Diskrétní matematika

Číslo předmětu: 457-519/01
Rozsah: 6 kreditů (2/2/2)
Garant: Michael Kubesa
Přednáší: Petr Kovář

Web: am.vsb.cz/kovar
Email: Petr.Kovar@vsb.cz
Kancelář: K208

Bodové hodnocení

Zápočtové písemky

- každý týden (počínaje druhým)
- 2–10 minut
- bodují se 0/1/2 (ne/téměř správně/zcela správně)
- počítá se 8 nejlepších krát 1,25
- celkem 20 bodů
- při absenci se písemka počítá za 0 bodů

Zadání příkladů najdete na `http://am.vsb.cz/kovar`

Bodové hodnocení

Samostatný referát

- zadávání v druhé polovině semestru
- každý referát dva příklady (diskrétní matematika/teorie grafů)
- příklad se boduje se 0/5/10 (ne/téměř správně/zcela správně)
  mimořádně dobré řešení 15 bodů
- celkem 20 bodů
- pro získání zápočtu musí být referát přijat
- dodržet termín odevzdání!
- samostatné vypracování

Bodové hodnocení

Zápočet = alespoň 10 bodů a přijatý referát

Zkouška

- termíny stanoveny koncem semestru
- celkem 60 bodů
- vzorová písemka na webu (`http://am.vsb.cz/kovar`)
- můžete používat jednu stranu A4 rukou psaných poznámek definice, věty a vztahy, ale nesmí obsahovat řešené příklady

Literatura

- P. Hliněný. Diskrétní matematika, výukový text on-line.
- J. Matoušek, J. Nešetřil. Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum Praha 2000.
- přednášky v elektronické verzi on-line.

Můžete používat i jiná skripta/knihy, ale pozor: *detaily se mohou lišit*.
U zkoušky platí to, jak používáno na přednášce.

Konzultační hodiny: út 14:30-15:30, středa(?) 10:00–11:00 na K208.

viz web: `http://am.vsb.cz/kovar`

Ochutnávka problémů

Úlohy, které se naučíme během semestru řešit:

- lámání čokolády...
- dokonalý kompresní algoritmus...
- podávání rukou...
- devět kamarádů si dává potřech dárcích...
- tři domy a tři studně...
- sedm mostů města Královce...

1. Množiny a výběry prvků

Přehled přednášky

- číselné obory
- množiny a množinové operace
- výběry prvků: variace, kombinace, permutace (bez opakování)

1.1 Čísla, operace a množiny

Přirozená čísla

značíme $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ pozor! obsahují číslo 0

Interval přirozených čísel

značíme: $[a, b] = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$
srovnej s intervalem reálných čísel (a, b)

Celá část reálného čísla

$\lfloor x \rfloor$ (dolní) celá část reálného čísla x
$\lceil x \rceil$ horní celou část reálného čísla x

Příklad:
$\lfloor 3.14 \rfloor = 3 \qquad \lfloor -3.14 \rfloor = -4$

Otázka:
Udává výraz $\lceil \log n \rceil$ počet číslic n v desítkové soustavě?
Pokud ne, umíte najít „správnou“ formuli?

Posloupnosti

Posloupnost je seřazením několika *prvků*.

Značíme $(a_i)_{i=1}^{n} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ indexy přirozená čísla, obvykle od 1

Prvky se mohou opakovat.

Příklady:

(x, v, z, v, y) $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29)$

Sumy

Suma je součet prvků posloupnosti, značíme

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$\sum_{i \in J} a_i = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n}, \text{ kde } J = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$$

Otázka:

$$\sum_{i \in \{1,3,5,7\}} i^2 = ?$$

Součiny

Součin prvků posloupnosti, značíme

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

$$\prod_{i \in J} a_i = a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \ \cdots \ \cdot a_{i_n}, \text{ kde } J = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$$

Příklady:

$$\sum_{i=2}^{5} \ln(i) = \ln\left(\prod_{i=2}^{5} i\right) = \ln(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = \ln 120$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i \cdot j) = \sum_{i=1}^{n} \left(i \cdot \sum_{j=1}^{n} j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \left(\frac{1}{2} n(n+1)\right)^2$$

$$\sum_{i=3}^{2} i = 0 \qquad \prod_{i=3}^{2} i = 1$$

Příklady:

$$\sum_{i=1}^{n}(i+j) = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} j = \frac{n}{2}(n+1) + nj$$

$$J = \{2, 8, 12, 21\}, \qquad \sum_{j \in J} j = 2 + 8 + 12 + 21 = 43$$

Otázky:

$$\sum_{i=1}^{5} \ln(i) = ?$$

$$\sum_{i=1}^{100} i = ?$$

$$\prod_{i=1}^{6} i = ? \qquad\qquad \prod_{i=1}^{n} i = ?$$

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i) = ?$$

Množiny a množinové operace

Obvykle značíme velkými písmeny $A, B, X, M, \ldots$

Prvky množin značíme malými písmeny $a, b, x, \ldots$

Prázdná množina $\emptyset$ nikoli $\{\emptyset\}$!

