Přehled přednášky

Kapitola 1. Množiny a výběry prvků

- Princip nezávislých výběrů
- Metoda dvojího počítání
- výběry s opakováním

Kapitola 2. Diskrétní pravděpodobnost

- motivační příklady
- pravděpodobnostní prostor
- nezávislé jevy

Opakování

Množinové operace

- kartézký součin a mocnina
- potenční množina
- mohutnost množiny

Zavedli jsme symboly

- součet členů konečné posloupnosti
- součin členů konečné posloupnosti

Zavedli jsme pojmy

- permutace $P(n)$
- kombinace (bez opakování) $C(n,k)$
- variace (bez opakování) $V(n,k)$

Odvodili jsme vztahy pro počet všech výběrů zvoleného typu.

Příklady:

- čtyrčlenný tým z deseti zaměstnanců
  jedná se o *kombinace* (nezávisí na pořadí vybraných zaměstnanců)

$$C(10,4) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 7}{1} = 210$$

- počet zápasů tenisového turnaje sedmi hráčů
  jedná se o *kombinace* (dvouprvkové podmnožiny šesti prvkové množiny)

$$C(7,2) = \binom{7}{2} = 21$$

- počet výsledných pořadí tenisového turnaje sedmi hráčů
  jedná se o *permutace*

$$P(7) = 7! = 5040$$

- počet trojic na stupni vítězů tenisového turnaje sedmi hráčů
  jedná se o 3-prvkové *variace*, neboť „závisí na pořadí“

$$V(7,3) = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Princip nezávislých výběrů

V situaci *složeného výběru*, kdy není *žádná vazba* každého částečného výběru (podvýběru) k ostatním *podvýběrům*, stačí k získání celkového výsledku mezi sebou *vynásobit počty možností jednotlivých podvýběrů*.

Příklad:

Hokejový trenér sestavuje tým (tři útočníky, dva obránce a jednoho brankáře). K dispozici má 12 útočníků, 8 obránců a dva brankáře. Kolik různým týmů lze sestavit?

Protože mezi výběrem útočníků, výběrem obránců ani výběrem brankářů není žádná vazba, můžeme počítat

$$\binom{12}{3} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{2}{1} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 2 = 220 \cdot 28 \cdot 2 = 12320.$$

Celkem existuje 12 320 různých formací.

Když jsou výběry závislé...

nemůžeme násobit počty pravděpodobností jednotlivých výběrů.

Příklad:

Hokejový trenér sestavuje tým (tři útočníky, dva obránce a jednoho brankáře). K dispozici má 11 útočníků, 8 obránců, 1 univerzálního hráče a dva brankáře. Kolik různým týmů lze sestavit?

- vybrat 3 útočníky: $\binom{13}{3}$
- vybrat 2 obránce: $\binom{8}{2}$ nebo $\binom{9}{2}$?

Přijde na to, zda univerzálního hráče vybral do útoku nebo ne.

Příklad:

Házíme třikrát kostkou. Kolik existuje takových možností, kdy v každém dalším hodu padají větší a vetší čísla?

Metoda dvojího počítaní

Nechť každý případ nějakého (složeného) výběru lze dále rozlišit (*zjemnit*) na stejný počet ℓ možností. Dále nechť získaný (zjemněný) výběr má celkem m různých možností (které umíme spočítat).
Potom počet všech možností původního výběru *je dán podílem* m/ℓ.

Příklad:

Máme písmena K, R, S, E, e. Kolik různých (i nesmyslných) pětipísmených slov lze sestavit, jestliže nerozlišujeme malá a velká písmena?

Pokud rozlišíme všechna písmena, sestavíme celkem

$$P(5) = 5! = 120 \text{ slov}.$$

Nerozlišujeme E, e:

$$SEKeR = SeKER.$$

V celkovém počtu $m = 120$ možností máme každou možnost započítanou dvakrát $\ell = 2$.
Hledaný počet různých slov je

$$\frac{m}{\ell} = \frac{120}{2} = 60.$$

1.3 Výběry s opakováním

Doposud nebylo opakování prvků výběru žádoucí (osoby, podmnožiny, ...)
Avšak někdy je možnost opakování prvků při výběrech užitečná
(opakování písmen, vlastností, ...)

