Přehled přednášky

Kapitola 9. Stromy a les

- kostry grafů (dokončení)

Kapitola 10. Barevnost a kreslení grafů

- motivace
- barevnost grafu
- rovinné kreslení grafů
- rozpoznání rovinných grafů
- barvení map a rovinných grafů

Bonus

- Hamiltonovské grafy

Opakování

Budeme používat následující pojmy:

- podgraf, faktor
- souvislý a nesouvislý graf
- vážený graf, ohodnocení grafu

Kostrou souvislého grafu G rozumíme takový faktor grafu G, který je stromem. (Faktor je podgraf, který obsahuje všechny vrcholy.)

Význam „koster“ spočívá v jejich minimalitě vzhledem k počtu hran, přičemž je zachována souvislost grafu (Věta 9.6.). Cena spojení (váha hrany) se může lišit, dostáváme:

Problém minimální kostry (MST)

Je dán souvislý vážený graf G s nezáporným ohodnocením hran w. Otázkou je najít kostru T v G, která má nejmenší možné celkové ohodnocení. Formálně

$$MST = \min_{\text{kostra} T \subseteq G} \left(\sum_{e \in E(T)} w(e) \right).$$

Algoritmus 9.17. Hladový pro minimální kostru

Je dán souvislý vážený graf G, w s nezáporným ohodnocením hran w.

- Seřadíme hrany grafu G vzestupně podle jejich ohodnocení: $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \ldots \leq w(e_m)$.
- Začneme s prázdnou množinou hran $T = \emptyset$ pro kostru.
- Pro $i = 1, 2, \ldots, m$ vezmeme hranu e_i a pokud přidáním $T \cup \{e_i\}$ nevznikne kružnice, přidáme e_i do T.
  Jinak e_i "zahodíme".
- Na konci T obsahuje hrany minimální kostry váženého grafu G, w.

Ukážeme, že algoritmus funguje správně.

Důkaz Správnost Algoritmu 9.17. ukážeme sporem.
(předpokládáme, že algoritmus v některém kroku nenašel minimální kostru)

Nechť T je množina hran získaná v Algoritmu 9.12. Předpokládejme, že hrany jsou již seřazené podle váhy $w(e_1) \le w(e_2) \le \ldots \le w(e_m)$. Vezměme množinu hran T_0 té minimální kostry (může jich být více se stejnou hodnotou), která se s T shoduje na co nejvíce prvních hranách. Pokud $T_0 = T$, algoritmus pracoval správně.

Předpokládejme ale, že $T_0 \neq T$ a najdeme spor. Ukážeme tak, že $T_0 \neq T$ nemůže nastat.

Označme $j > 0$ takový index, že se množiny T_0 a T shodují na prvních $j-1$ hranách $e_1, \ldots, e_{j-1}$, ale neshodují se na hraně e_j. To znamená, že $e_j \in T$, ale $e_j \notin T_0$. (Podle algoritmu nemůže nastat $e_j \notin T$ A $e_j \in T_0$.) Podle Důsledku 9.5. obsahuje graf na hranách $T \cup \{e_j\}$ právě jednu kružnici C. Kružnice C však nemůže být obsažena v nalezené kostře T, a proto existuje hrana e_k v C, která $e_k \notin T$ a zároveň $k > j$. Potom však je $w(e_k) \ge w(e_j)$ podle našeho seřazení hran, a proto kostra na hranách $\big(T_0 \setminus \{e_k\}\big) \cup \{e_j\}$ (vzniklá nahrazením hrany e_k hranou e_j) nemá vyšší ohodnocení (není horší) než T_0, ale shoduje se s T na více hranách! To je spor s volbou T_0. $\square$

Zmíněný hladový algoritmus pro hledání minimální kostry grafu byl popsán poprvé užitím teorie grafů Kruskalem (1956). Je však známo, že Kruskal vycházel z práce českého matematika Otakara Borůvky.
Už v roce 1926 řešil český akademik Borůvka otázku optimální stavby elektrické sítě a popsal velmi podobný algoritmus užitím matic.
Jako reakce na Borůvkovu práci vypracoval Vojtěch Jarník v roce 1929 podobný algoritmus.
Jarníkův algoritmus je ve světě známý jako Primův algoritmus z roku 1957.

