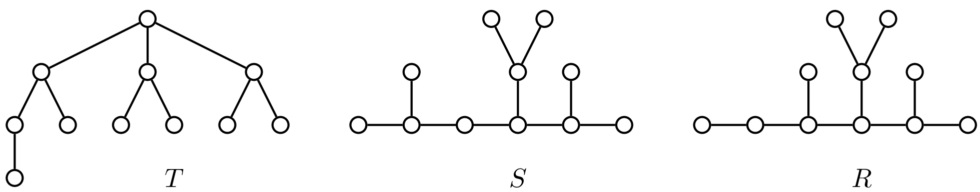
f) 0000101101001110001101111

## 5.4 Isomorfismus stromů

5.4.1. Kolik existuje neisomorfních lesů na pěti vrcholech?

5.4.2. Které kořenové stromy mají jednoznačně určený kód i když nejsou pěstované?

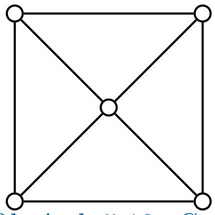
5.4.3. Rozhodněte, které z následujících stromů na Obrázku 5.9 jsou isomorfní.




Obrázek 5.9: *Stromy $T$, $S$ a $R$.*

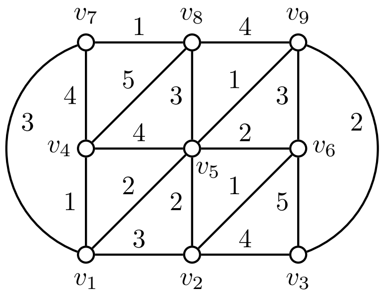
## 5.5 Kostry grafů

5.5.1. Kolik koster má následující graf $W_4$? Předpokládejme, že rozlišujeme vrcholy.



Obrázek 5.10: *Graf* $W_4$.

5.5.2. Máme dán graf $G$ na Obrázku 5.11.




Obrázek 5.11: *Graf* $G$.

a) Najděte minimální kostru grafu $G$ pomocí Kruskalova (hladového) algoritmu. Jaká je váha minimální kostry?

b) Najděte minimální kostru grafu $G$ pomocí Jarníkova (Primova) algoritmu. Výchozí vrchol je $v_1$. Jaká je váha minimální kostry?

c) Najděte minimální kostru grafu $G$ pomocí Borůvkova algoritmu. Jaká je váha minimální kostry?

5.5.3. Jaké vlastnosti musí mít ohodnocení grafu, aby všechny tři algoritmy (Borůvkův, Jarníkův/Primův i Kruskalův (hladový) našly vždy stejnou kostru?

5.5.4. Mějme dán kompletní graf $K_n$, jehož množina vrcholů je $V = [1, n]$. Každou hranu $uv$ ohodnotíme součtem $u + v$. Jak vypadá minimální kostra takto ohodnoceného kompletního grafu?

5.5.5. Mějme dán kompletní graf $K_n$, jehož množina vrcholů je $V = [1, n]$. Každou hranu $uv$ ohodnotíme součtem $2u + 5v$, kde $u < v$. Jak vypadá minimální kostra takto ohodnoceného kompletního grafu?

## 5.6 Příklady k procvičení

5.6.1.$^\heartsuit$ Kolik různých koster má cyklus $C_n$? Předpokládejme, že rozlišujeme vrcholy.

5.6.2.$^\heartsuit$ Kolik různých neisomorfních koster má cyklus $C_n$? Předpokládejme, že nerozlišujeme vrcholy.

5.6.3. Máme graf $K_4$.

a) Kolik různých neisomorfních koster má graf $K_4$?

b) Kolik různých koster má graf $K_4$?

5.6.4. Máme graf $K_5$.

a) Kolik různých koster má graf $K_5$?

b) Kolik různých neisomorfních koster má graf $K_5$?

5.6.5. Máme graf $K_6$.

a) Kolik různých koster má graf $K_6$?

b) Kolik různých neisomorfních koster má graf $K_6$?

