Přehled přednášky

Kapitola 11. Toky v sítích

- motivace
- definice sítě
- hledání maximálního toku
- zobecnění sítí a další aplikace

Opakování

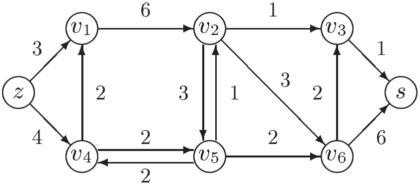
Budeme používat následující pojmy:

- vážený graf, ohodnocení grafu
- orientovaný graf

Kapitola 11. Toky v sítích

Motivace

Teorie grafů hraje klíčovou roli při řešení řady síťových úloh. Máme dánu síť (počítačovou síť, produktovod, ...), kde hrany reprezentují spojení a vrcholy jsou například křižovatky nebo switche.
Je přirozené, že hrany a vrcholy mají omezenou kapacitu (kapacita = číslo).

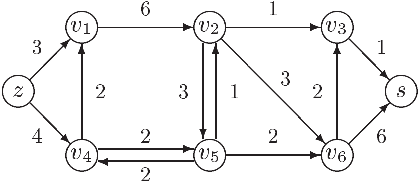


Jaký největší objem látky nebo dat můžeme po síti (s danými omezeními) dopravit z vrcholu z (zdroj) do vrcholu s (stok).

Síť, je graf pro který stanovíme kapacity hran a zvolíme zdroj a stok.

Definice 11.1. *Síť* je čtveřice $S = (G, z, s, w)$, kde

- G je orientovaný graf,
- vrcholy $z \in V(G)$, $s \in V(G)$ jsou *zdroj* a *stok*,
- $w : E(G) \to \mathbf{R}^+$ je kladné ohodnocení hran, tzv. *kapacita hran*.



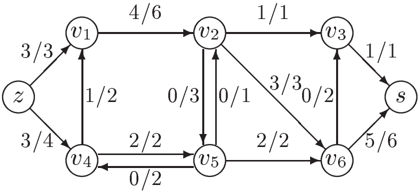
Jaké je největší objem, který můžeme v G přepravit ze zdroje z ke spotřebiteli ve stoku s? Samozřejmě dodržíme stanovené *maximální kapacity* hran.

Složitější síť může mít

- kapacity vrcholů
- více produktů
- více zdrojů a stoků

Někdy můžeme úlohu převézt na základní úlohu. Později ukážeme jak.

Všimněte si, že při maximálním možném toku nemusí být využita kapacita některých hran. Proto zavedeme pojem toku (tok/kapacita).



Symbol $e \to v$ označuje hrany *přicházející* do v a symbol $e \leftarrow v$ označuje hrany *vycházející* z v.

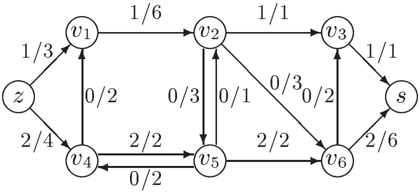
Definice 11.2. *Tok* v síti $S = (G, z, s, w)$ je funkce $f : E(G) \to \mathbf{R}_0^+$, kde

- nepřekročíme kapacity hran: $\forall e \in E(G) : 0 \leq f(e) \leq w(e)$,
- platí zákon kontinuity: $\forall v \in V(G), v \neq z, s : \sum_{e \to v} f(e) = \sum_{e \leftarrow v} f(e)$.

Velikost toku f je

$$\|f\| = \sum_{e \leftarrow z} f(e) - \sum_{e \to z} f(e).$$

Příklad:



Zdroj a stok jsou významné vrcholy v síti. Mají jiný význam než „křižovatky“ produktovodů.
Neplatí pro ně zákony kontinuity!

- ze zdroje „teče“ více než do zdroje
- do stoku „teče“ více než ze stoku
- rozdíl musí být pro oba vrcholy stejný

Důkaz

$$0 = \sum_{e} (f(e) - f(e)) = \sum_{v} \sum_{e \leftarrow v} f(e) - \sum_{v} \sum_{e \rightarrow v} f(e) = \sum_{v \in \{z,s\}} \left(\sum_{e \leftarrow v} f(e) - \sum_{e \rightarrow v} f(e) \right).$$

Dvojité sumy nabývají stejných hodnot pro všechny vrcholy s výjimkou z a s.