Algoritmus 9.18. Jarníkův algoritmus pro minimální kostru
Hrany na začátku neseřazujeme. Kostru začneme sestavovat z jednoho (libovolného) vrcholu. V každém kroku přidáme nejmenší z hran, které vedou z již vytvořeného podstromu do některého ze zbylých vrcholů grafu.

Algoritmus 9.19. Borůvkův algoritmus pro minimální kostru
Na začátku seřadíme hrany vzestupně podle jejich ohodnocení $e_1 < e_2 < \ldots < e_m$. Kostru začneme sestavovat tak, že přidáme hranu e_i (pro $i = 1, 2, \ldots, n$), pokud přidáním nevznikne kružnice.

10. Barevnost a kreslení grafů

Jeden z nejznámějších problémů teorie grafů je problém (věta) čtyř barev. Jeho formulace je sice jednoduchá, ale řešení si vyžádalo více než 100 let.

Problém čtyř barev

Kolik nejméně barev je potřeba k obarvení politické mapy tak, aby sousední státy nebyly obarveny stejnou barvou. Za sousední považujeme ty státy, které mají společný úsek hranice, nikoli pouze bod.

Řešení si vyžádalo, kromě celé řady důkazů teoretických tvrzení, také vyšetření velkého množství případů na počítači.

Ukážeme si některá jednodušší tvrzení a speciální případy. Zavedeme několik pojmů.

Definice *Obarvení grafu* G pomocí k barev je takové libovolné zobrazení

$$c : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\},$$

že každé dva vrcholy spojené hranou dostanou různé barvy, tj. $c(u) \neq c(v)$ pro všechny $uv \in E(G)$.

Poznámka Obarvení grafu se nazývá také *dobré vrcholové barvení* grafu.

Každý graf má obarvení pomocí $|V(G)|$ barev. Nás však zajímá nejmenší možný počet barev, pro které existuje dobré vrcholové obarvení grafu G.

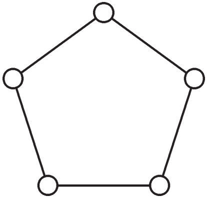
Definice *Barevnost* grafu G je nejmenší přirozené číslo $\chi(G)$, pro které existuje obarvení grafu G pomocí $\chi(G)$ barev.

Poznámka Barevnosti se také říká *chromatické číslo*.

Příklad:

Určete barevnost grafu C_5.

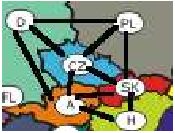
(chromatické číslo)



Lemma 10.3. Nechť G je jednoduchý graf (bez smyček) na n vrcholech. Pak $\chi(G) \leq n$. Rovnost nastává právě tehdy, když G je úplný graf.

Důkaz Je-li $G \simeq K_n$, tak stačí každý vrchol obarvit jinou barvou a máme dobré obarvení n barvami. Pokud navíc některá hrana uv v G chybí, můžeme volit lepší obarvení $c(u) = c(v) = 1$ a zbylé vrcholy obarvíme různými barvami $2, 3, \ldots, n-1$. Dostaneme tak $\chi(G) < n$. □

Příklad:
Obarvení politické mapy snadno převedeme na barvení grafu.



Každou oblast nahradíme vrcholem (hlavním městem).
Dva vrcholy spojíme hranou, jestliže jsou státy sousední.

Věta 10.5a. Graf G má barevnost 1, právě když nemá žádné hrany.

Důkaz Pokud graf nemá hrany, obarvíme všechny vrcholy stejnou barvou 1. Naopak, pokud mají všechny vrcholy stejnou barvu, nemůže být v grafu žádná hrana. □

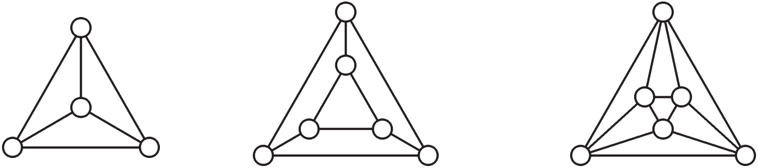
Věta 10.5b. Graf G má barevnost 2, právě když neobsahuje žádnou kružnici liché délky (jako podgraf).