5.6.6. Kolik hran je třeba vynechat z kompletního bipartitního grafu $K_{m,n}$, aby zůstala kostra?

5.6.7. Kolik nejméně vrcholů musí mít graf, který má dvě hranově disjunktní kostry? Najdete takový graf?

5.6.8. Najděte příklad souvislého grafu, který má 1001 koster.

5.6.9. Zavedeme pojem inverzního kódu. Máme strom $T$ a nějaký jeho kód $C$. Inverzní kód $C'$ dostaneme tak, že zaměníme 0 a 1 a napíšeme kód v opačném pořadí. Najděte takový netriviální strom $T$, který má

a) stejný kód i inverzní kód,

b) různý kód a inverzní kód, přičemž strom $T'$ příslušný inverznímu kódu je isomorfní se stromem $T$,

c) různý kód a inverzní kód, přičemž strom $T'$ příslušný inverznímu kódu není isomorfní se stromem $T$,

d) inverzní kód stejný jako minimální kód.

5.6.10. Máme strom $T$ a jeho kód $C$. Cestou ve strom $T$ budeme rozumímět podgraf, který je isomorfní s cestou. Co můžeme říci o nejdelší cestě ve stromu $T$, je-li v kódu $C$ pět po sobě jdoucích nul?

5.6.11. Máme strom $T$ a jeho *minimální* kód $C$. Cestou ve strom $T$ budeme rozumímět podgraf, který je isomorfní s cestou. Co můžeme říci o nejdelší cestě ve stromu $T$, je-li v kódu $C$ pět po sobě jdoucích nul?

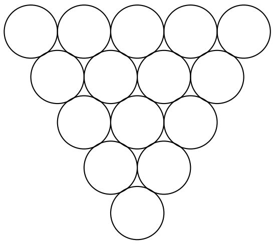
# 6 Barevnost a kreslení grafů

Pojmy barevnosti grafu a rovinného zakreslení grafu jsou popsány ve skriptech [UTG].

## 6.1 Motivační příklady

6.1.1. Skladovací problém: Ve skladu potravin máme různé druhy zboží. Podle hygienických norem se nesmí některé druhy potravin skladovat spolu v jedné místnosti. Naším úkolem je zjistit, kolik nejméně místností je potřeba ve skladu pronajmout, aby bylo zboží uloženo podle předpisů. Jak namodelujete skladovací problém pomocí teorie grafů.

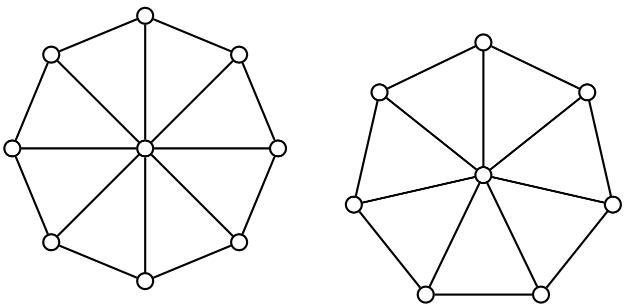
6.1.2. Kolik nejméně barev je potřeba na obarvení 15 biliárových koulí v trojúhelníkovém postavení tak, aby žádné dvě dotýkající se koule nebyly obarveny stejnou barvou?



Obrázek 6.1: *Biliárové koule v trojúhelníkovém postavení.*

## 6.2 Vrcholové barvení grafů

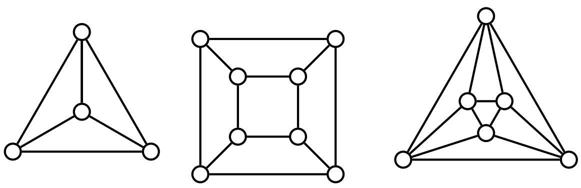
6.2.1. Jaké je chromatické číslo (barevnost) následujících grafů?



Obrázek 6.2: *Grafy $W_8$ a $W_7$.*

a) Graf $W_8$, viz Obrázek 6.2?

b) Graf $W_7$, viz Obrázek 6.2?



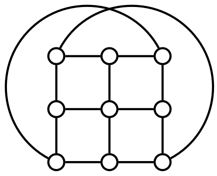
Obrázek 6.3: *Rovinná nakreslení pravidelného čtyřstěnu, šestistěnu a osmistěnu.*

c) Grafu pravidelného čtyřstěnu, viz Obrázek 6.3.

d) Grafu pravidelného šestistěnu, viz Obrázek 6.3.