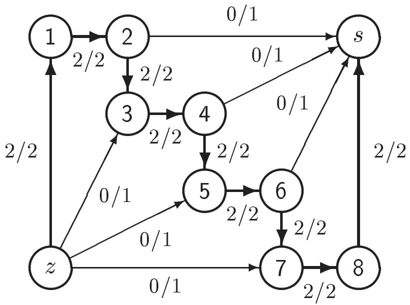
$$\left(\sum_{e \leftarrow z} f(e) - \sum_{e \rightarrow z} f(e) \right) = - \left(\sum_{e \leftarrow s} f(e) - \sum_{e \rightarrow s} f(e) \right). \qquad \square$$

Poznámka

„Stok“ se v literatuře nazývá také „nor“ (řeka Punkva v Moravském krasu).

Hledání maximálního toku

Úkolem je najít co největší možný tok z vrcholu z do vrcholu s v dané síti (G) s ohodnocením w. Hledáme $\max \|f\|$, kde f je tok v síti.
Hladový algoritmus nevede k nejlepšímu řešení! (viz obrázek)

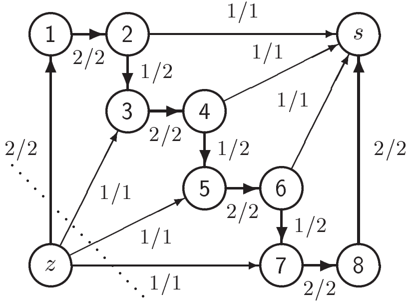


Našli jsme tok velikosti 2.
Tok již nemůžeme zvýšit přidáním nějaké cesty s nenulovým tokem, avšak řešení není správné, neboť existuje tok velikosti 5.

Definice 11.4. *Řez* v síti $S = (G, z, s, w)$ je taková podmnožina hran $C \subseteq E(G)$, že v $G - C$ (odebrání hran C z G) nezůstane žádná orientovaná cesta ze z do s.
Velikostí řezu C rozumíme součet kapacit hran z C, tj. $\|C\| = \sum_{e \in C} w(e)$.

Věta 11.5.
Maximální velikost toku v síti je rovna minimální velikosti řezu.

Důkaz později...



Obrázek: *Tok velikosti* 5 *a řez s kapacitou* 5.

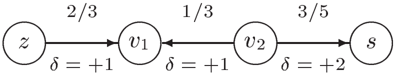
Věta je dobrou charakterizací maximálního toku:

Tok o velikosti x je maximální, jestliže najdeme řez o velikost x.

Definice Máme dánu síť S a v ní tok f. *Nenasycená cesta* v S je neorientovaná cesta $e_1, e_2, \ldots, e_m$ v G z vrcholu u do vrcholu v (obvykle ze z do s), kde

- $f(e_i) < w(e_i)$ pro e_i „ve směru“ z u do v,
- $f(e_i) > 0$ pro e_i v opačném směru.

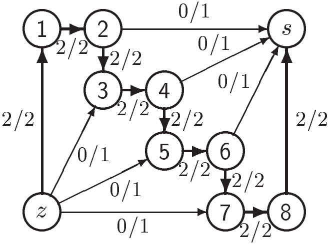
Hodnotě $w(e_i) - f(e_i)$ pro hrany e_i ve směru z u do v a hodnotě $f(e_i)$ pro hrany e_i v opačném směru říkáme *rezerva kapacity* hrany e_i.
Nenasycená cesta je cesta s kladnými rezervami δ kapacit všech hran.



Obrázek: *Cesta s rezervou kapacity $+1$.*

Algoritmus 11.6. Ford–Fulkersonův algoritmus

```
vstup:  síť S = (G,z,s,w);
tok f := 0;
do {
    prohledáním grafu najdeme množinu U vrcholů G,
    dosažitelných ze z po nenasycených cestách;
    if (s náleží U) {
        P = (výše nalezená) nenasycená cesta v S ze z do s;
        zvětšíme tok f o minimální rezervu kapacity hran v P;
} while (s náleží U);
výstup:  vypíšeme maximální tok f;
výstup:  min. řez jako množina hran vedoucích z U do V(G)-U.
```



Důkaz Důkaz správnosti algoritmu provedeme přímo.