Důkaz (naznačíme) Lichou kružnici nelze obarvit dvěma barvami (viz obrázek). Zvolíme-li libovolný vrchol v grafu G a obarvíme jej barvou 1. Vrcholy, jejichž vzdálenost od v je lichá, obarvíme 2. Vrcholy, jejichž vzdálenost od v je sudá, obarvíme 1.
Pokud bychom získali dva vrcholy x, y v sudé vzdálenosti od v spojené hranou xy, jistě by $v, \ldots x, y, \ldots v$ byl uzavřený sled liché délky. Z něj bychom vybrali kružnici liché délky, což podle předpokladu nelze. Pro dva vrcholy v liché vzdálenosti je zdůvodnění podobně. Proto naše obarvení neobarví sousední vrcholy stejnou barvou, a proto dvě barvy stačí na obarvení G stačí. □

10.2. Rovinné kreslení grafů

Definice 10.6. *Rovinným nakreslení* grafu G takové nakreslení, ve kterém jsou vrcholy znázorněny jako různé body v rovině a hrany jako křivky spojující body svých koncových vrcholů, přičemž hrany se nesmí křížit ani procházet jinými vrcholy než svými koncovými body.
Řekneme, že graf je *rovinný* pokud má rovinné nakreslení.

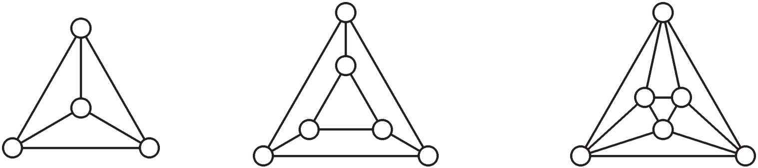
Příklady:
Příkladem rovinných grafů jsou grafy mnohostěnů (čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn, hranoly, ...)



Platí, že grafy mnohostěnů jsou vždy rovinné a (alespoň) 3-souvislé.
Naopak platí, že každý rovinný 3-souvislý jednoduchý graf je grafem nějakého mnohostěnu.

Definice:

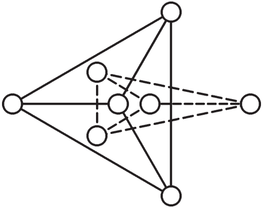
Stěnami rovinného nakreslení grafu nazýváme souvislé oblasti roviny ohraničené nakreslením grafu.



Obrázek: *Stěny rovinného nakreslení grafů.*

Definice:

Duální graf rovinného nakreslení grafu G získáme, když každou stěnu nahradíme vrcholem. Dva vrcholy nového grafu spojíme hranou, jestliže odpovídající dvojice stěn je sousední.



Obrázek: *Duální graf.*

Dá se ukázat, že duální graf k rovinnému grafu je opět rovinný graf. Ukážeme si důležitý kvantitativní vztah pro rovinná nakreslení grafů: Eulerův vztah.

Věta 10.7. Eulerův vzorec

Nechť rovinné nakreslení *neprázdného* souvislého grafu G má f stěn. Potom platí

$$|V(G)| + f - |E(G)| = 2.$$

Důkaz Označíme v počet vrcholů v G a h počet hran. Důkaz povedeme indukcí vzhledem k počtu hran.

- Je-li G strom, neobsahuje kružnici a má v nakreslení jedinou stěnu. Dle Věty 9.3. má $h = v - 1$ hran a platí $v + f - h = v + 1 - (v - 1) = 2$.
- Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny grafy, které mají $h-1$ hran. Pokud G obsahuje kružnici C, tak vynecháním jedné hrany e kružnice C se počet hran sníží o 1. Zároveň se o 1 sníží počet stěn, protože hrana e kružnice C oddělovala dvě stěny (sousedily hranou e) a vynecháním hrany e tyto stěny splynou. Počet vrcholů se nezmění.

  Podle předpokladu platí $v + (f - 1) - (h - 1) = 2$, proto platí také $v + f - h = 2$. □

Eulerův vztah nezávisí na zvoleném nakreslení grafu, pouze na struktuře grafu. Ačkoli je vztah poměrně jednoduchý, má mnoho aplikací a důsledků. Některé důsledky zmíníme a dokonce dokážeme.

Důsledek 10.8a.
Jednoduchý rovinný graf na $v \geq 3$ vrcholech má nejvýše $3v - 6$ hran.

Důkaz Můžeme předpokládat, že graf je souvislý, jinak bychom mohli přidat další hrany. Označíme v počet vrcholů v G, f počet stěn a h počet hran. Jelikož graf neobsahuje smyčky ani násobné hrany, je každá stěna (v libovolném nakreslení grafu G) ohraničena alespoň 3 hranami. Každou hranu započítáme dvakrát (ve dvou přilehlých stěnách). Platí tedy $e \geq \frac{1}{2} \cdot 3f$, neboli $\frac{2}{3}e \geq f$. Dosazením do vztahu Věty 10.7. dostaneme

$$2 = v + f - e \leq v + \frac{2}{3}e - e = v - \frac{1}{3}e$$

$$e \leq 3(v-2) = 3v - 6.$$

$\square$

Důsledek 10.8b.

