1 Aritmetická a geometrická posloupnost, sumy a produkty

1.1. Rozhodněte, zda následující posloupnost je aritmetická či geometrická. Pokud ano, určete první člen a diferenci, respektive první člen a kvocient této posloupnosti.

$$-\frac{9}{4}, \frac{3}{2}, -1, \frac{2}{3}, -\frac{4}{9}, \dots$$

Ověříme, zda se jedná o aritmetickou posloupnost. Platí $a_2 - a_1 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{6+9}{4} = \frac{15}{4}$, ale $a_3 - a_2 = -1 - \frac{2}{3} = \frac{-3-2}{3} = -\frac{5}{3}$. Rozdíly nejsou stejné, proto se nejedná o aritmetickou posloupnost.

Ověříme, zda se jedná o geometrickou posloupnost. Platí $a_2/a_1 = a_3/a_2 = a_4/a_3 = a_5/a_4 = -\frac{2}{3}$. První člen je $a_1 = -\frac{9}{4}$ a kvocient je $q = -\frac{2}{3}$.

1.2. Najděte aritmetickou posloupnost, pro kterou platí $a_3 = -\frac{1}{3}$, $a_7 = 9$. Najděte vztah pro n-tý člen této posloupnosti.

Platí $a_7 = a_3 + 4d$. Dosazením $a_3 = -\frac{1}{3}$, $a_7 = 7$ dostaneme

$$\begin{aligned} a_7 &= a_3 + 4d \\ 9 &= -\frac{1}{3} + 4d \\ 4d &= 9 + \frac{1}{3} = \frac{27+1}{3} = \frac{28}{3} \\ d &= \frac{28}{12} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Dále $a_3 = a_1 + 2d$, proto $a_1 = a_3 - 2d = -\frac{1}{3} - \frac{14}{3} = -\frac{1+14}{3} = -\frac{15}{3} = -5$. Dostáváme vztah pro n-tý člen

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -5 + (n-1)\frac{7}{3} = \underline{\underline{\frac{7n-22}{3}}}.$$

1.3. Máme dánu geometrickou posloupnost, pro kterou víme že platí $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_4 = 8$. Vypočítejte součet prvních 15 členů této geometrické posloupnosti. Určete všechna možná řešení.

Platí $a_4 = a_2 \cdot q^2$. Dosazením $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_4 = 8$ dostaneme

$$\begin{aligned} a_4 &= a_2 \cdot q^2 \\ 8 &= \frac{1}{2} \cdot q^2 \\ q^2 &= 2 \cdot 8 = 16 \\ q &= \pm\sqrt{16} \\ q &= \pm 4. \end{aligned}$$

Existují dvě různá řešení pro kvocient $q = 4$, $q = -4$. Dále $a_2 = a_1 \cdot q$, proto $a_1 = \frac{a_2}{q}$.

(a) Pro $q = 4$ dostáváme $a_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Vztah pro n-tý člen je $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{8} \cdot 4^{n-1} = 2 \cdot 4^{n-3}$. Podle vztahu pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$ vypočítáme

$$S_{15} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\left(4^{15} - 1\right)}{4-1} = \frac{4^{15}-1}{8 \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{1073741823}{24}}} = 44739242.625$$

(b) Pro $q = -4$ dostáváme $a_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$. Vztah pro n-tý člen je $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = -\frac{1}{8} \cdot (-4)^{n-1} = \frac{1}{2}\left(-4\right)^n$. Podle vztahu pro součet $S_n = a_1 \frac{q^n-1}{q-1}$ vypočítáme

$$S_{15} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{\left((-4)^{15} - 1\right)}{-4-1} = \frac{(-4)^{15} - 1}{(-8)\cdot(-5)} = -\frac{1073741825}{40} = \underline{\underline{-\frac{214748365}{8}}} = -26843545.625$$