7 Princip sudosti, Věta Havla-Hakimiho

7.1. Opravené zadání: Předpokládejme, že graf $G = (V, E)$ má 20 vrcholů stupně 2, dále má 15 vrcholů stupně 4 a počet hran v grafu je $|E(G)| = 78$. Jestliže víme, že všechny další vrcholy v grafu jsou stupně 7, kolik vrcholů stupně 7 je v grafu G? Zapište také, jaký je celkový počet vrcholů tohoto grafu, $|V(G)| =$?

Z principu sudosti (Věta 1.1 – viz např. přednáška) platí:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2 \cdot |E(G)|, \quad \text{kde} \quad n = |V(G)|.$$

Po dosazení informací o počtech a stupních vrcholů a o počtu hran ze zadání dostáváme:

$$\begin{aligned} 20 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + x \cdot 7 &= 2 \cdot 78 \\ 7x &= 156 - 40 - 60 \\ 7x &= 56 \\ x &= 8. \end{aligned}$$

Graf G má 8 vrcholů stupně 7 a celkový počet vrcholů je $|V(G)| = 20 + 15 + 8 = 43$.

Jiné řešení:

Dle starého zadání mělo být v grafu 74 hran. Potom z principu sudosti (Věta 1.1 – viz např. přednáška) platí:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2 \cdot |E(G)|, \quad \text{kde} \quad n = |V(G)|.$$

Po dosazení informací o počtech a stupních vrcholů a o počtu hran ze zadání dostáváme:

$$\begin{aligned} 20 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + x \cdot 7 &= 2 \cdot 74 \\ 7x &= 148 - 40 - 60 \\ 7x &= 48 \\ x &= \tfrac{48}{7}. \end{aligned}$$

Takový graf G nemůže existovat a proto by úloha úloha neměla řešení.

7.2. Ověřte, zda je daná stupňová posloupnost grafová, tj. zda existuje graf s vrcholy, jejichž stupně odpovídají dané číselné posloupnosti. V případě, že daná posloupnost grafová je, využijte zpětný postup z ověření dle Věty Havla-Hakimiho a graf zkonstruujte. K vrcholům v nakresleném grafu zapište jejich stupně. Stupňová posloupnost:

a) $(7, 7, 7, 7, 4, 4, 3, 3)$,

b) $(6, 6, 5, 5, 4, 3, 2, 1)$.

Pomocí postupu dle věty Havla-Hakimi ověříme, zda jsou zadané posloupnosti grafové.

ad a)

$$(7, 7, 7, 7, 4, 4, 3, 3) \sim^{H-H} (6, 6, 6, 3, 3, 2, 2) \sim^{H-H} (5, 5, 2, 2, 1, 1) \sim^{H-H}$$
$$(4, 1, 1, 0, 0) \sim^{H-H} (0, 0, -1, -1)$$

Poslední posloupnost obsahuje i záporná čísla a není grafová. Podle věty Havla-Hakimi tedy ani první (zadaná) posloupnost není grafová.

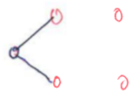
ad b)

$$(6, 6, 5, 5, 4, 3, 2, 1) \sim^{H-H} (5, 4, 4, 3, 2, 1, 1) \sim^{H-H} (3, 3, 2, 1, 0, 1) \sim$$
$$(3, 3, 2, 1, 1, 0) \sim^{H-H} (2, 1, 0, 1, 0) \sim (2, 1, 1, 0, 0) \sim^{H-H} (0, 0, 0, 0).$$

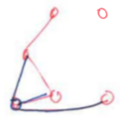
Poslední posloupnost obsahuje jen nuly a je tedy grafová. Podle věty Havla-Hakimi je i první (zadaná) posloupnost grafová. Tj. existuje graf s danou stupňovou posloupností. Možných grafů může být více. Jeden z možných grafů včetně postupu, kde přidávané vrcholy jsou vyznačeny modře, je na obrázku.

(0,0,0,0)

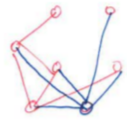
(2,1,1,0,0)



(3,3,2,1,1,0)



(5,4,4,3,2,1,1)



(6,6,5,5,4,3,2,1)