Jednoduchý rovinný graf bez trojúhelníků na $v \geq 3$ vrcholech má nejvýše $2v - 4$ hran.

Důkaz Dokážeme obdobně. Označíme v počet vrcholů v G, f počet stěn a h počet hran. Tentokrát víme, že graf nemá ani trojúhelníky, a proto je každá stěna v libovolném nakreslení grafu ohraničena alespoň 4 hranami. Platí tedy $e \geq \frac{1}{2} \cdot 4f$, neboli $\frac{2}{4}e \geq f$. Dosazením do vztahu Věty 10.7. dostaneme

$$2 = v + f - e \leq v + \frac{2}{4}e - e = v - \frac{1}{2}e$$

$$e \leq 2(v-2) = 2v - 4.$$

$\square$

Můžeme dokonce odhadnout nejnižší stupeň rovinného grafu!

Důsledek 10.9.
Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše 5.
Každý rovinný graf bez trojúhelníků obsahuje vrchol stupně nejvýše 3.

Důkaz Pokud by všechny vrcholy byly stupně alespoň 6, celý graf by měl aspoň $\frac{1}{2} \cdot 6v = 3v$ hran, což je ve sporu s Důsledkem 10.8. Proto musí mít některý vrchol stupeň menší než 6.
Podobně pokud by všechny vrcholy v grafu bez trojúhelníků byly stupně alespoň 4, celý graf by měl aspoň $\frac{1}{2} \cdot 4v = 2v$ hran, což je ve sporu s Důsledkem 10.8. Proto musí mít některý vrchol stupeň menší než 4. $\square$

10.3. Rozpoznání rovinných grafů

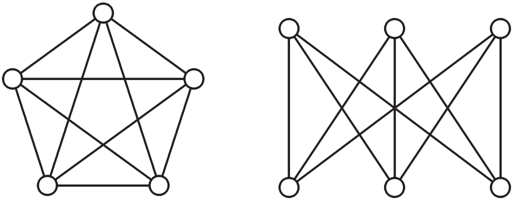
„Být rovinný", respektive „nebýt rovinný" je důležitou vlastností grafu, která má řadu aplikací. Mezi nejdůležitější patří například

- výroba tištěných spojů (obvody jsou grafy, půjde vyrobit tištěný spoj bez přidaných drátů?)
- přehledné nakreslení (aby se hrany nekřížily)

Na rozdíl od barevnosti grafu se jedná problém relativně rychle algoritmicky řešitelný.
My se zaměříme pouze na případy malých grafů, protože zmíněné algoritmy přesahují rámec kurzu.

Ukážeme si dva důležité grafy, které nejsou rovinné.

Příklad:
Grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné.



Obrázek: *Grafy* K_5 *a* $K_{3,3}$.

Důkaz Využijeme předchozího Důsledku 10.8.
Všimněme si, že graf K_5 má 5 vrcholů a 10 hran. Ale podle Důsledku 10.8a. má rovinný graf nejvýše $3 \cdot 5 - 6 = 9$ hran, proto není K_5 rovinný.
Podobně graf $K_{3,3}$ má 6 vrcholů a 9 hran. Navíc neobsahuje žádné trojúhelníky. Ale podle Důsledku 10.8b. má rovinný graf bez trojúhelníků nejvýše $2 \cdot 6 - 4 = 8$ hran, a proto ani graf $K_{3,3}$ není rovinný. $\square$

Důsledek 10.11. Grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné.

Ukazuje se, že oba grafy K_5 a $K_{3,3}$ mají klíčové postavení. Jejich struktura neumožňuje rovinné nakreslení, naproti tomu žádná další taková struktura neexistuje.

Zavedeme si pojem *rozdělení* grafu, tj. grafu, který má stejnou strukturu, případně nějaké vrcholy stupně 2 navíc.

