4 Pravděpodobnost a střední hodnota

4.1. Máme zamíchaný balíček 52 karet (2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K,A ve čtyřech barvách). Vytáhneme z něj 5 karet. Jaká je pravděpodobnost, že právě jedna vytažená karta bude vyšší než 9? Eso považujeme za kartu vyšší než 9.

Nezáleží na pořadí vytažení karet. Každý elementární jev (vytažení nějaké pětice karet) má stejnou pravděpodobnost, jedná se tedy o uniformní pravděpodobností prostor, platí $|\Omega| = C(52,5) = \binom{52}{5} = 2\ 598\ 960$.

Označme B množinu všech takových pětic karet, které obsahují právě jednu kartu vyšší než 9.

Počet karet vyšších než 9 je 20. Počet všech kombinací s právě jednou kartou vyšší než 9 je proto $C(20,1) \cdot C(32,4) = \binom{20}{1} \cdot \binom{32}{4} = 20 \cdot 35\ 960 = 719\ 200$. Pravděpodobnost vytažení právě jedné karty vyšší než 9 je v uniformním pravděpodobnostním prostoru $\frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{C(20,1) \cdot C(32,4)}{C(52,5)} = \underline{\underline{\frac{8\ 990}{32\ 487}}} \doteq 0.276726$.

Jiné řešení:
$\frac{20}{52} \cdot \frac{32}{51} \cdot \frac{31}{50} \cdot \frac{30}{49} \cdot \frac{29}{48}$ je pravděpodobnost, že vytáhneme kartu vyšší než 9 a následně 4 karty nižší než 9. Tuto pravděpodobnost ale musíme vynásobit pětkrát, protože nemáme zadáno, že kartu vyšší než 9 musíme vytáhnout hned na první pokus. Můžeme ji vytáhnout při libovolném z 5 pokusů. Proto $P(B) = \frac{20}{52} \cdot \frac{32}{51} \cdot \frac{31}{50} \cdot \frac{30}{49} \cdot \frac{29}{48} \cdot 5 = \underline{\underline{\frac{8\ 990}{32\ 487}}} \doteq 0.276726$.

4.2. Házíme dvakrát klasickou šestistěnnou kostkou. Rozhodněte, zda jsou jevy A „prvním hodem padla šestka“ a B „součet obou hodů je 7“ závislé, nebo nezávislé jevy.

Jevy A a B jsou nezávislé právě tehdy, když platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Určit pravděpodobnost $P(A) = \frac{1}{6}$ je snadné.

Hodnotu $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ můžeme určit jako podíl počtu příznivých výsledků $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$ ku počtu všech možných výsledků (předpokládejme, že rozlišujeme pořadí hodů, $\Omega = [1,6]^2$). Každá hodnota na kostce má stejnou pravděpodobnost, jedná se tedy o uniformní pravděpodobnostní prostor. Platí $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Nyní zbývá tuto hodnotu porovnat s pravděpodobností, že nastal průnik jevů A a B. Ten nastane pouze u uspořádané dvojice $(6,1)$, což je jedna z 36 možných uspořádaných dvojic. Pravděpodobnost je tedy $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

Platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, jevy jsou tudíž nezávislé.

Jiné řešení:
Stačí si uvědomit, že součet protilehlých hodnot na kostce je 7. Ať už první hod dopadne jakkoli, při druhém hodu máme vždy pravděpodobnost $\frac{1}{6}$, že trefíme protilehlou stranu k prvnímu hodu. Tato pravděpodobnost tedy nezávisí na tom, jaká hodnota padla prvním hodem, a proto jsou jevy A, B nezávislé.

4.3. Basketbalista trénuje trestné hody a každý pokus trefí s pravděpodobností 0.8. Chce se trefit 10krát v řadě, pak už pokračovat nebude. Jakmile poprvé mine, také už nebude pokračovat. Jaká je střední hodnota počtu trefených hodů v rámci jedné takové série maximálně deseti hodů?

Sestavíme náhodnou proměnnou X, která vyjadřuje počet trefených hodů. Platí $X \in [0,10]$.

S pravděpodobností 0.2 mine hned první trestný hod a $X = 0$. S pravděpodobností $0.8 \cdot 0.2$ trefí první a mine druhý. Potom $X = 1$. S pravděpodobností $0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.2$ trefí první i druhý a mine třetí, tedy $X = 2$, atd. Až nakonec s pravděpodobností 0.8^{10} trefí všech 10 hodů v sérii a $X = 10$.

Střední hodnota je tedy $E(X) = \sum_{i=0}^{10} ip_i = \sum_{i=0}^{10} i0.8^i \cdot 0.2 + 10 \cdot 0.8^{10} = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.8 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.8^2 \cdot 0.2 + \cdots + 9 \cdot 0.8^9 \cdot 0.2 + 10 \cdot 0.8^{10} = \underline{\underline{\frac{34\ 868\ 196}{9\ 765\ 625}}} \doteq 3.5705$.

4.4. Uveďte nějakou lineární homogenní rekurentní rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty včetně počátečních podmínek.

Závisí na volbě studenta. Například

$$a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-3}$$

pro $a_1 = 7$, $a_2 = -9$, $a_3 = 16$.