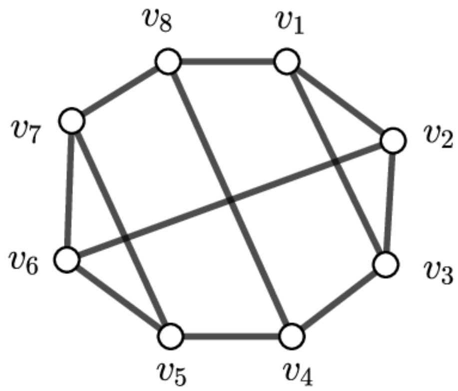
8 Stupně vrcholů, Věta Havla-Hakimiho

8.1. Na obrázku je znázorněný graf G. Určete a vysvětlete:
a) Jaký je nejdelší cyklus v grafu G?
b) Jaký je nejdelší indukovaný cyklus v grafu G?
c) Jaký je nejdelší tah v grafu G?
d) Jaký je nejdelší sled v grafu G?



Obrázek 8.1: *Graf G.*

[a]) Bez problémů v grafu najdeme cyklus $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1$, což je cyklus C_8. Protože každý vrchol může být v cyklu obsažený nejvýše jednou a v cyklu C_8 jsou obsaženy všechny vrcholy grafu G, je jasné, že delší cyklus v grafu G nemůže existovat. Nejdelší cyklus v grafu G je proto cyklus C_8.

b) Indukovaný podgraf grafu G obsahuje nějakou množinu vrcholů grafu G a všechny hrany grafu G v rámci této množiny. Už víme, že nejdelší cyklus v grafu je C_8. Cyklus C_8 ale není indukovaný podgraf grafu G, tudíž to není indukovaný cyklus. Naopak cykly C_3, které v grafu můžeme najít dva, jsou zároveň i indukované. Pokud budeme chtít najít delší indukovaný cyklus, určitě v něm bude muset chybět minimálně jeden z vrcholů cyklu v_1, v_2, v_3, v_1 a minimálně jeden z vrcholů cyklu v_5, v_6, v_7, v_5, aby v indukovaném podgrafu tyto cykly C_3 nebyly. Už tedy víme, že nejdelší indukovaný cyklus nemůže být delší než cyklus C_6. Pokud vynecháme vrcholy v_1 a v_5, podgraf indukovaný na všech ostatních vrcholech tvoří cyklus $v_2, v_3, v_4, v_8, v_7, v_6, v_2$. Našli jsme indukovaný cyklus C_6 a protože víme, že delší indukovaný cyklus v tomto grafu nemůže být, nalezený cyklus C_6 je řešením úlohy. Vzhledem k symetrii grafu lze vynechat i vrcholy v_3 a v_7, indukovaný cyklus $v_1, v_2, v_6, v_5, v_4, v_8, v_1$ je pak opět cyklus C_6.

c) Graf obsahuje 8 vrcholů stupně 3. V grafu neexistuje tah obsahující všechny hrany (musely by být buď všechny vrcholy sudého stupně, nebo právě dva vrcholy lichého stupně). Musíme vynechat tři vzájemně nezávislé hrany, například hrany v_1v_2, v_3v_4 a v_5v_6, abychom dostali graf, v němž existuje alespoň otevřený eulerovský tah. Při vynechání menšího počtu hran vždy zůstanou aspoň 4 vrcholy lichého stupně. Z celkového počtu 12 hran tedy nejdelší tah obsahuje $12 - 3 = 9$ hran. Příkladem tahu může být $v_1, v_2, v_3, v_1, v_8, v_7, v_6, v_5, v_4, v_3$. Tento tah obsahuje 10 vrcholů a tedy 9 hran.

d) Ve sledu se můžou hrany i vrcholy opakovat. Sled v grafu proto může být libovolně dlouhý. Můžeme například vést sled tím způsobem, že z vrcholu v_1 půjdeme hranou v_1v_2 do vrcholu v_2, pak zase stejnou hranou do v_1, pak zpět do v_2 atd. Pro sled libovolné délky tímto způsobem můžeme najít sled o 1 delší. Žádný konečný sled tedy není nejdelší.

8.2. Udělejte v grafu ze zadání předchozího příkladu následující změny: odstraňte hrany v_5v_7 a v_1v_3 a přidejte hrany v_1v_5 a v_3v_7. Bude takto vzniklý graf izomorfní se zadaným grafem? Pokud ano, najděte izomorfismus. Pokud ne, zdůvodněte. Najdete jiný způsob, jak odstranit dvě hrany a přidat jiné dvě hrany, aby nově vzniklý graf byl izomorfní s původním grafem?

Nový graf nebude izomorfní se zadaným grafem. V zadaném grafu jsou dva cykly C_3, v nově vzniklém žádný cyklus C_3 není.

Pokud odstraníme hrany v_5v_7 a v_1v_3 a přidáme hrany v_1v_7 a v_3v_5, pak dostaneme graf izomorfní se zadaným grafem. Po pootočení grafu můžeme snadno vidět, že se jedná o izomorfní grafy, neboť se jedná o stejný graf pouze s jinak pojmenovanými vrcholy.

8.3. Jaké je omezení pro ohodnocení grafů, aby pro hledání vzdáleností bylo možno použít Dijsktrův algoritmus?

Dijsktrův algoritmus lze použít, pokud je graf kladně ohodnocený.