3 Výběry s opakováním; pravděpodobnost

3.1. Předpokládejme, že heslo musí být 5 místné, sestaveno z písmen abecedy (nerozlišují se velká a malá písmena ani diakritika, tedy 26 znaků) a číslic. Dále každé heslo musí obsahovat alespoň jednu číslici. Kolik takových hesel existuje?

Začneme výpočtem všech možností, jak sestavit 5 místné heslo ze všech povolených znaků bez omezení. Potom zúžíme výběr jen na hesla splňující danou podmínku.

- K sestavení hesla můžeme použít 26 písmen a 10 číslic, tj. celkem 36 znaků. Na každou z 5 pozic hesla vybíráme bez omezení jeden z 36 znaků. Dle principu nezávislých výběrů je počet možností:

$$P_1 = P_{(\text{vsechna hesla})} = 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 = 36^5 = V^*(36, 5) = 60\,466\,176.$$

- Ze všech možných hesel máme určit počet těch, která obsahují alespoň jedno číslo. Tj. obsahují jedno číslo, dvě čísla, tři atd. až třeba všech 5 znaků jsou čísla. Jednodušší je ale spočítat počet hesel, která neobsahují žádné číslo. K jejich sestavení můžeme použít jen 26 znaků abecedy, tedy:

$$P_2 = P_{(\text{hesla bez cisla})} = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^5 = V^*(26, 5) = 11\,881\,376.$$

  Počet hesel s alespoň jedním číslem dostaneme odečtením počtu nepovolených hesel od všech možných:

$$P = P_{(\text{hesla s cislem})} = P_1 - P_2 = 36^5 - 26^5 = \underline{\underline{48\,584\,800}}.$$

3.2. Ve večerce mají Valašské jogurty jahodové, oříškové a čokoládové. Taky nabízejí jogurty Jogobella višňové a meruňkové a Choceňský jogurt mají bílý. Kolik je možností jak pro rodinu nakoupit 10 jogurtů, jestliže alespoň tři jogurty mají být čokoládové, alespoň dva jogurty oříškové a právě jeden jogurt bílý? Od dalších druhů může být jogurtů vybráno libovolně mnoho (třeba žádný) tak, aby jogurtů bylo celkem deset.

Ve večerce nabízejí celkem 6 druhů jogurtů.

- Spočítáme počet možností, jak nakoupit 10 ks jogurtů z možných 6 druhů bez omezení. Počet možností je dán počtem kombinací s opakováním, kdy vybíráme 10 krát z 6 druhů.

$$C^*(n, k) = C^*(6, 10) = \binom{6 + 10 - 1}{6 - 1} = \binom{15}{5} = 3\,003.$$

  Číslo odpovídá počtu možností, jak rozdělit 10 předmětů do 6 přihrádek, kdy v každé přihrádce může být 0 až 10 předmětů.

- Teď zkusíme přidat zadané podmínky. Alespoň tři čokoládové jogurty zajistíme umístěním 3 předmětů do první přihrádky. Alespoň dva oříškové jogurty zajistíme umístěním 2 předmětů do druhé přihrádky. Právě jeden bílý jogurt znamená 1 předmět v poslední přihrádce, přičemž do této přihrádky už nesmíme nic přidat. Tj. dále rozdělíme jen $10 - 3 - 2 - 1 = 4$ předměty do $6 - 1 = 5$ přihrádek. Počet možností je:

$$C^*(5, 4) = \binom{5 + 4 - 1}{5 - 1} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \underline{\underline{70}}.$$

Počet možností, jak nakoupit jogurty je 70.

3.3. Vypočtěte:

(a) Kolik lze sestavit anagramů slova "MUFAFFARMAGAR"?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný anagram neobsahuje dvě A vedle sebe?

ad (a) Máme určit počet různých seřazení znaků daného slova, přičemž některá písmena ve slově se opakují. Jde tedy o výběr uspořádaný s opakováním. Počet možností všech seřazení je dán permutací s opakováním.
Ve slově jsou písmena: A - 4x, F - 3x, M - 2x, R - 2x, U - 1x, G - 1x. Celkem 13 písmen.
Počet všech anagramů (seřazení) je:

$$P_a = P^*(4,3,2,2,1,1) = \frac{13!}{4!3!2!2!1!1!} = \underline{\underline{10\,810\,800}}.$$

ad (b) Označíme si třeba J jev, že "náhodně vybraný anagram neobsahuje dvě A vedle sebe". Celý pravděpodobnostní prostor Ω obsahuje všechny možné náhodné výběry anagramu. Tedy $|\Omega| = P_a$. Protože každý anagram má stejnou šanci být vybrán je Ω uniformní. Pravděpodobnost jevu J vypočteme klasicky

$$P(J) = \frac{|J|}{|\Omega|} = \frac{|J|}{|P_a|}.$$

Je třeba určit počet anagramů odpovídajících jevu J, $|J| =?$. Můžeme postupovat třeba takto:
Seřadíme všechny ostatní písmena slova (kromě A), tj. $P^*(3,2,2,1,1) = \frac{9!}{3!2!2!} =$ možností.
Mezi tato seřazená písmena umístíme 4x písmeno A tak, aby A nebyla vedle sebe. Tj. vybíráme 4 pozice z 10 možných pozic mezi uspořádanými 9 znaky (včetně krajních pozic). Počet možností tohoto výběru je $C(10,4) = \binom{10}{4}$. Ke každému seřazení 9 písmen je $C(10,4)$ možností jak mezi ně umístit písmena A. Odtud:

$$|J| = P^*(3,2,2,1,1) \cdot C(10,4) = \frac{9!}{3!2!2!} \cdot \frac{10!}{6!4!} = 15120 \cdot 210 = 3\,175\,200.$$

Pro pravděpodobnost dostáváme

$$P(J) = \frac{|J|}{|\Omega|} = \frac{3\,175\,200}{10\,810\,800} = \underline{\underline{0,2937}}.$$