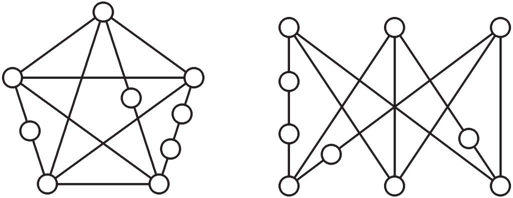
Definice *Rozdělením* (*subdivizí*) grafu G rozumíme graf, který vznikne z G rozdělením některých hran novými vrcholy stupně 2.

Vezmeme například hranu uv grafu G a nahradíme ji dvojicí hran uw a wv. Dostaneme nový graf G, který je *rozdělením* původního grafu G.

$$G' = (V(G) \cup \{w\}, (E(G) \setminus \{uv\}) \cup \{uw, wv\})$$

K. Kuratovski ukázal, že platí následující jednoduché tvrzení

Věta 10.12. Graf G je rovinný právě tehdy, když neobsahuje jako podgrafy rozdělení grafů K_5 nebo $K_{3,3}$.



Obrázek: *Subdivize grafů* K_5 *a* $K_{3,3}$.

Dá se ukázat, že rovinné grafy je vždy možno „pěkně" nakreslit:

Věta 10.14. Každý jednoduchý rovinný graf lze nakreslit v rovině bez křížení hran tak, že hrany jsou úsečky.

10.4. Barvení map a rovinných grafů

Při transformaci mapy na graf se jedná o vytvoření duálního grafu k mapě. V roce 1976 Appel a Haken, a později v roce 1993 znovu Robertson, Seymour, Sanders a Thomas, dokázali větu, která rozřešila problém čtyř barev. Jedná se o jeden z nejslavnějších výsledků diskrétní matematiky:

Věta 10.15. Každý rovinný graf bez smyček lze obarvit 4 barvami.

Důkaz ... by se sem určitě nevešel :o) $\square$

Snadno si však ukážeme jednodušší tvrzení pro 6 barev.

Věta 10.16. Každý rovinný graf bez smyček lze obarvit 6ti barvami.
Každý rovinný graf bez smyček a bez trojúhelníků lze obarvit 4mi barvami.

Důkaz

Dokážeme pouze druhou část, první je dokázána ve skriptech.

Postupujeme indukcí dle počtu vrcholů grafu G. Graf s 1 vrcholem je jistě rovinný.

Předpokládejme, že mám graf s alespoň dvěma vrcholy. Podle Důsledku 10.9. najdeme v G vrchol v stupně nejvýše 3. Graf $G - v$ je opět rovinný bez smyček i trojúhelníků. Podle indukčního předpokladu lze tento menší graf obarvit 4 barvami. Z nich jen nejvýše 3 budou použity na obarvení sousedů vrcholu v a tak čtvrtou barvou můžeme *vždy* použít na obarvení vrcholu v. $\square$

Bonus: Hamiltonovské grafy

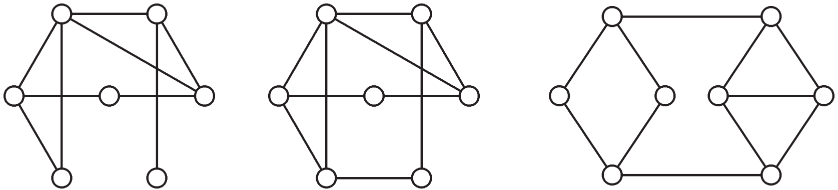
Hamiltonovská kružnice v grafu G je taková kružnice, která prochází všemi vrcholy. Graf, ve kterém existuje hamiltonovská kružnice se nazývá *hamiltonovský graf*.
(Hamiltonovská kružnice prochází každým vrcholem právě jedenkrát.)

Na první pohled se zdá, že hledání hamiltonovské kružnice je velmi podobné hledání eulerovskému tahu. Není tomu tak!
Zatímco pro rozhodnutí o existenci eulerovského tahu je nutnou i dostatečnou podmínkou sudost všech stupňů, pro existenci hamiltonovské kružnice žádná taková podmínka není známa (asi neexistuje).

Důsledek: obecně není lehké rozhodnout, zda daný graf je hamiltonovský.

Příklady:

Které následující grafy jsou a které nejsou hamiltonovské?



Obrázek: *Hamiltonovské a nehamiltonovské grafy.*

úlohy vedoucí na hledání hamiltonovské kružnice

- rodinný výlet po turistických zajímavostech
- turné cirkusu po republice
- Hamiltonova hra

Příště

Kapitola 11. Toky v sítích

- motivace
- definice sítě
- hledání maximálního toku
- zobecnění sítí a další aplikace