Je zřejmé, že musí platit $\|f\| \leq \|C\|$.
Jestliže po skončení algoritmu budeme mít tok f a najdeme v síti S řez o stejné velikosti $\|C\| = \|f\|$, je zřejmé, že jsme našli maximální možný tok v síti S. Zároveň tím dokážeme platnost Věty 11.5.
Stačí dokázat, že po skončení algoritmu dostaneme rovnost $\|f\| = \|C\|$, kde C je řez mezi U a zbytkem grafu G.
Předpokládejme, že máme tok f v S bez nenasycené cesty ze z do s. To znamená, že množina U z algoritmu neobsahuje vrchol s (je dosažitelný jen po nenasycené cestě).
Protože z U nevedou žádné nenasycené cesty (ani hrany), má každá hrana $e \leftarrow U$ (odcházející z U) plný tok $f(e) = w(e)$ a každá hrana $e \rightarrow U$ (přicházející do U) tok $f(e) = 0$. Velikost toku f ze z do s je

$$\|f\| = \sum_{e \leftarrow U} f(e) - \sum_{e \rightarrow U} f(e) = \sum_{e \leftarrow U} f(e) = \sum_{e \in C} w(e) = \|C\| .$$

To je dokazované tvrzení. $\square$

Důsledek 11.7.
Jsou-li kapacity hran sítě S celočíselné, vyjde maximální tok také celočíselný.

Zobecnění sítí a další aplikace

Uvedenou úlohu hledání maximálního toku můžeme zobecnit a

1. stanovit minimální kapacity hran (něco musí téct)
2. více zdrojů a stoků
3. přidat kapacity vrcholů
4. přepravovat jednou sítí více produktů

ad 1.) Minimální kapacity hran

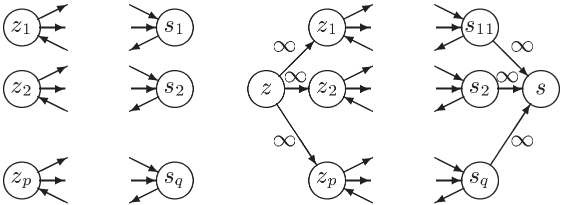
Pokud kromě maximálních kapacit hran stanovíme i minimální kapacity, tj. požadavek, aby tok hranou měl nějaký nenulový tok, nemusí mít úloha řešení.

Tato úloha přesahuje rámec kurzu.

Pro zájemce: J. Demel, Grafy, SNTL, Praha, 1989

ad 2.) Více zdrojů a stoků

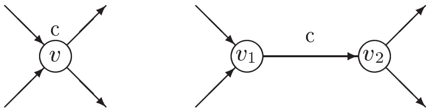
Vyskytuje-li se v grafu více zdrojů nebo stoků, můžeme úlohu jednoduše převést na úlohu s jediným zdrojem a jediným stokem.



Můžeme dokonce stanovit kapacity jednotlivých zdrojů a stoků. Stačí stanovit jiné kapacity než ∞.

ad 3.) Kapacity vrcholů

Je přirozené, že nejen hrany, ale také místa křížení mají omezenou kapacitu. Síť s kapacitami hran i vrcholů můžeme snadno převést na síť, ve které jsou ohodnocené pouze hrany.

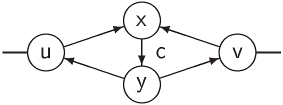


Každý vrchol se stanovenou kapacitou c nahradíme dvojicí vrcholů spojenou hranou s kapacitou c (vrchol *zdvojíme*).
Hrany přicházející do v půjdou do v_1 a hrany odcházející z v půjdou z v_2.

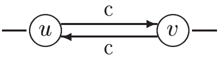
ad 4.) Víceproduktové toky

Pro víceproduktové toky je úloha složitější. Algoritmus pro hledání maximálního víceproduktového (vícekomoditního) toku je nad rámec kurzu.