Příklad:
Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI?
(*anagram* je slovo sestavené z písmen daného slova)

Pokud by se ve slově MISSISSIPPI neopakovalo žádné písmeno, jednalo by se o permutace. Avšak opakují se: S 4krát, I 4krát, P 2krát.

Metodou dvojího počítání:

1. rozlišíme všechna písmena (barevně, pomocí indexů, apod.)
2. spočítáme všechna pořadí: $(4+4+2+1)!$
3. vydělíme počtem možností, které nechceme nerozlišovat $4!\cdot 4!\cdot 2!\cdot 1!$

$$\frac{(4+4+2+1)!}{4!\cdot 4!\cdot 2!\cdot 1!}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2}}=11\cdot 10\cdot 9\cdot 7\cdot 5=34650$$

Definice 1.7. *Permutace s opakováním* na množině X
je *uspořádání* prvků z X do posloupnosti takové, ve které se každý *prvek* X *opakuje předepsaný počet krát*.
(seřazení předepsaných počtů identických kopií prvků z X)

Počet všech permutací s opakováním k-prvkové množiny, kde i-tý prvek se opakuje m_i-krát (pro $i = 1, 2, \dots, k$):

$$\frac{(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)!}{m_1! \cdot m_2! \cdots m_k!}$$

Příklady:

- permutace s opakováním 2 prvků, kde jeden prvek se opakuje k-krát a druhý $(n-k)$-krát

  $$\frac{(k+n-k)!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} = C(n,k).$$

  1. prvek = „je“, 2. prvek = „není“ ve vybrané množině
- permutace *multimnožin* (v multimnožině se prvky mohou opakovat)

Příklad, který ilustruje pojem *kombinace s opakováním*.

Příklad:
Kolika různými způsoby můžeme vybrat 6 kuliček ze tří barev, jestliže počet kuliček stejné barvy není omezený?

Ukážeme si elegantní způsob, jak spočítat celkový počet výběrů.
Vybereme například ${\color{red}\bullet}, {\color{blue}\bullet}, {\color{red}\bullet}, {\color{red}\bullet}, {\color{green}\bullet}, {\color{blue}\bullet}$
Uvedený výběr můžeme seřadit podle barev

$${\color{red}\bullet\ \bullet\ \bullet}\,\big|\,{\color{green}\bullet}\,\big|\,{\color{blue}\bullet\ \bullet}$$

vidíme, že barvy nehrají roli, avšak důležité jsou „oddělovače“ přihrádek

$$\bullet\ \bullet\ \bullet\,\big|\,\bullet\,\big|\,\bullet\ \bullet$$

Celkový počet výběrů je

$$C^*(3,6) = \binom{6+2}{2} = \binom{8}{2} = 28.$$

Definice 1.9. *Kombinace s opakováním* z množiny X
je *neuspořádaný výběr* k prvků z X, přičemž prvky výběru se mohou *opakovat v libovolném počtu* identických kopií (multimnožina).

Počet všech k-prvkových kombinací s opakováním z n možností je

$$C^*(n,k) = \binom{k+n-1}{n-1}$$

- máme-li n „barev“, potřebujeme $n-1$ oddělovačů
- můžeme „vybírat oddělovače“, nebo „vybírat prvky“

$$C^*(n,k) = \binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}.$$

Úlohy, které vedou na kombinace s opakováním

- zápis čísla k pomocí n přirozených sčítanců
- losování množiny prvků, kdy po každém tahu vracíme prvky do osudí

Příklad:

Kolika způsoby můžeme zapsat číslo k jako součet n přirozených sčítanců?

Máme

$$k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Budeme vybírat k jedniček a rozdělovat je do n přihrádek (s možností opakování).

- některé přihrádky mohou zůstat prázdné ($0 \in \mathbf{N}$)
- můžeme dát všechny míčky do jedné přihrádky
- opakujeme přihrádky, nikoli jedničky (jiná úloha)

Otázky:

Kolika způsoby můžeme zapsat číslo k jako součet n kladných sčítanců?
Kolika způsoby můžeme zapsat číslo k jako součet alespoň n sčítanců?
Kolika způsoby můžeme zapsat číslo k jako součet nejvýše n sčítanců?

