5 Princip inkluze a exkluze, rekurence

5.1. Kolik je v množině $[1,100]$ *čísel, která nejsou dělitelná ani 3, ani 13?*
Je zřejmé, že $|[1,100]| = 100$.

Nejdříve určíme, počet čísel v celočíselném intervalu $[1,100]$, která jsou dělitelná alespoň jedním z čísel 3, 13. Tento počet označíme y. Potom je ovšem počet všech čísel z intervalu, která nejsou dělitelná ani jedním z čísel 3, 13, $x = 100 - y$.

Určeme y. Označme A_i množinu všech čísel z $[1,100]$, která jsou dělitelná $i \in \{3,13\}$. Potom $|A_3 \cup A_{13}|$ je počet čísel v celočíselném intervalu $[1,100]$, která jsou dělitelná alespoň jedním z čísel 3, 13. Tedy $y = |A_3 \cup A_{13}|$. Pro výpočet $|A_3 \cup A_{13}|$ potřebujeme princip inkluze a exkluze, tudíž

$$y = |A_3 \cup A_{13}| = |A_3| + |A_{13}| - |A_3 \cap A_{13}|,$$

přičemž $|A_3| = \lfloor \frac{100}{3} \rfloor = 33$, $|A_{13}| = \lfloor \frac{100}{13} \rfloor = 7$, $|A_3 \cap A_{13}| = \lfloor \frac{100}{39} \rfloor = 2$.

Dostáváme $y = |A_3 \cup A_{13}| = 33 + 7 - 2 = 38$. Odtud $x = 100 - 38 = 62$. V intervalu $[1,100]$ je 62 čísel, která nejsou dělitelná ani 3, ani 13.

5.2. Jaký koeficient je v rozvoji výrazu $(x - 2y^2)^{15}$ *pomocí binomické věty před členem s* y^{14}*?*
mMocninu dvojčlenu rozepíšeme podle binomické věty

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

V binomickém rozvoji se členy x a $-2y^2$ zadaného dvojčlenu vyskytují jen v mocninách s mocniteli od 0 do 15. Vyskytuje-li se v členu rozvoje y^{14}, muselo vzniknout umocněním členu $-2y^2$, a to konkrétně $(-2y^2)^7 = (-2)^7 y^{14} = -128y^{14}$. Protože mocnitel druhého členu je 7, tak víme, že $n - k = 7$ a $n = 15$. Odtud $k = 8$, a to je mocnitel prvního členu.

Proto celý člen s y^{14} vypadá takto:

$$\binom{15}{8} x^8 (-128) y^{14}.$$

Dále

$$\binom{15}{8} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 5 = 6435.$$

Koeficient před členem s y^{14} je $6435 \cdot (-128) = -823\,680$.

5.3. Mějme posloupnost zadanou rekurentně takto:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_n = 2a_{n-1} + 35a_{n-2}.$$

Najděte nejdříve obecný tvar řešení této rekurentně zadané posloupnosti. Potom najděte konkrétní řešení s tím, že zohledníte podmínky $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.
Nejdříve nalezneme charakteristickou rovnici. Ta je:

$$x^2 - 2x - 35 = 0.$$

Užitím Vietovy věty dostaneme kořeny $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -5$. Dostaneme OBECNÉ ŘEŠENÍ:

$$a_n = \alpha_1 7^n + \alpha_2 (-5)^n.$$

Abychom určili konkrétní řešení, musíme určit α_1, α_2. Pro $n = 1$, dostaneme

$$1 = a_1 = 7\alpha_1 - 5\alpha_2.$$

Pro $n = 2$, máme

$$2 = a_2 = 49\alpha_1 + 25\alpha_2.$$

Vyřešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých a dostaneme $\alpha_1 = \frac{1}{12}, \alpha_2 = -\frac{1}{12}$.

A máme konkrétní řešení:

$$a_n = \frac{1}{12} 7^n - \frac{1}{12} (-5)^n.$$