Ukážeme alespoň, jak převedeme neorientovaný graf na orientovaný s předepsanou kapacitou hrany.



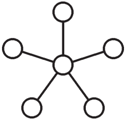
Nemůže se stát, aby jeden produkt putoval jedním směrem a jiný produkt opačným směrem. V součtu by mohly překročit kapacitu hrany!
Nestačí:

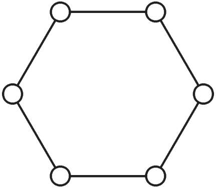


Párování v bipartitních grafech

Rozmanitost aplikací algoritmu pro hledání maximálního toku je překvapivá. Ukážeme, jak převedeme úlohu hledání maximálního párování na úlohu hledání maximálního toku.

Definice *Párování* v (bipartitním) grafu G je podmnožina nezávislých hran $M \subseteq E(G)$ (žádné dvě hrany z M nesdílejí koncový vrchol).





Zatímco v prvním grafu (hvězdě) párování má jedinou hranu, pro druhý graf existuje párování pokrývající všechny vrcholy.

Metoda 11.8. Nalezení bipartitního párování

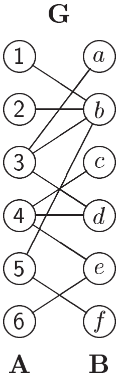
Pro bipartitní graf G s vrcholy rozdělenými do partit A, B sestrojíme síť S:

1. do grafu přidáme zdroj z a stok s
   všechny vrcholy z A spojíme se z a všechny vrcholy z B spojíme s s
   všechny hrany sítě S orientujeme od zdroje do stoku; přiřadíme jim kapacity 1

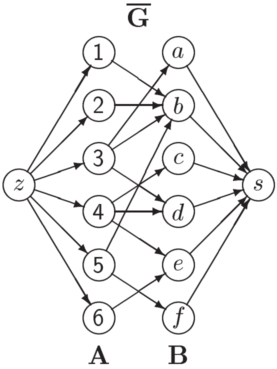
2. najdeme (celočíselný) maximální tok v S Algoritmem 11.6.

3. párování obsahuje ty hrany grafu G, které mají nenulový tok

Důkaz Podle Důsledku 11.7. bude maximální tok celočíselný, tj. každou hranou „poteče“ tok 0 nebo 1.
Do každého vrcholu v A vede pouze jedna hrana s kapacitou 1, proto bude vrchol A pouze v jedné hraně párování. Podobně pro vrcholy množiny B. Tím budou vybrány hrany párování a podle zadaných kapacit nebudou sdílet koncové vrcholy.
Párování je největší, protože z každého párování lze získat příslušný tok a větší než nalezený tok v S neexistuje. $\square$

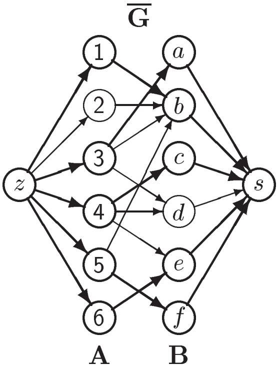


Máme dán bipartitní graf G.

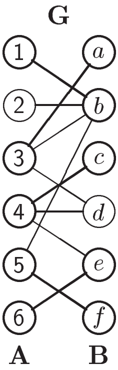


Sestrojíme příslušnou síť S:

- do grafu přidáme zdroj z a stok s
- všechny vrcholy z A spojíme se z a všechny vrcholy z B spojíme s s
- všechny hrany sítě S orientujeme od zdroje do stoku; přiřadíme jim kapacity 1



Najdeme maximální tok v S Algoritmem 11.6. Tok bude celočíselný.



Hledané párování obsahuje jen ty hrany grafu G, které mají nenulový tok.

Vyšší grafová souvislost

V kapitole 7.3. jsme zavedli vyšší stupně souvislosti. Bez důkazu jsme uvedli Mengerovu větu:

Věta 7.5.
Graf G je hranově k-souvislý právě když mezi libovolnými dvěma vrcholy existuje alespoň k hranově-disjunktních cest (vrcholy mohou být sdílené).
Graf G je vrcholově k-souvislý právě když mezi libovolnými dvěma vrcholy existuje alespoň k disjunktních cest (různých až na ty dva spojované vrcholy).