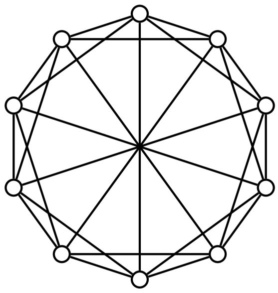
e) Grafu pravidelného osmistěnu, viz Obrázek 6.3.

6.2.2. Jaké je chromatické číslo (barevnost) grafu $G$ na Obrázku 6.4?



Obrázek 6.4: *Graf $G$.*

6.2.3. Jaké je chromatické číslo (barevnost) cirkulantu $C_{10}(1, 2, 5)$ na Obrázku 6.5?



Obrázek 6.5: *Cirkulant* $C_{10}(1, 2, 5)$.

6.2.4. Kolik nejméně musíme vynechat hran z grafu $W_8$ (viz Obrázek 6.2), aby jeho chromatické číslo bylo 2?

6.2.5. Kolika nejvýše barvami obarvíme kompletní bipartitní graf s alespoň třemi vrcholy, jestliže mu přidáme jednu hranu?

6.2.6. Kolika nejvýše barvami obarvíme kompletní bipartitní graf, jestliže mu přidáme dvě hrany?

6.2.7.$^\heartsuit$ Kolika barvami lze obarvit strom.

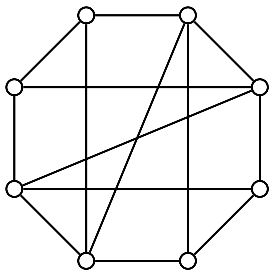
6.2.8. Kolik barev je potřeba na obarvení (jaká je barevnost) $K_n - e$?

6.2.9. Kolik barev je potřeba na obarvení (jaká je barevnost) $C_n$ s jednou přidanou hranou $v_1v_i$, $i \in [1, n]$?

6.2.10. Mám dán graf $G$. Co můžeme říci o barvenosti grafu $G$, jestliže známe $\Delta(G)$?

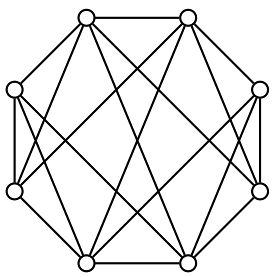
## 6.3 Rovinné kreslení grafu

6.3.1. Pokud je to možné, nakreslete graf $G$ na Obrázku 6.6 tak, aby se hrany neprotínaly.



Obrázek 6.6: *Graf $G$.*

6.3.2. Pokud je to možné, nakreslete graf $G$ na Obrázku 6.7 tak, aby se hrany neprotínaly.



Obrázek 6.7: *Graf G*.

6.3.3. Ukažte, že po přidání libovolné hrany do grafu na Obrázku 6.7 výsledný graf již nebude rovinný.

6.3.4. Pokud je to možné, nakreslete rovinný graf pravidelného čtyřstěnu.

6.3.5. Pokud je to možné, nakreslete rovinný graf pravidelného šestistěnu (krychle).

6.3.6. Pokud je to možné, nakreslete rovinný graf pravidelného osmistěnu.

6.3.7. Nakreslete rovinný graf pravidelného dvanáctistěnu.

6.3.8. Nakreslete rovinný graf pravidelného dvacetistěnu.

6.3.9. Nakreslete rovinný graf osmistěnu a najděte odpovídající duální graf.

6.3.10. Nakreslete rovinný graf dvanáctistěny a najděte odpovídající duální graf.

6.3.11. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného osmistěnu. Stěny pravidelného osmistěnu jsou trojúhelníky.

a) Kolik má oblastí?

b) Kolik má hran?

c) Kolik má vrcholů?

d) Kolik dalších hran můžeme do roviného nakreslení osmistěnu přidat tak, aby graf zůstal rovinný?

6.3.12. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného šestistěnu (krychle).

a) Kolik má oblastí?

b) Kolik má hran?

c) Kolik má vrcholů?

d) Kolik dalších hran můžeme do roviného nakreslení krychle přidat tak, aby graf zůstal rovinný?