Zadáváme výčtem prvků $M = \{a, b, c, d\}$, platí $a \in M$, $d \in M$, ale $e \notin M$

Mohutnost množiny M udává počet prvků v M, značíme $|M|$

A je *podmnožinou* B, píšeme $A \subseteq B$, jestliže pro každé $a \in A$ je také $a \in B$

Sjednocení množin $A \cup B = \{x : x \in A \text{ nebo } x \in B\}$

Průnik množin $A \cap B = \{x : x \in A \text{ a současně } x \in B\}$

Rozdíl množin $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ a současně } x \notin B\}$

Symetrický rozdíl množin $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Rozšířené sjednocení $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ a průnik $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} X_i$ množin

Příklady:

$$A = \{a, b, c\},\ B = \{c, d\}$$

$$A \cup B = \{a, b, c, d\}, \quad A \cap B = \{c\}, \quad A \setminus B = \{a, b\}, \quad A \Delta B = \{a, b, d\}$$

Kartézský součin a kartézská mocnina

Kartézský součin množin $A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$
je množina všech uspořádaných dvojic prvků vybraných po složkách z množin A a B v daném pořadí.
$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$
Pro $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ dostaneme *kartézskou mocninu* A^n
definujeme $A^0 = \{\emptyset\}$

Příklady:

$$A = \{a, b\},\ B = \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$$

$$A \times B = \{(a, \clubsuit), (a, \heartsuit), (a, \spadesuit), (b, \clubsuit), (b, \heartsuit), (b, \spadesuit)\}$$

Otázky:

$$B \times A \times B =?, \quad A \times \emptyset =?, \quad \emptyset \times \emptyset =?, \quad \emptyset^0 =?, \quad \emptyset^\emptyset =?$$

Které množinové operace jsou

- komutativní?
- asociativní?

Potenční množina

je množina obsahující všechny podmnožiny množiny A

$$2^A = \{X : X \subseteq A\}$$

Množinový systém nad A

nebo také *systém množin* nad A je nějaké $\mathcal{T} \subseteq 2^A$
dáváme přednost termínu „systém množin" před „množina množin"

Příklady:

$$2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

$$\left|2^A\right| = 2^{|A|}$$

Otázky:

$$|A \times B| = ?, \quad |2^A| \stackrel{?}{=} |A^2|, \quad |2^A| \stackrel{?}{<} |A^2|, \quad |2^A| \stackrel{?}{\leq} |A^2|$$

1.2 Výběry a seřazení prvků

budeme se zabývat výběry prvků nějaké množiny

- uspořádané / neuspořádané výběry
- bez opakování / s opakováním prvků

Dnes:

- permutace (bez opakování)
- kombinace (bez opakování)
- variace (bez opakování)
- + úlohy, které řešíme počítáním výběrů

Pozor! Při řešení praktických úloh máme obvykle kombinovaný výběr, musíme rozpoznat společné/rozdílné vlastnosti.

Definice 1.1. *Permutace* n-prvkové množiny X
je *uspořádání všech prvků* množiny X do posloupnosti délky n bez opakování.

Počet všech permutací n-prvkové množiny

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

- první prvek vybíráme z n možností
- druhý prvek vybíráme z $n-1$ možností
- ...

Úlohy, které vedou na permutace (bez opakování)

- počet uspořádání nějaké množiny
- počet bijektivních zobrazení n prvkové do n-prvkové množiny
- počet různých rozmíchání karet
- přidělení startovních čísel na maratonu
- počet různých obsazení hotelových pokojů

Definice 1.2. *Kombinace* na množině X
je *neuspořádaný výběr* k prvků z množiny X bez možnosti opakování.
(Výběr je k-prvková podmnožina X.)

Počet k-prvkových kombinací na n-prvkové množině

$$C(n,k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

- $n!$ možností jak seřadit prvky X
- vybereme prvních k prvků (nezajímá nás počet pořadí $k!$)
- zahodíme posledních $n-k$ prvků (nezajímá nás počet pořadí $(n-k)!$)

Úlohy, které vedou na kombinace bez opakování

- počet podmnožin nějaké konečné množiny
- binomické koeficienty: koeficient u členu x^k ve vztahu $(x+1)^n$

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Definice 1.3. *Variace* na množině X
je *uspořádaný výběr* k prvků z množiny X bez možnosti opakování
(Uspořádaný výběr je k-prvková posloupnost prvků z množiny X.)

Počet k-prvkových variací na n-prvkové množině

$$V(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- první prvek vybíráme z n možností
- druhý prvek vybíráme z $n-1$ možností
- ...
- k-tý prvek vybíráme z $n-k+1$ možností

nebo

- $n!$ možností jak seřadit prvky X
- zajímá nás prvních k prvků
- zahodíme posledních $n-k$ prvků (nezajímá nás počet pořadí $(n-k)!$)

Úlohy, které vedou na variace bez opakování

- výběr k-prvkové posloupnosti z n prvků
- počet injektivních (prostých) zobrazení k prvkové do n-prvkové množiny
- pořadí prvních tří vítězů závodu
- počet různých ubytování hostů v poloprázdném hotelu

Příště

Kapitola 1. Množiny a výběry prvků (dokončení)

- princip nezávislých výběrů
- metoda dvojího počítání

Kapitola 2. Diskrétní pravděpodobnost

- motivační příklady
- pravděpodobnostní prostor
- nezávislé jevy