Nejprve si všimneme, že podle definice hranové i vrcholové souvislosti platí:

Lemma 11.9. Nechť u, v jsou dva vrcholy grafu G a $k > 0$ je přirozené číslo. Pak mezi vrcholy u a v existuje v G aspoň k disjunktních cest, právě tehdy když po odebrání libovolných $k - 1$ vrcholů různých od u, v z G zůstanou vrcholy u a v ve stejné komponentě souvislosti zbylého grafu.

Nyní snadno dokážeme Mengerovu větu. Každé hraně přiřadíme kapacitu 1 a hledáme maximální tok mezi libovolnou dvojicí vrcholů.

Systém reprezentantů

Definice Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou neprázdné množiny. *Systémem různých reprezentantů* množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$ rozumíme takovou posloupnost *různých* prvků $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, že $x_i \in M_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$.

Důležitým a dobře známým výsledkem je Hallova věta:

Věta 11.10. Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou neprázdné množiny. Pro tyto množiny existuje systém různých reprezentantů, právě když platí

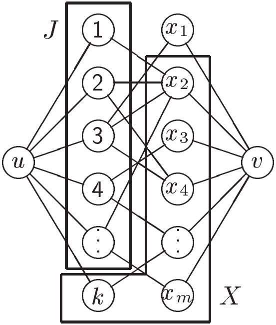
$$\forall J \subset \{1, 2, \ldots, k\} : \left| \bigcup_{j \in J} M_j \right| \geq |J|,$$

neboli pokud sjednocení libovolné skupiny z těchto množin má alespoň tolik prvků, kolik množin je sjednoceno.

Důkaz Označme $x_1, x_2, \ldots, x_m$ po řadě všechny prvky ve sjednocení $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$. Definujeme bipartitní graf G na množině vrcholů $\{1, 2, \ldots, k\} \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \cup \{u, v\}$. Navíc přidáme hrany $\{u, i\}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$, $\{v, x_j\}$ pro $j = 1, 2, \ldots, m$ a hrany $\{i, x_j\}$ pro $x_j \in M_i$.
Konstrukce grafu G je obdobná konstrukci sítě v Metodě 11.8.
Cesta mezi u a v má tvar u, i, x_j, v, ukazuje reprezentanta množiny $x_j \in M_i$.
Systém různých reprezentantů odpovídá k disjunktním cestám mezi u a v.
Nechť X je nyní libovolná minimální množina vrcholů v G, po jejímž odebrání z grafu nezůstane žádná cesta mezi u a v. Podle Lemmatu 11.9. mají naše množiny systém různých reprezentantů, právě když každá taková oddělující množina X má aspoň k prvků.
Položme $J = \{1, 2, \ldots, k\} \setminus X$. Pak každá hrana z J vede (mimo u) do vrcholů z $X \cap \{x_1, \ldots, x_m\}$ (aby nevznikla cesta mezi u, v), a proto

$$\left| \bigcup_{j \in J} M_j \right| = |X \cap \{x_1, \ldots, x_m\}| = |X| - |X \cap \{1, \ldots, k\}| = |X| - k + |J|.$$

Vidíme, že $|X| \geq k$ pro všechny (minimální) volby oddělující X, právě když $\left| \bigcup_{j \in J} M_j \right| \geq |J|$ pro všechny J, což je dokazované tvrzení. □



J
1
2
3
4
k
x_1
x_2
x_3
x_4
x_m
u
v
X

Konec

Děkuji za pozornost

Nezapomeňte, prosím, na (slovní) hodnocení předmětu.

Zkouškové termíny

- předtermín (?)
- Čtvrtek 24.1. B5, 8:00 – 13:15
- Čtvrtek 31.1. C2, 8:00 – 13:15
- Čtvrtek 7.2. C2, 8:00 – 13:15
- Čtvrtek 14.2. C2, 8:00 – 13:15
- Čtvrtek 21.2. C2, 8:00 – 13:15 (poslední termín)

Mnoho zdaru u zkoušky!