10 Vzdálenost a metrika v grafu

10.1. Jaká je střední hodnota vzdálenosti dvou náhodně vybraných vrcholů v grafu P_8?

V grafu P_8 můžeme sestavit celkem $8\dot{8} = 64$ dvojic (ne nutně různých) vrcholů. Existuje celkem

- 2 dvojice vrcholů ve vzdálenosti 7,
- 4 dvojice vrcholů ve vzdálenosti 6,
- 6 dvojic vrcholů ve vzdálenosti 5,
- 8 dvojic vrcholů ve vzdálenosti 4,
- 10 dvojic vrcholů ve vzdálenosti 3,
- 12 dvojic vrcholů ve vzdálenosti 2,
- 14 dvojic vrcholů ve vzdálenosti 1,
- 8 dvojic vrcholů ve vzdálenosti 0.

To je celkem $8 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 64$ dvojic. Střední hodnota vzdálenosti D pak je

$$E(D) = 0 \cdot \frac{8}{64} + 1 \cdot \frac{14}{64} + 2 \cdot \frac{12}{64} + 3 \cdot \frac{10}{64} + 4 \cdot \frac{8}{64} + 5 \cdot \frac{6}{64} + 6 \cdot \frac{4}{64} + 7 \cdot \frac{2}{64} = \frac{84}{64} = \frac{168}{64} = \frac{21}{8} \doteq 2.625.$$

Pokud si někdo zadání vyloží tak, že vrcholy musí být nutně různé (což nemusí), tak

$$E(D) = 1 \cdot \frac{7}{28} + 2 \cdot \frac{6}{28} + 3 \cdot \frac{5}{28} + 4 \cdot \frac{4}{28} + 5 \cdot \frac{3}{28} + 6 \cdot \frac{2}{28} + 7 \cdot \frac{1}{28} = \frac{84}{28} = 3.$$

A pokud chápeme úlohu tak, že libovolná dvojice vrcholů je stejně pravděpodobná, tak v grafu P_8 existuje celkem $C^*(8, 2) = \binom{8+2-1}{2} = 36$ dvojic (ne nutně různých) vrcholů. Existuje celkem

- 1 dvojice vrcholů ve vzdálenosti 7,
- 2 dvojice vrcholů ve vzdálenosti 6,
- 3 dvojice vrcholů ve vzdálenosti 5,
- 4 dvojice vrcholů ve vzdálenosti 4,
- 5 dvojic vrcholů ve vzdálenosti 3,
- 6 dvojic vrcholů ve vzdálenosti 2,
- 7 dvojic vrcholů ve vzdálenosti 1,
- 8 dvojic vrcholů ve vzdálenosti 0.

To je celkem $8 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \sum_{i=1}^{8} i = 8 \cdot 9/2 = 36$ dvojic. Střední hodnota vzdálenosti D pak je

$$E(D) = 0 \cdot \frac{8}{36} + 1 \cdot \frac{7}{36} + 2 \cdot \frac{6}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot \frac{3}{36} + 6 \cdot \frac{2}{36} + 7 \cdot \frac{1}{36} = \frac{84}{36} = \frac{7}{3} \doteq 2.33.$$

10.2. Sestavte metriku neohodnoceného grafu C_5.

Metrika grafu je funkce $d : V(C_5) \times V(C_5) \to \mathbb{N}_0$, která vyjadřuje vzdálenost každé uspořádané dvojice vrcholů. Hodnoty funkce zapisujeme do čtvercové matice řádu 5. Označíme vrcholy po řadě $v_1, v_2, \ldots, v_5$ a sestavíme metriku

$$d = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

10.3. Kolik nejvíce vrcholů může mít graf, který má největší možnou vzdálenost mezi dvěma vrcholy grafu rovnu 2?

Graf $K_{m,n}$ má největší možnou vzdálenost dvou vrcholů rovnou 2, neboť každé dva vrcholy ze stejné partity jsou ve vzdálenosti 2 a ostatní dvojice vrcholů jsou vrcholy sousední, tj. ve vzdálenosti 1. Proto není žádné omezení na počet vrcholů, graf může mít libovolný počet vrcholů větší než 2.

10.4. Vysvětlete, proč graf $K_{3,5}$ není rovinný.

Graf $K_{3,5}$ obsahuje jako podgraf kompletní bipartitní graf $K_{3,3}$, a proto podle Kuratowského věty není rovinný.

Jiné vysvětlení je, že jako bipartitní graf neobsahuje C_3 a každý takový rovinný graf má důsledku Eulerova vzorce nejvýše $2v - 4 = 2(5 + 3) - 4 = 12$ hran. Graf $K_{3,5}$ však má $3 \cdot 5 = 15$ hran a proto není rovinný.