6.3.13. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného dvanáctistěnu. Stěny pravidelného dvanáctistěnu jsou pětiúhelníky.

a) Kolik má oblastí?

b) Kolik má hran?

c) Kolik má vrcholů?

d) Kolik dalších hran můžeme do roviného nakreslení dvanáctistěnu přidat tak, aby graf zůstal rovinný?

6.3.14. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného dvacetistěnu. Stěny pravidelného dvacetistěnu jsou trojúhelníky.

a) Kolik má oblastí?

b) Kolik má hran?

c) Kolik má vrcholů?

d) Kolik dalších hran můžeme do roviného nakreslení dvacetistěnu přidat tak, aby graf zůstal rovinný?

6.3.15. Kolik má souvislý rovinný graf stěn, víte-li že má

a) 20 vrcholů a 25 hran?

b) 16 vrcholů a 15 hran?

c) 25 vrcholů a 22 hran?

d) 5 vrcholů a 10 hran?

6.3.16. Nakreslete graf $K_4$ tak, aby

a) se hrany neprotínaly

b) a navíc aby byly úsečky.

6.3.17. Nakreslete graf $K_5 - e$ tak, aby

a) se hrany neprotínaly

b) a navíc aby byly úsečky.

6.3.18. Nakreslete graf $K_{3,3} - e$ tak, aby

a) se hrany neprotínaly

b) a navíc aby byly úsečky.

6.3.19. Najděte rovinný graf, který má nejmenší stupeň vrcholů 5.

6.3.20.* Najděte nekonečně mnoho neisomorfních souvislých rovinných grafů, které mají nejmenší stupeň vrcholů 5.

6.3.21. Do rovinného nakreslení stromu přidáme dvě hrany, které se navzájem nekříží a nekříží ani žádnou původní hranu stromu. Kolik bude mít výsledný graf oblastí (stěn)?

## 6.4 Rozpoznání rovinných grafů

6.4.1.♡ Pro která $n$ je graf $K_n$ rovinný? Zdůvodněte.

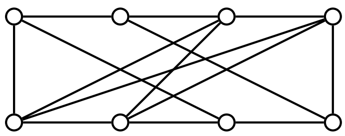
6.4.2.♡ Pro která $m, n$ je graf $K_{m,n}$ rovinný? Zdůvodněte.

6.4.3. Existuje rovinné nakreslení pro $K_6 - C_3$? Zdůvodněte.

6.4.4. Nakreslete nějaký rovinný graf s 12 hranami a 8 stěnami.

6.4.5. Nakreslete nějaký rovinný graf s 21 hranami a 16 stěnami.

6.4.6.* Je graf $G$ na Obrázku 6.8 rovinný? Zdůvodněte.



Obrázek 6.8: *Graf $G$.*

6.4.7. Najděte chybu v následujícícm důkazu: Mějme takový graf $G$, že na jeho dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň 5 barev. V grafu $G$ musí být vrcholy stupně alespoň 5, které jsou sousední s vrcholy čtyř ostatních barev, jinak bychom je mohli přebarvit a použít méně než 5 barev. Jiste najdeme takovou množinu pěti vrcholů různé barvy, které tvoří podgraf $K_5$.

V roviném grafu podle Kuratowského věty neexistuje podgraf isomorfní s $K_5$ a proto (podle předchozího zdůvodnění) na obarvení roviného grafu budou stačit vždy čtyři barvy.

## 6.5 Barvení map a rovinných grafů

6.5.1. Kolik nejméně barev je třeba na dobré vrcholové barvení rovinného nakreslení grafů?

a) $K_5 - e$

b) $K_{3,3} - e$

6.5.2. Najdete rovinný graf, na jehož obarvení je potřeba alespoň 5 barev? Zdůvodněte.

6.5.3. Kolik barev je třeba na dobré obarvení hyperkrychle $Q_n$?

6.5.4. Najdete graf s největším stupněm 2 na jehož dobré vrcholové barvení jsou potřeba alespoň 3 barvy? Zdůvodněte.

6.5.5. Najděte graf s největším stupněm $r$ na jehož dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň $r+1$ barev.