Definice $\textit{Variace s opakováním}$ z množiny X
je *uspořádaný výběr* k prvků z X, přičemž prvky výběru se mohou *opakovat v libovolném počtu* identických kopií.

Počet všech k-prvkových variací s opakováním z n možností je

$$V^*(n,k) = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k} = n^k$$

Úlohy, které vedou na variace s opakováním

- počet zobrazení k-prvkové množiny do n-prvkové množiny
- mohutnost kartézské mocniny $|A^k|$

Otázky:
Kolik má konečná množina podmnožin liché velikosti?

2. Diskrétní pravděpodobnost

Jednu z nejstarších motivací počtu pravděpodobnosti jsou hazardní hry. Otázky jako

- „Jaká je šance hodit nějakou kombinaci kostek?“
- „Jaká je šance dostat jisté karty?“

vedli k formalizaci pojmu *náhoda* a *pravděpodobnost*.

Budeme se zabývat pouze *diskrétními* případy, tj. událostmi, ve kterých může nastat pouze jedna z konečně mnoha možností.

Přehled

- motivační příklady
- pravděpodobnostní prostor
- nezávislé jevy
- střední hodnota
- náhodné výběry

2.1. Motivační příklady

Hod mincí 2 možné výsledky: hlava / orel (1 / 0)
předpokládáme, že každá strana mince padá se stejnou četností
(říkáme „s pravděpodobností $\frac{1}{2}$“)

Hod kostkou 6 možných výsledků: 1, 2, 3, 4, 5 a 6 každý strana mince padá se stejnou četností („pravděpodobností“) $\frac{1}{6}$

Zamíchání karet předpokládáme, že při poctivém rozmíchání není některé pořadí upřednostněno
možných výsledků je $32! \doteq 2.6 \cdot 10^{35}$

Tah sportky jeden tah je neuspořádaný výběr 7 prvků ze 49
možných výsledků: $\binom{49}{7} = 85\ 900\ 584.$

Naše „očekávání pravděpodobnosti“ vychází z předpokladu poctivosti.
Často různé možnosti (události) považujeme za ekvivalentní co do četnosti výskytů náhodných událostí.

2.2. Konečný pravděpodobnostní prostor

Jak matematicky modelovat „náhodu“?
Subjektivně rozumíme očekávání, zda nastane nějaký jev.
Měříme zkušeností s předchozí *relativní četností* jevu.

$$\text{pravděpodobnost} = \frac{\text{četnost jevu}}{\text{počet pokusů}}$$

Definice 2.1. *Konečný pravděpodobnostní prostor*
je dvojice (Ω, P), kde Ω je konečná množina *elementárních jevů* a P je *funkce pravděpodobnosti*, která podmnožinám Ω přiřazuje reálné hodnoty z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a splňuje

- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pro disjunktní $A, B \subseteq \Omega$

Jev je libovolná podmnožina $A \subseteq \Omega$ a jeho *pravděpodobnost je* $P(A)$.

Poznámka: stačí zadat pravděpodobnosti elementárních jevů (prvků Ω).
Pro $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \Omega$ z definice $P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_k)$

Pozor

- Jak se liší *jev* a *elementární jev*?
- *disjunktní jevy* nemohou nastat současně: $A \cap B = \emptyset$

Příklad:

elementární jev: při hodu kostkou padne 1
jev: při hodu kostkou padne sudé číslo

Příklad:

Při současném hodu dvěma kostkami jevy

- A: padne alespoň jedna šestka
- B: padne součet 7

nejsou disjunktní jevy $P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, avšak

- C: padne alespoň jedna šestka
- D: padne součet 3

jsou disjunktní jevy $P(C \cap D) = 0$, nemohou nastat současně.

Motivační příklady ve smyslu Definice 2.1.

