6 Kongruence

6.1. Použijte Euklidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele čísel 62 *a* 26*.*
Najděme řešení užitím Euklidova algoritmu.

$$\begin{aligned} 62 &= 2 \cdot 26 + 10 \\ 26 &= 2 \cdot 10 + 6 \\ 10 &= 1 \cdot 6 + 4 \\ 6 &= 1 \cdot 4 + 2 \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Největší společný dělitel čísel 62 a 26 je 2. Můžeme také zapsat $NSD(62, 26) = 2$.

6.2. Použijte Euklidův algoritmus z předchozího příkladu pro nalezení Bézoutových koeficientů: vyjádřete $NSD(62, 26)$ *jako lineární kombinaci čísel* 62 *a* 26*.*
Podle předchozího příkladu jsme odvodili největší společný dělitel.

$$\begin{aligned} 62 &= 2 \cdot 26 + 10 \\ 26 &= 2 \cdot 10 + 6 \\ 10 &= 1 \cdot 6 + 4 \\ 6 &= 1 \cdot 4 + 2 \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Zpětným dosazením z (před)poslední rovnice dostaneme

$$2 = 1 \cdot 6 - 1 \cdot 4.$$

Dosazením zbytku 4 z předchozí rovnice dostaneme

$$2 = 1 \cdot 6 - 1 \cdot (10 - 1 \cdot 6) = (-1) \cdot 10 + 2 \cdot 6.$$

Dosazením zbytku 6 z předchozí rovnice dostaneme

$$2 = (-1) \cdot 10 + 2 \cdot (26 - 2 \cdot 10) = 2 \cdot 26 - 5 \cdot 10.$$

Dosazením zbytku 10 z předchozí rovnice dostaneme

$$2 = 2 \cdot 26 - 5 \cdot (62 - 2 \cdot 26) = (-5) \cdot 62 + 12 \cdot 26.$$

Protože $2 = (-5) \cdot 62 + 2 \cdot 26$, tak hledané Bézoutovy koeficienty jsou -5 a 12.

6.3. Najděte obecné řešení lineární kongruence $2x \equiv 5 \pmod{13}$*.*
Najdeme inverzi čísla 2 modulo 13. Protože $NSD(2, 13) = 1$, tak inverze existuje. Pomocí Euklidova algoritmu počítáme

$$\begin{aligned} 13 &= 6 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

Z předposlední rovnice dostaneme

$$1 = 1 \cdot 13 - 6 \cdot 2.$$

Nyní víme

$$1 = 1 \cdot 13 - 6 \cdot 2 \equiv (-6) \cdot 2 \equiv 7 \cdot 2 \pmod{13}.$$

Inverze čísla 2 modulo 13 je číslo 7.

Obě strany kongruence roznásobíme inverzí 5 a dostaneme

$$\begin{aligned} 7 \cdot 2x &\equiv 7 \cdot 5 \pmod{13} \\ x &\equiv 35 \pmod{13} \\ x &\equiv 9 \pmod{13}. \end{aligned}$$

Obecné řešení dané kongruence jsou všechna čísla $x = 13t + 9$, kde $t \in \mathbb{Z}$.
Jiné řešení:
Najdeme inverzi čísla 2 modulo 9. Všimneme si, že $7 \cdot 2 = 14 \equiv 1 \pmod{13}$, a proto číslo 7 je inverzí čísla 2 modulo 13. Obě strany kongruence roznásobíme inverzí 7 a dostaneme

$$\begin{aligned} 7 \cdot 2x &\equiv 7 \cdot 5 \pmod{13} \\ x &\equiv 35 \pmod{13} \\ x &\equiv 9 \pmod{13}. \end{aligned}$$

Obecné řešení dané kongruence jsou všechna čísla $x = 13t + 9$, kde $t \in \mathbb{Z}$.
Jiné řešení:
Kongruenci nejprve zjednodušíme. Přičteme číslo 13 k pravé straně (kongruence se nezmění, neboť $13 \equiv 0 \pmod{13}$). Upravíme

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 5 + 13 \pmod{13} \\ 2x &\equiv 18 \pmod{13} \\ x &\equiv 9 \pmod{13}, \end{aligned}$$

kde obě strany jsme krátili číslem 2 nesoudělným s modulem. Obecné řešení dané kongruence jsou všechna čísla $x = 13t+$, kde $t \in \mathbb{Z}$.

6.4. Kolik hran má kompletní bipartitní graf $K_{5,7}$? Jednou větou vysvětlete.

Z každého vrcholu jedné partity vede hrana do každého vrcholu druhé partity. Takových hran je proto $5 \cdot 7 = 35$.