6.5.6. Najdete graf s největším stupněm 3 na jehož dobré vrcholové barvení je potřeba minimálně 5 barev? Zdůvodněte.

6.5.7. Je Petersenův graf rovinný? Zdůvodněte.

## 6.6 Příklady k procvičení

6.6.1. Máme dánu hyperkrychli řádu $n$, značíme ji $Q_n$ (viz strana 50).

a) Jaký je počet vrcholů $Q_n$?

b) Jaký je stupeň vrcholů v grafu $Q_n$?

c) Jaký je počet hran $Q_n$?

d) Jaké je chromatické číslo $Q_n$?

e) Pro které hodnoty $n$ je graf $Q_n$ rovinný?

6.6.2. Podle předpisů se káva nesmí skladovat společně s rýží, rýže s moukou, mouka s jablky a jablka se nesmí skladovat společně s tropickým ovocem. Kolik nejméně místností je potřeba pro uskladnění všech druhů zboží?

6.6.3. Máme za úkol pronajmout skladové prostory, ve kterých se budou skladovat broskve, kukuřice, papriky, pšenice, rajčata, švestky a konzervy. Podle předpisů se obiloviny nesmí skladovat společně s ovocem, rajčata ani papriky se nesmí skladovat s pšenicí nebo kukuřicí a broskve se nesmí skladovat s rajčaty. Kolik nejméně místností je třeba pronajmout pro uskladnění všech druhů zboží?

6.6.4. Kolik hran stačí přidat do cyklu $C_n$, aby výsledný graf nebyl rovinný?

6.6.5. Máme dány hyperkrychli $Q_4$ (viz strana 50). Je $Q_4$ rovinný graf?

# 7 Toky v sítích

Pojem sítě a definice toku v síti jsou jsou popsány ve skriptech [UTG].

## 7.1 Definice sítě

7.1.1. Pro které vrcholy sítě neplatí zákony kontinuity?

7.1.2. Jak v síti namodelovat neorientovanou hranu?

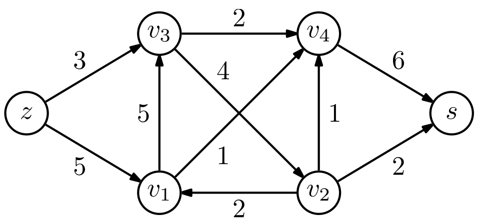
7.1.3. Může pro (jediný) zdroj platit zákon kontinuity?

7.1.4. Může v síti něco přitékat do zdroje?

7.1.5. Může být tok na hranách vycházející ze zdroje větší, než tok na hranách přitékajících do stoku?

## 7.2 Hledání maximálního toku

7.2.1. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 7.1.



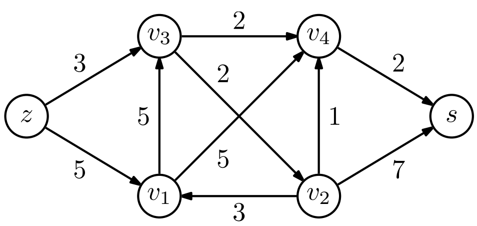

Obrázek 7.1: *Síť* $(G, z, s, w)$.

a) Jaká je hodnota největšího toku v síti $S$? Najděte jej!

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti $S$? Najděte minimální řez.

c) Jak vypadá množina $U$ po skončení algoritmu?

7.2.2. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 7.2.



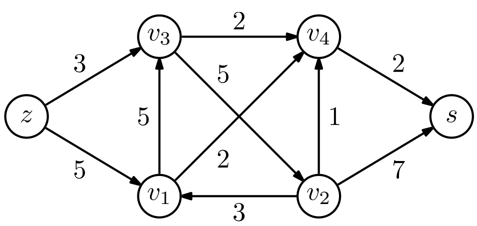

Obrázek 7.2: *Síť* $(G, z, s, w)$.

a) Jaká je hodnota největšího toku v síti $S$? Najděte jej!

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti $S$? Najděte minimální řez.

c) Jak vypadá množina $U$ po skončení algoritmu?

7.2.3. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 7.3.