Hod mincí

$\Omega = \{0, 1\}$ a $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$

Hod kostkou

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $P(1) = \ldots = P(6) = \frac{1}{6}$
Jev „padne sudé číslo" je tvořen podmnožinou $\{2, 4, 6\}$

Zamíchání karet

Ω je tvořena všemi $32!$ permutacemi z 32 karet, každá permutace má stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{32!}$.
Jev „Full House" je tvořen podmnožinou všech těch permutací, které obsahují trojici karet stejné hodnoty a dvojici karet jiné hodnoty

Tah sportky

jeden tah je neuspořádaný výběr 7 prvků ze 49
Ω je tvořena všemi 7-prvkovými kombinacemi z 49 čísel, každá kombinace má pravděpodobnost $1/\binom{49}{7}$

Poznámka: ve všech příkladech mají elementární jevy stejnou pravděpodobnost

Definice *Uniformní pravděpodobnost* je prostoru Ω přiřazena funkcí

$$P(A) = |A| \,/\, |\Omega|.$$

- každý elementární jev je stejně pravděpodobný
- pravděpodobnost jevu A = relativní velikost A vzhledem k Ω

Příklad:
Náhodný proces, kdy zjišťujeme součet ok při hodu dvěma kostkami.
Množina všech možných součtů dvou kostek je $\Omega = \{2, 3, \ldots, 12\}$.
Pravděpodobnosti elementárních jevů jsou různé! Součet 2 lze získat jediným způsobem $1 + 1$, součet 7 lze získat šesti způsoby, bude častější.
Užitím úvahy o poměrném počtu způsobů získáme funkci pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} P(2) &= P(12) = \tfrac{1}{36}, \\ P(3) &= P(11) = \tfrac{2}{36} = \tfrac{1}{18}, \\ P(4) &= P(10) = \tfrac{3}{36} = \tfrac{1}{12}, \\ P(5) &= P(9) = \tfrac{4}{36} = \tfrac{1}{9}, \\ P(6) &= P(8) = \tfrac{5}{36}, \\ P(7) &= \tfrac{6}{36} = \tfrac{1}{6}. \end{aligned}$$

Příklad:

Náhodný proces, kdy zjišťujeme součet ok při hodu dvěma kostkami (modelováno prostorem s uniformní pravděpodobností).

Množina elementárních jevů je $\Omega' = [1,6]^2$ (druhá kartézská mocnina množiny $\{1,2,3,4,5,6\}$).

Pravděpodobnosti každého elementárního jevu je $P(A) = \frac{1}{36}$.

Jevy jednotlivých součtů jsou následující podmnožiny Ω'

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \emptyset, \\
S_2 &= \{(1,1)\}, \\
S_3 &= \{(1,2),(2,1)\}, \\
&\vdots \\
S_7 &= \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}, \\
S_8 &= \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}, \\
&\vdots \\
S_{12} &= \{(6,6)\}.
\end{aligned}
$$

Pravděpodobnosti jevů $S_1, \ldots, S_{12}$ jsou stejné jako u předchozího modelu.

Upřednostňujeme užití prostorů s uniformní pravděpodobností.

2.3. Nezávislé jevy

Nezávislost pravděpodobnostních jevů intuitivně zřejmá:
Pravděpodobnost toho, že nastane jeden jev, není ovlivněna skutečným výsledkem druhého jevu, a naopak.
(principiálně podobné *nezávislým výběrům* z Kapitoly 1.)

Nezávislé jevy:

- dva hody toutéž kostkou za sebou,
- jeden hod s více kostkami,
- hod kostkou a současné zamíchání karet,
- losování z osudí, jestliže vracíme vylosované objekty (dva různé tahy sportky).

Závislé jevy:

- vrchní a spodní číslo padlé při jednom hodu kostky,
- výběr první a druhé karty ze zamíchaného balíčku,
- losování z osudí, jestliže vylosované objekty ponecháme mimo osudí.

Definice *Nezávislé jevy* A, B jsou takové, pro které platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Alternativně:
Jev *B je nezávislý na A*, jestliže pravděpodobnost jevu B při současném jevu A je stejná jako pravděpodobnost jevu B obecně, tedy úměrou

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(\Omega)}.$$

Definice jsou ekvivalentní.

