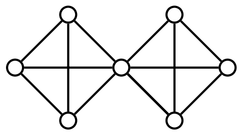
9 Souvislost, vyšší stupně souvislosti, eulerovské grafy

9.1. V grafu G s 15 vrcholy existuje jeden vrchol stupně 8 a nejmenší stupeň vrcholu je 6. Kolik má graf G komponent? Pečlivě vysvětlete.

Graf G je souvislý, tvrzení ukážeme přímo. Označme v vrchol stupně 8. Vrchol v a současně všech 8 jeho sousedních vrcholů patří do stejné komponenty, která proto má alespoň 9 vrcholů. Zbývajících $15 - 9 = 6$ vrcholů nemůže být nezávislých, neboť každý je stupně alespoň 6, neboť $\delta(G) = 6$. Proto je každý vrchol buď sousední s vrcholem v, nebo ve vzdálenosti nejvýše 2. Graf G je souvislý.
Jiné řešení:
Postupujeme sporem. Předpokládejme, že graf G není souvislý a jeho nejmenší komponentu označme H. Platí $|V(H)| \leq \frac{15}{2}$, proto $|V(H)| \leq 7$. Protože nejmenší stupeň v grafu G je 6, tak nejmenší komponenta má právě 7 vrcholů. Avšak zbývajících $15 - 7 = 8$ vrcholů tvoří druhou komponentu X. Platí $|V(X)| = 8$. Žádná komponenta již neexistuje, byla by menší než nejmenší komponenta H. Označme v vrchol stupně 8. Jistě $v \notin H$, neboť vrchol v má 8 sousedních vrcholů a komponenta H má právě 7 vrcholů. Proto $v \in X$ a $|V(X)| \geq 9$. Dostáváme hledaný spor.

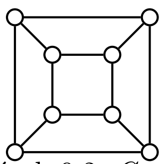
9.2. Uveďte a) příklad grafu, který je vrcholově 3-souvislý a hranově 2-souvislý, b) příklad grafu, jehož stupeň hranové souvislosti je 3 a stupeň vrcholové souvislosti je 1. Pokud některý z uvedených grafů neexistuje, pečlivě zdůvodněte proč.

ad a) Příkladem takového grafu je například K_n pro $n \geq 4$. Kompletní graf K_n je vrcholově i hranově i-souvislý pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$.
ad b) Příkladem takového grafu jsou dvě kopie grafu C_3, jejichž každý vrchol je propojen jednou hranou s novým vrcholem x. Stupeň vrcholové souvislosti takového grafu je 1, neboť graf je souvislý a odstraněním vrcholu x dostaneme dvě komponenty. Stupeň hranové souvislosti takového grafu je 3, neboť odstranění dvou hran neporuší souvislost (každý vrchol je součásti podgrafu K_4) a odstraněním tří hran od některého vrcholu stupně 3 dostaneme nesouvislý graf.



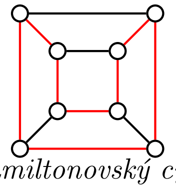
Obrázek 9.1: *Graf s hranovým stupněm souvislosti 3 a vrcholovým stupněm souvislosti 1.*

9.3. Označme vrcholy krychle $ABCDEFGH$. Obrázek krychle tvoří graf G s 8 vrcholy. a) Je tento graf G eulerovský? Vysvětlete a případný eulerovský tah zapište. b) Je tento graf G hamiltonovský? Vysvětlete a případný hamiltonovský cyklus zakreslete.



Obrázek 9.2: *Graf krychle.*

ad a) Graf G má všechny vrcholy lichého stupně 3, není proto eulerovský a podle Eulerovy věty v něm neexistuje eulerovský tah.
ad b) Graf G obsahuje hamiltonovský cyklu, například (při klasickém označení vrcholů krychle) $A, B, C, D, H, G, F, E, A$.



Obrázek 9.3: *Hamiltonovský cyklus v grafu krychle.*