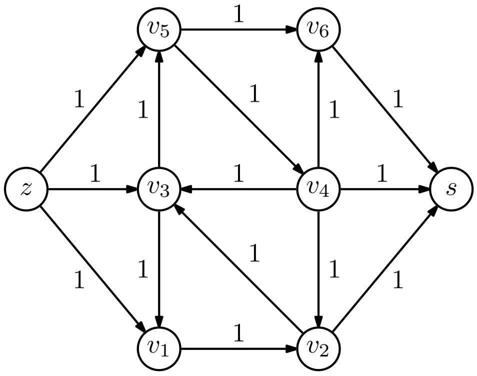

Obrázek 7.3: *Síť* $(G, z, s, w)$.

a) Jaká je hodnota největšího toku v síti $S$? Najděte jej!

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti $S$? Najděte minimální řez.

c) Jak vypadá množina $U$ po skončení algoritmu?

7.2.4. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 7.4.



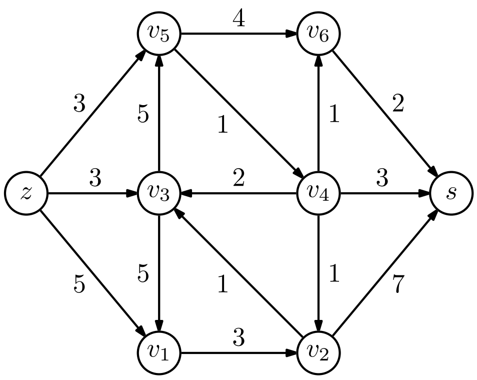

Obrázek 7.4: *Síť* $(G, z, s, w)$.

a) Jaká je hodnota největšího toku v síti $S$? Najděte jej!

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti $S$? Najděte minimální řez.

c) Jak vypadá množina $U$ po skončení algoritmu?

7.2.5. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 7.5.




Obrázek 7.5: *Síť* $(G, z, s, w)$.

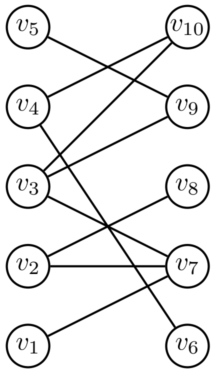
a) Jaká je hodnota největšího toku v síti $S$? Najděte jej!

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti $S$? Najděte minimální řez.

c) Jak vypadá množina $U$ po skončení algoritmu?

## 7.3 Zobecnění sítí a další aplikace

7.3.1. Najděte největší párování v následujícím grafu. Zdůvodněte, proč neexistuje větší párování.




Obrázek 7.6: *Bipartitní graf $G$.*

7.3.2. Existuje systém různých reprezentantů pro následující systém množin? Pokud ano, najděte ho, pokud ne, dokažte to.

$$M_1 = \{1,2,4\}, M_2 = \{1,3,7\}, M_3 = \{1,5,6\}, M_4 = \{2,6,7\}, M_5 = \{2,3,5\}, M_6 = \{3,4,6\}, M_7 = \{4,5,7\}$$

7.3.3. Existuje systém různých reprezentantů pro následující systém množin? Pokud ano, najděte ho, pokud ne, dokažte to.

$$M_1 = \{1,4,5\}, M_2 = \{1,4,6\}, M_3 = \{1,5,6\}, M_4 = \{2,3,5\}, M_5 = \{4,5,6\}, M_6 = \{4,5,7\}, M_7 = \{4,6,7\}$$

## 7.4 Příklady k procvičení

7.4.1. Najděte příklad sítě, kde kapacity hran jsou celočíselné a maximální tok není celočíselný.

## Reference

[ZDM] M. Kubesa, Základy diskrétní matematiky, VŠB–TU Ostrava, skriptum (2012).

[UTG] P. Kovář, Úvod do teorie grafů, VŠB–TU Ostrava, skriptum (2012).

[H] P. Hliněný, Diskrétní matematika, skriptum, VŠB (2005).

[TG] P. Kovář, Teorie grafů, VŠB–TU Ostrava, skriptum (2011).

[MN] J. Matoušek, J. Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Univerzita Karlova, Praha (2003),

[DMA] K.H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications – 6th ed., McGraw-Hill, New York (2007).

[W] D. B. West, Introduction to graph theory – 2nd ed., *Prentice-Hall*, Upper Saddle River NJ, (2001).