Otázky:
Z osudí sportky vylosujeme jeden míček, potom druhý míček

- jaká je pravděpodobnost, že první míček je 1?
- jaká je pravděpodobnost, že druhý míček je 2?
- jaká je pravděpodobnost, že jsme vylosovali první míček 1 a druhý 2?
- jak se pravděpodobnost změní, jestliže před druhým losováním první míček vrátíme?

2.4. Střední hodnota (někdy také „očekávaná hodnota“)

Podívejme na náhodné procesy, jejichž výsledkem je (přirozené) číslo. Omezíme se jen na procesy s konečně mnoha výsledky.

Definice náhodné proměnné

Výsledek náhodného procesu, jejichž výsledkem je předem neurčené číslo, budeme nazývat *náhodnou proměnnou*.

Definice střední hodnoty

Nechť náhodná proměnná X nabývá k možných hodnot z množiny $\{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$, kde X_i nastává s pravděpodobností p_i, a $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. *Střední hodnotou proměnné* X je pak číslo

$$EX = p_1 \cdot h_1 + p_2 \cdot h_2 + \ldots + p_k \cdot h_k.$$

Věta 2.5. Pro libovolné dvě náhodné proměnné X, Y platí

$$E(X + Y) = EX + EY.$$

Věta 2.6. Pro libovolné dvě nezávislé náhodné proměnné X, Y platí

$$E(X \cdot Y) = EX \cdot EY.$$

Příklady:

Jaká je střední hodnota (průměr) čísel padlých na šestistěnné kostce?

$$EK = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3.5.$$

Jaká je střední hodnota čísel padlých na kostce s čísly 2, 3, 5, 7, 11, 13?

$$EK = \frac{1}{6}(2+3+5+7+11+13) = \frac{41}{6} \doteq 6.8333.$$

Jaká je střední hodnota součtu čísel padlých na dvou šestistěnných kostkách?
S využitím předchozího výsledku a Věty 2.6.

$$E(K_1 + K_2) = EK_1 + EK_2 = 3.5 + 3.5 = 7.$$

Jaká je střední hodnota součinu čísel padlých na dvou šestistěnných kostkách?
S využitím prvního výsledku a Věty 2.7.

$$E(K_1 \cdot K_2) = EK_1 \cdot EK_2 = 3.5 \cdot 3.5 = 12.25.$$

Příklad:

Jaký je průměrný součin čísel horní a spodní stěny stejné kostky při hodech?

Střední hodnota čísla na horní stěně je 3.5 a na dolní stěně také 3.5. Střední hodnota jejich součinu však není $3.5 \cdot 3.5 = 12.25$, protože tyto dva jevy nejsou nezávislé.

Místo toho střední hodnotu součinu spočítáme podle definice

$$\frac{1}{6}(1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1) = \frac{56}{6} \doteq 9.3333.$$

Pozor na nezávislost jevů při násobení středních hodnot!

2.5. Náhodné výběry

Časté typy *konečných uniformních náhodných výběrů* v diskrétní matematice:

Náhodná podmnožina Z dané n-prvkové množiny vybíráme libovolnou z 2^n jejích podmnožin, každou s pravděpodobností 2^{-n}.

Náhodná permutace Ze všech $n!$ permutací dané n-prvkové množiny vybíráme libovolnou jednu s pravděpodobností $1/n!$.

Náhodná kombinace Ze všech $\binom{n}{k}$ k-prvkových kombinací dané n-prvkové množiny vybíráme libovolnou jednu s pravděpodobností $1/\binom{n}{k}$.

Náhodná posloupnost bitů. Vybíráme libovolně dlouhou posloupnost z 0 a 1 tak, že každý další bit je vybírán s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ (nezávisle na všech předchozích bitech, podobně jako při hodu mincí).
Každá vybraná podposloupnost této náhodné posloupnosti musí mít stejnou šanci se objevit.

Příště

Kapitola 3. Důkazy v diskrétní matematice

- základní logické symboly
- pojem matematického důkazu
- princip matematické indukce
- důkazy vzorců pro výběry
- vztahy s kombinačními čísly
- důkazy „počítáním“